Marcelo Rufino de Oliveira
Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

COLEÇÃO ELEMENTOS DA MATEMÁTICA

2

GEOMETRIA PLANA

Este é o segundo volume da **Coleção Elementos da Matemática**, programada para apresentar toda a matemática elementar em seis volumes:

Volume 1 – Conjuntos, Funções, Exponencial, Logaritmo e Aritmética
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

Volume 2 – Geometria Plana
Autores: Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

Volume 3 – Seqüências, Combinatória, Probabilidade, Matrizes e Trigonometria
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira, Manoel Leite Carneiro e Jefferson França

Volume 4 – Números Complexos, Polinômios e Geometria Analítica
Autores: Marcelo Rufino de Oliveira e Jefferson França

Volume 5 – Geometria Espacial
Autor: Antonio Eurico da Silva Dias

Volume 6 – Cálculo
Autor: Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

O desafio inicial para os autores de um livro de geometria plana é definir a seqüência com que os assuntos serão apresentados. Há dois motivos para a existência deste desafio: 1) se o assunto A é pré-requisito para o assunto B, então A deve vir antes de B no livro; 2) para não confundir ou desestimular o aluno, os assuntos mais complexos deve estar mais para o final do livro. Estes motivos justificam, por exemplo, a razão pela qual a teoria sobre a semelhança de triângulos ser desenvolvida antes da teoria sobre potência de ponto e também o por quê da teoria sobre os pontos notáveis no triângulo figurarem mais para o final do livro. Entretanto, os autores deste livro são cientes que não existe um encadeamento ótimo para os assuntos. Fato este comprovado pela inexistência de dois livros de geometria plana que possuam exatamente a mesma seqüência de apresentação dos tópicos.

O objetivo desta coleção é iniciar o preparo de pessoas, a partir da 8ª série, para a aprovação nos processos seletivos mais difíceis do Brasil, de instituições como Colégio Naval, ITA, IME, USP, Unicamp, UnB, dentre outros, nos quais se exige mais do que simples memorização de fórmulas e de resultados. Deseja-se que o estudante adquira um senso crítico de causa e efeito, embasado nos mais sólidos conceitos, o que o ajudará a raciocinar coesa e coerentemente na maioria dos assuntos e das disciplinas exigidas em tais concursos (não somente em matemática!). Mostrando, especificamente neste volume, a geometria de modo axiomático (ou, pelo menos, aproximando-se de tal), procura-se desenvolver tais qualidades. Conseqüentemente, o aluno também se prepara para olimpíadas de matemática, que está a alguns degraus acima dos grandes vestibulares do Brasil em relação ao nível de dificuldade.

Dificuldades há, sem dúvida. No entanto, repudiam-se idéias do tipo que o aluno não consegue aprender dessa ou daquela forma. Não se deve menosprezar a capacidade dos alunos, nem mesmo seu interesse, sob pena de estar cometendo preconceitos ou precariedade na metodologia de ensino, respectivamente. Qualquer indivíduo ao qual se propõe o aprendizado de análise sintática e semântica, por exemplo, tem condições de compreender um estudo mais rigoroso e encadeado de geometria. Ao menos melhor do que o atual. Por experiência própria, já se comprovou que os benefícios superam bastante eventuais prejuízos.

Os autores

Índice

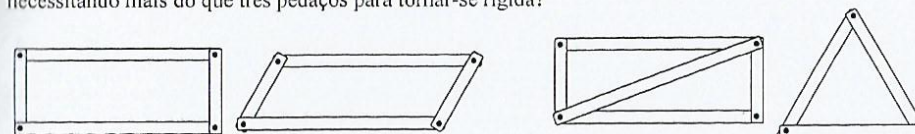
Capítulo 7. Triângulos – Pontos Clássicos e Cevianas

Capítulo 8. Área e Relações Métricas nos Quadriláteros

Capítulo 9. Polígonos

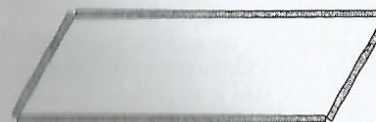
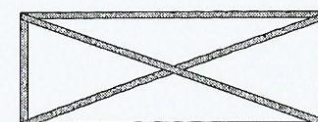
Introdução: Linhas, Ângulos e Triângulos

1.1) INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DEDUTIVA

Da observação da natureza ao redor, assim como da necessidade de medir e partilhar terras, calcular volumes e edificar construções, observar e prever os movimentos dos astros, surgiram tentativas do homem de explicar ou, pelo menos a princípio, de utilizar as propriedades das figuras e dos corpos que encontrava ou, posteriormente, construía. Qual o motivo que faz uma abelha preferir construir a entrada do alvéolo em forma hexagonal a construí-la em forma triangular, que é um formato poligonal mais simples? Quando se constrói um portão quadrangular de madeira, a estrutura não fica rígida (indeformável) enquanto não se utiliza um quinto pedaço. Por que uma estrutura triangular é estável, não necessitando mais do que três pedaços para tornar-se rígida?

ESTRUTURAS INSTÁVEIS ESTRUTURAS RÍGIDAS

Um conhecimento razoável de geometria (e, às vezes de outros assuntos, como álgebra ou física, por exemplo) elucida fatos como os acima. É claro, porém, que nem sempre a humanidade teve a mesma quantidade de informação que existe hoje. Tal volume de conhecimento variou muito no tempo e no espaço. Por vezes determinadas civilizações possuíam mais conhecimento matemático do que outras, ainda que contemporâneas ou, em não raros casos, de épocas posteriores. Basta comparar, por exemplo, egípcios e babilônios antigos com outros povos pré-helênicos ocidentais.

Essas duas culturas já conheciam e utilizavam várias propriedades geométricas. Para exemplificar, há mais de cinco mil anos, os egípcios já se sabia que um triângulo que possui lados medindo 3, 4 e 5 (na mesma unidade, por exemplo, palmos de uma mesma mão) é retângulo. Os babilônios, que importaram muito do conhecimento matemático egípcio. já conheciam esse resultado (teorema de Pitágoras) em sua totalidade. Conhecia-se também o fato de que o comprimento de uma circunferência é, aproximadamente, o triplo do diâmetro da mesma. Que um quadrilátero com lados opostos de mesma medida possui tais lados paralelos. Que um quadrilátero com diagonais de mesma medida tem os quatro ângulos retos.

Pode-se afirmar que, inicialmente, as propriedades que se buscavam tinham objetivos de cunho totalmente prático, isto é, serviam para resolver problemas particulares que surgiam num determinado trabalho, comumente a agrimensura, a arquitetura ou a astronomia. As duas últimas das propriedades listadas acima, por exemplo, objetivavam demarcar terrenos retangulares. Com quatro pedaços de bambu, dois com um mesmo tamanho e os outros dois também (não necessariamente com o mesmo comprimento dos dois primeiros), ajusta-se um quadrilátero, que ainda não é, obrigatoriamente, um retângulo (é denominado atualmente paralelogramo). Mas quando um ajuste final é feito de modo que dois últimos pedaços de bambu, de mesmo tamanho, sirvam de diagonais ao quadrilátero, PRONTO. Garante-se, agora, que o quadrilátero é um retângulo. Só como curiosidade, muitas propriedades como essas são utilizadas ainda hoje, por culturas distantes da tecnologia habitual (algumas regiões na Índia e na África, por exemplo). Mesmo em outros países, como aqui no Brasil, a construção civil ainda usa também certos resultados geométricos empiricamente.

Um terreno na forma de um paralelogramo qualquer

Um terreno na forma de um retângulo

Uma pergunta natural deve surgir neste ponto: quem ensinou as propriedades geométricas aos povos antigos? A princípio, é fácil ver que os ensinamentos eram passados (como ainda hoje em algumas tribos) de geração a geração. A tradição dos mestres de obras perde-se no tempo. Mesmo assim, a resposta ainda está incompleta. A passagem de conhecimento deve ter tido algum início. É altamente provável que tais conclusões sejam advindas da observação da natureza e mesmo por meio de *tentativa e erro*. Quando se verificava, experimentalmente, que certo fato, repetidas vezes dava o mesmo resultado, previsível, então a intuição ganhava força de persuasão e era passada adiante, com a certeza da experiência. Isso é que se chama de resultado *empírico*. Resumindo de modo grosseiro, os primórdios da geometria (em verdade, a primeira área da matemática estudada de modo destacado) a classificam como uma ciência *experimental*, em que intuição, comprovada por vários acertos anteriores, dita as regras.

Por volta do século VI antes de Cristo, porém, uma revolução do pensamento humano começa a tomar forma. Filósofos gregos começam a indagar se a simples aceitação de verdades impostas pelos mais experientes satisfaz, de fato, a natureza humana. Inicia-se a busca pelo verdadeiro conhecimento, com filósofos da estirpe de Sócrates e de Platão, sendo que esse último sugeriu uma explicação de todos os fenômenos do universo por meio dos famosos cinco elementos (água, terra, fogo, ar e quinta-essência), cada um deles representado por meio dos hoje chamados *sólidos de Platão* (divididos em exatamente cinco categorias). Rapidamente, essa linha de raciocínio ganha adeptos em várias partes, expandindo-se mais ainda graças à disseminação da cultura helênica pelos conquistadores de grande parte do mundo ocidental da época: os romanos.

Novamente, sob uma visão sintética, pode-se dizer que, a partir desse período procurou-se JUSTIFICAR, de modo irrefutável, inegável, a maior quantidade (para não dizer todos) de fatos possíveis (não só os geométricos), o que vai de encontro à posição passiva assumida pelos aprendizes de outrora.

Aproximadamente pelo século V a.C., surgem os primeiros matemáticos profissionais (ou propriamente ditos, desvinculando-se da filosofia pura), como Tales de Mileto, que aprendeu muito com discípulos de Platão e com egípcios, e um de seus pupilos, Pitágoras de Samos, os quais foram grandes responsáveis pelos primeiros progressos concretos em busca de uma matemática que não dependesse apenas, ou principalmente, de intuição, sendo Tales considerado o pai das explicações formais de propriedades por meio de outras já conhecidas anteriormente (demonstração). Pitágoras foi fundador de uma espécie de seita, os pitagóricos, que pregava a supremacia da matemática (destacadamente, dos números) no universo, bem como a idéia de que "tudo são números". O resultado geométrico mais famoso do mundo é denominado teorema de Pitágoras, apesar de haver indícios de que ele já era conhecido e utilizado vários anos antes. Provavelmente, a homenagem é feita ao líder da congregação de que se tem registro claro de alguém (não necessariamente Pitágoras) que provou a validade do resultado, de um modo geral. Contudo, o maior fenômeno matemático de todos os tempos estava por vir, quando, entre dois e três séculos antes de Cristo, um professor da universidade de Alexandria, Euclides, reuniu, organizada e formalmente, todo o conhecimento matemático de sua época numa obra de treze volumes (ou capítulos): os ELEMENTOS, com mais de mil edições (desde 1482) até os dias atuais, façanha possivelmente superada no mundo ocidental apenas pela Bíblia.

Sem dúvida, a principal novidade introduzida por essa grande obra foi o *método axiomático* ou *dedutivo* de estudo, que consiste basicamente em algumas idéias e propriedades elementares, aceitas naturalmente, as quais servem de base a toda construção seguinte, definindo novos termos a partir dos preexistentes, e justificando (deduzindo) TODAS as propriedades não elementares, por meio das iniciais e das já justificadas anteriormente.

Durante praticamente dois milênios, os Elementos foram utilizados como obra de referência no ensino de geometria, sendo que em muitos lugares como obra exclusiva. A partir do século dezoito, a supremacia dos Elementos foi posta em cheque por grandes matemáticos da época, os quais, em última análise, procuraram aperfeiçoar o raciocínio contido na obra, especificamente em uma das propriedades aceitas como verdadeira, o postulado V, que será visto após. Em meados do século dezenove, verificou-se que o raciocínio empregado nos Elementos não era de todo correto, com o surgimento de outras geometrias (não euclidianas), bem como com o desenvolvimento da lógica matemática. Apesar disso, não resta dúvidas acerca da importância desse livro monumental como um verdadeiro marco na história da matemática.

1.2) NOÇÕES (IDÉIAS) PRIMITIVAS

Perguntando-se a um bom professor de matemática o que é um triângulo, por exemplo, é possível obter-se a seguinte resposta:

"Dados três pontos não colineares, um triângulo é a união dos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos".

Seria absolutamente natural (e necessário) o surgimento de dúvidas na forma de "sub-perguntas", tais como:

- O que é um ponto?
- O que são pontos colineares?
- O que é um segmento de reta?

O mesmo professor, interessado, provavelmente responderia:

- Pontos colineares são aqueles que compartilham uma mesma reta, ou ainda, aqueles que estão alinhados.
- Segmento de reta é uma porção, parte ou subconjunto de uma reta, de modo que certos pontos (interiores) estejam entre outros dois (extremidades).

Natural ainda seria o prolongamento das dúvidas, como, por exemplo:

- O que é uma reta?

Alguns professores respondem a essa questão do seguinte modo:

- Reta é um conjunto de pontos.

Uma circunferência, todavia, também é um conjunto de pontos, não correspondendo, porém, à noção usual que se possui de reta. É possível que alguém acrescente a palavra *alinhados* após o termo "pontos", tentando elucidar a questão. No entanto, extraindo prefixo e sufixo de alinhados, resta o radical *linha*, que nada mais é do que um sinônimo de reta no contexto. Ou seja, "definiu-se" reta por meio de outras palavras que levam à original: reta.

Ora, **definir** quer dizer dar significado a termos por meio de outros termos, supostos conhecidos previamente, com total segurança. No processo de definições dos termos relacionados a um certo assunto, podem ocorrer somente três casos:

a) Define-se, *sempre*, um termo por meio de um termo novo. Isso, contudo, gera logo uma impossibilidade humana: a necessidade de uma quantidade sem fim de novas palavras. Existe algum dicionário com infinitos vocábulos? É claro que não. Daí, esse primeiro caso deve ser excluída, por tratar-se, realmente, de uma impossibilidade.

b) Utilizam-se definições *cíclicas*, isto é, o processo volta a uma palavra que já foi utilizada anteriormente. Por exemplo, ao se procurar o significado do termo hermenêutica, pode-se encontrar a seguinte seqüência de sinônimos:

   Hermenêutica → interpretação → explicação → explanação → explicação.

   O que ocorre, assim, é que explicação é definida, em última análise, por meio da mesma palavra, explicação. Isso, entretanto, não pode ser utilizado como uma definição rigorosa, no sentido matemático dado ao termo definir.

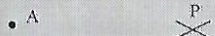
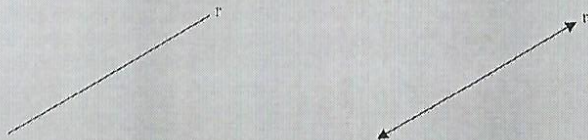
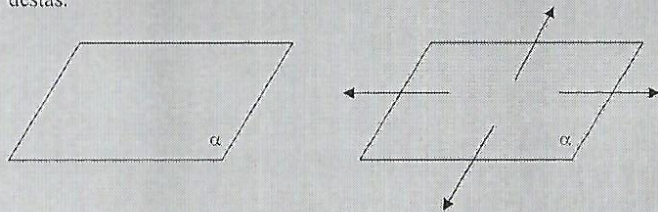
c) Aceitam-se alguns termos sem definição formal, os quais servirão para definir, formalmente, todos os demais termos seguintes. Nesta opção, deve-se admitir que os termos não definidos têm seu significado claro a um maior número possível de pessoas, que o absorveram através da experiência de vida, da observação, do senso comum.

A matemática, num estudo axiomático de uma determinada teoria, adota a última das três posturas apresentadas, por não haver melhor. Desse modo, admite-se a menor quantidade possível de conceitos elementares sem definição, de forma a poder definir todos os demais conceitos. Essa posição ideológica já era utilizada por Euclides, nos seus Elementos, e é uma das principais conquistas do pensamento humano.

Surgem, assim, as **noções primitivas**, que são aqueles termos admitidos sem definição, mas que terão uso bem limitado por certas regras (os postulados, a serem vistos mais tarde).

As noções primitivas inicialmente adotadas neste curso são:

1. PONTO: representado por letras maiúsculas do nosso alfabeto: A, B, C, P, Q, etc. Apesar de não servir como definição, Euclides dizia que "ponto é algo que não pode ser dividido nas suas partes". Essa frase ajuda a aguçar a intuição, mas não serve matematicamente falando por introduzir termos como "ser dividido" e "partes". É importante a idéia de que um ponto não possui dimensão ("tamanho"). Pode-se ainda concebê-lo como ente formador dos demais entes geométricos, uma espécie de *átomo geométrico*, no sentido original da palavra (INDIVISÍVEL).

• A P

2. RETA: representado por letras minúsculas do alfabeto: r, s, t, etc. Na concepção comum, inclusive a adotada nestas linhas, uma reta pode ser vista como uma das margens de uma longa (teoricamente, infinita) estrada sem curvas. Nada que se possa visualizar por completo, porém, é capaz de representar perfeitamente uma reta, já que ela deve ser entendida como **ilimitada**, isto é, que pode ser percorrida indefinidamente, e **infinita**, ou seja, partindo de um de seus pontos, sempre num mesmo sentido de percurso, nunca mais se volta ao mesmo lugar. Por isso, às vezes, há certa preferência em representá-la com setas duplas, indicando a continuidade nos seus dois sentidos.

3. PLANO: representado, em geral, por letras gregas minúsculas: α, β, π, etc. É interessante perceber a relação que existe entre plano e expressões como: terreno *plano* (sem buracos ou elevações); *planícies* (no mesmo sentido); *aplainar* (ou aplanar), que é tornar uma superfície lisa, como o que um pedreiro faz após rebocar uma parede, por exemplo. Também é usual, mas não obrigatório, utilizar um retângulo (ou outra figura, como um triângulo) em perspectiva (vista tridimensional) para visualizar um plano. É importante notar que há várias representações de planos ao redor: o plano do quadro, o plano do chão, o do teto, o do papel, dentre outros. Entretanto, é fundamental ter em mente que nenhuma dessas representações é perfeita, uma vez que, como uma reta, um plano deve ser considerado **ilimitado**, sem fronteiras ou bordas, e **infinito**, podendo se prolongado em duas direções ou em composições destas.

OBSERVAÇÃO: Define-se ESPAÇO como o conjunto de todos os pontos.

1.2.1) Proposições

Uma proposição é qualquer *afirmação* que se faça acerca de propriedades envolvendo um ente, geométrico ou não.

As proposições funcionam como reguladores das propriedades do objeto em estudo. Após conceitos e definições, são as proposições que vão edificando o desenvolvimento de determinada ciência.

Classificam-se as proposições matemáticas de dois modos:

1.2.1.1) Proposições Primitivas

Também denominadas **postulados** ou **axiomas** (apesar de Euclides, originalmente, fazer distinção entre esses dois termos, o que não será feito aqui), daí o nome do estudo feito aqui ser axiomático. As proposições primitivas são aquelas aceitas como verdades intuitivas, absolutas, sem necessidade de um processo justificativo encadeado, rigoroso e lógico, matematicamente chamado de **demonstração**.

A priori, pode parecer conflitante defender inicialmente uma posição contrária à aceitação passiva de propriedades e em seguida afirmar que algumas propriedades devem ser realmente aceitas de modo peremptório. Para alguns, menos experientes, parece muito estranho a Matemática, uma ciência exata, aceitar alguns (mas não todos os) fatos, por mais básicos que sejam. Tal contradição aparente some, contudo, ao analisar-se criteriosamente o método axiomático. Assim como ocorreu no tocante às definições, a idéia é justificar a maior quantidade de fatos possível. De que maneira se faz isso, porém? Através de outros fatos, cujas verdades já foram verificadas antes. E assim sucessivamente. Mas, desse modo, a única saída aceitável é admitir alguns fatos sem justificativa formal, em menor quantidade possível, que servirão como ponto de partida da longa estrada de demonstrações de propriedades. As outras duas maneiras de encarar a situação, como se viu antes, são matematicamente impraticáveis. Não convém criar, eternamente, resultados anteriores, nem muito menos utilizar a propriedade que se quer demonstrar para provar a si mesma.

Agora, fica mais fácil compreender que o conjunto de propriedades elementares, admitidas sem prova formal, é imprescindível. Mais que isso, deve-se ter em mente que a escolha de um tal conjunto pode até ser arbitrária. Historicamente, a decisão de utilizar os postulados adotados por Euclides foi motivo de muitas discussões, até que eles foram aprimorados no fim do século dezenove e começo do século vinte, por grandes matemáticos, destacando-se Hilbert. Apesar das conclusões posteriores de incompleteza ou de inconsistência de Gödel, o que se utiliza hoje ainda tem suas bases nos trabalhos de Euclides e de outros, como do próprio Hilbert e de Pogorélov. Mas isso é outra história...

Alguns dos postulados básicos da geometria são os seguintes:

a) **Postulados de Existência**

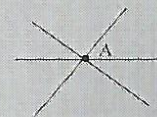
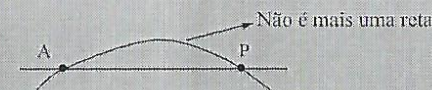
a.1) Numa reta, bem como fora dela, há tantos pontos quanto se queira (não somente um milhão, ou um trilhão, mas sim infinitos pontos).

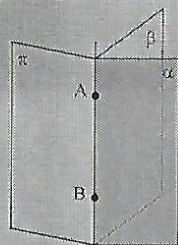
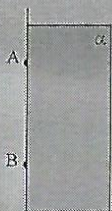
a.2) Num plano, ou fora dele, há infinitos pontos.

Perceba-se que o papel desses postulados é regrar idéias tais quais a reta e o plano são conjuntos infinitos de pontos.

b) **Postulados de Determinação**

Em geometria, DETERMINAR significa a garantia da existência de um único ente, sob certas condições.

b.1) Dois pontos *distintos* determinam uma reta. Isto é, existe uma só reta passando por dois pontos *diferentes* dados.

Por um ponto, parece passar mais de uma reta.

Por dois pontos distintos, passa apenas uma reta.

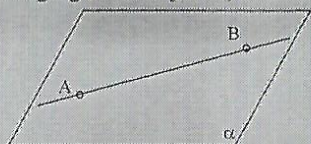
b.2) Três pontos não alinhados (ou ainda, não colineares) determinam um plano.

Por dois pontos distintos, apenas, parece passar mais de um plano, como as várias posições assumidas por uma porta, todas passando pelas dobradiças.

Por três pontos não colineares passa um único plano

OBSERVAÇÃO: Note-se que a palavra distintos está ressaltada, uma vez que, eventualmente e com vistas a generalizações, a idéia de dois (ou mesmo mais que isso) pode significar só um, em Matemática. Um exemplo clássico desse fato aparentemente extraordinário é a resposta mais simples à seguinte pergunta: quantas raízes (complexas) possui uma equação polinomial do segundo grau? A resposta, genérica, é DUAS. Como se sabe, entretanto, às vezes uma equação quadrática apresenta raiz dupla e, nesse caso, as duas raízes "fundem-se" numa só.

Assim, quando se usa uma frase do tipo "dois pontos DIFERENTES determinam uma reta", deseja-se excluir a possibilidade mostrada de que, teoricamente, os dois pontos possam estar representando o mesmo lugar geométrico, isto é, que os pontos sejam coincidentes, na prática um só. Infelizmente, tal tipo de atitude ainda é, hoje em dia, usada por quem deseja fazer perguntas capciosas, que induzem o aluno ao erro. Por isso, deve-se alertar o estudante para tais tipos de estratégias ardilosas.

Apenas complementando, deve-se perceber que quando se fala em três pontos não colineares, elimina-se automaticamente a possibilidade de dois deles serem coincidentes.

c) Postulado de Inclusão

Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então todos os pontos da reta também pertencem ao plano. Em linguagem de conjuntos, a reta estará contida nesse plano.

d) Postulado das Paralelas

Existem várias formulações equivalentes do postulado das paralelas. A considerada mais simples delas é a encontrada no livro escrito pelo matemático escocês John Playfair (1748-1819):

"Por um ponto fora de uma reta não se pode traçar mais que uma reta paralela à reta dada."

O postulado das paralelas também é conhecido como o "5º Postulado de Euclides", exatamente por ocupar a quinta (e última) posição no conjunto dos cinco postulados enunciados no livro *Elementos* de Euclides. Os resultados deste livro aparecem como "proposições" e cada uma são demonstradas utilizando-se somente as proposições anteriores. Assim, acreditava-se que o 5º Postulado de Euclides poderia ser demonstrado a partir dos outros postulados. Durante muitos séculos vários matemáticos dedicaram suas carreiras para tentar demonstrar o postulados das paralelas. O matemático italiano Girolano Saccheri (1667-1733) publicou um artigo no qual (acreditava ter) demonstrado o postulado das

paralelas pelo método de redução ao absurdo. Na verdade, descobriu-se posteriormente que a série de teoremas demonstrados por Saccheri não levava a nenhuma contradição.

O caso mais famoso de tentativa de demonstrar o postulado das paralelas deve-se ao matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Além de ser responsável por resultados importantes na Matemática Pura e Aplicada, Legendre tornou-se bastante conhecido devido a ser autor de um livro de geometria (*Éléments de Géometrie*) que dominou o ensino da geometria por mais de 100 anos e foi traduzido para várias línguas, sendo usado inclusive no Brasil por muitos anos (foi editado 25 vezes!). Nas diversas edições de seu livro de 1794 a 1833 Legendre publicou e republicou suas demonstrações para o postulado das paralelas, sempre reparando seus erros anteriores.

Foi por causa de erros deste tipo que, por volta de 1830, os matemáticos passaram a acreditar que o postulado das paralelas não pudesse ser demonstrado a partir dos outros. Nesta época o matemático húngaro Jánus Boluai (1802-1860) e o russo Nicokolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) publicaram, de forma independente um do outro, trabalhos em que justificavam que se podia construir uma geometria independentemente do postulado das paralelas. É a chamada geometria não-euclidiana, ou seja, geometrias que negam o postulado das paralelas.

1.2.1.2) Teoremas, Leis, Princípios, Lemas, Corolários

São as proposições que só podem, ou antes, só devem ser aceitas mediante a justificativa matemática já citada previamente: a **demonstração**.

Exemplos:

1) Provar que duas retas distintas não podem ter mais de um ponto em comum.

Solução:

HIPÓTESE: $r \neq s$; A e B $\in r \cap s$ (perceba-se que esta não é o único modo de formular a hipótese. É, porém, um dos mais eficientes).

TESE: A = B

Deseja-se provar que, havendo mais de um ponto comum às retas distintas r e s, tais pontos devem ser, em verdade, um só.

Suponha-se, entretanto, que A e B fossem distintos. Não há problema em fazer isso, já que, a esta altura, ainda não se demonstrou a tese. O que não se pode é contrariar, em detalhe algum, a hipótese.

Se A e B forem diferentes, sabe-se, devido ao postulado de determinação, que haveria uma única reta passando por eles. Como tanto A quanto B pertencem a r e a s, a única saída é impor que r = s. Isso, contudo, contraria a hipótese, já que $r \neq s$ é um dos pontos de partida para a afirmação. De onde surgiu tal contrariedade? Do postulado de determinação? Com certeza, NÃO! O impasse é oriundo exclusivamente do fato de supor que $A \neq B$. Assim, tal fato **jamais pode ocorrer juntamente com a hipótese**, o que garante que A = B, como se queria demonstrar.

2) Uma reta não contida num plano não pode ter mais de um ponto em comum com tal plano.

Solução:

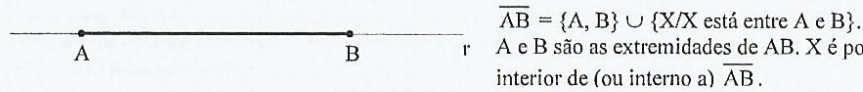
HIPÓTESE: $r \not\subset \alpha$; A, B $\in r \cap \alpha$.

TESE: A = B

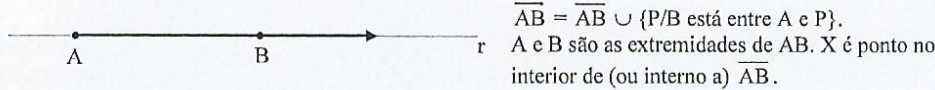
Suponha-se, por absurdo, que $A \neq B$. Se uma reta r possui dois de seus pontos distintos num plano α, então ela deve ter todos os pontos em tal plano, ou seja, $r \subset \alpha$. É aceitável que $r \not\subset \alpha$ e que $r \subset \alpha$, simultaneamente? É óbvio que não. O que deve ser descartado, por conseguinte? A hipótese ou algo que conclui após negar a tese? A segunda opção é a única passível de aceitação, já que a hipótese é inalterável. Logo, a tese não pode ser contrariada, isto é, a tese DEVE SER VERDADEIRA, e o teorema está demonstrado.

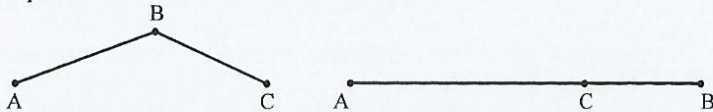
1.3) LINHAS

1.3.1) Segmento de Reta: Seja r a reta que passa por dois pontos distintos A e B. Defini-se segmento de reta como a reunião dos pontos pertencentes à reta r e que estão entre A e B, incluindo estes dois pontos. Deste modo, dados dois pontos distintos A e B, o segmento de reta $\overline{AB}$ é representado da forma abaixo.

$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X/X \text{ está entre A e B}\}$.
A e B são as extremidades de AB. X é ponto no interior de (ou interno a) $\overline{AB}$.

Define-se, também, segmento nulo (ou degenerado), no caso que A e B coincidem.
Obs: "Estar entre dois pontos" é uma noção primitiva que não será detalhada aqui.

1.3.2) Semi-reta: Dados dois pontos distintos A e B, define-se a semi-reta $\overrightarrow{AB}$ como a reunião do segmento de reta $\overline{AB}$ com o conjunto dos pontos P, pertencentes à reta que passa por A e B, tais que B está entre A e P. Neste caso, o ponto A é designado como origem da semi-reta.
A representação geométrica de uma semi-reta é a seguinte:

$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{P/B \text{ está entre A e P}\}$.
A e B são as extremidades de AB. X é ponto no interior de (ou interno a) $\overline{AB}$.

1.3.2.1) Semi-retas opostas: Se A está entre B e C, as semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas.

1.3.3) Segmentos Consecutivos: Dois segmentos de retas são consecutivos quando uma extremidade de um coincide com uma extremidade do outro.
Exemplos:

Nestas duas figuras temos que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são segmentos de reta consecutivos

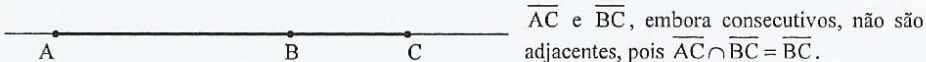
1.3.4) Segmentos Colineares: Dois segmentos de reta são colineares quando estão sobre uma mesma reta. Por exemplo:

A B C D

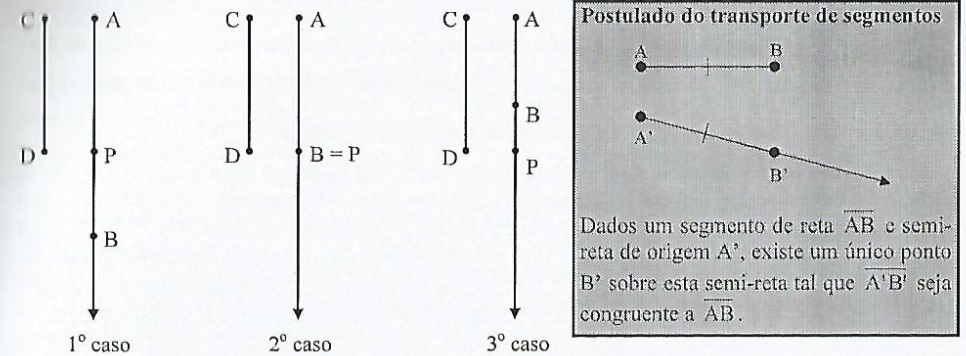
$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos de reta colineares.

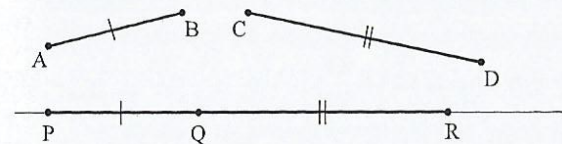
1.3.5) Segmentos Adjacentes: Dois segmentos de retas consecutivos e colineares são adjacentes se possuem em comum somente uma extremidade.
Por exemplo, na figura abaixo $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são segmentos de reta adjacentes.

A B C

$\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, embora consecutivos, não são adjacentes, pois $\overline{AC} \cap \overline{BC} = \overline{BC}$.

1.3.6) Congruência de segmentos: A congruência (simbolizada por ≡) de segmentos é uma noção primitiva dentro da geometria plana que obedece aos seguintes postulados:

i) Reflexiva: $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$;
ii) Simétrica: Se $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$;
iii) Transitiva: Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$ então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$.

1.3.7) Comparação de Segmentos: Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, podemos obter na semi-reta $\overrightarrow{AB}$ um ponto P tal que $\overline{AP} \equiv \overline{CD}$. Temos três casos a considerar:

No 1° caso, como o ponto P está entre A e B, temos que $\overline{AB} > \overline{CD}$.
No 2° caso, como P e B coincidem, então $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.
No 3° caso, como B está entre A e P, afirmamos que $\overline{AB} < \overline{CD}$.

1.3.8) Adição de Segmentos de Reta: Dados dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, constrói-se sobre uma reta r qualquer o *segmento soma* de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ tomando-se sobre r os pontos P, Q e R de modo que $\overline{PQ} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{QR} \equiv \overline{CD}$, como ilustrado abaixo. O segmento de reta $\overline{PR}$ é, por definição, o *segmento soma* de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Assim, diz-se que $\overline{PR} = \overline{AB} + \overline{CD}$

1.3.9) Medida de um Segmento de Reta: A todo segmento de reta (não-nulo) associa-se um número real positivo, denominado medida (ou comprimento), que satisfaz, por definição, as propriedades seguintes:

i) Dois segmentos de reta são congruentes se, e somente se, possuem igual medida;
ii) Um segmento de reta é maior que outro se, e somente se, sua medida é maior que a deste outro;
iii) Um segmento que é soma de dois segmentos possui medida igual à soma das medidas destes dois segmentos.

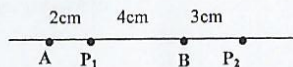
Para a determinação do número que fornece a medida de um segmento de reta $\overline{AB}$ deve-se calcular a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{UV}}$, em que $\overline{UV}$ é tomado como sendo o segmento de reta que possui comprimento igual a um.

1.4) DIVISÃO DE SEGMENTOS: DIVISÕES HARMÔNICA E ÁUREA

1.4.1) Definições

Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta, não nulo. Considere-se um ponto sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, distinto de A e de B. Diz-se então que P divide $\overline{AB}$ na razão $K = \frac{PA}{PB}$, denominada razão de divisão (ou de secção). Se P pertence a $\overline{AB}$, a divisão é interna. Senão, a divisão é dita externa. Exemplos:

2cm 4cm 3cm

A P_1 B P_2

P_1 divide internamente $\overline{AB}$ na razão $\frac{P_1A}{P_1B} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

P_2 divide externamente $\overline{AB}$ na razão $\frac{P_2A}{P_2B} = \frac{9}{3} = 3$

Além das divisões supra indicadas, há várias outras. Como exemplo, A divide externamente BP_2, segundo a razão $\frac{AB}{AP_2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, a qual pode ser ainda indicada por 2:3 (lê-se "dois para três). Quando um ponto M divide um segmento $\overline{AB}$ de modo que $\overline{AP} = \overline{PB}$, então denomina-se M ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$.

Observação: Apesar de não se adotar tal postura aqui, a definição mais geral de divisão de um segmento por um ponto exige que se adote o conceito de segmento orientado (vetor). Entretanto, essa idéia será adotada implicitamente, quando for afirmado, no exemplo anterior, que A divide externamente $\overline{BP_2}$ na razão 2:3, enquanto A divide externamente $\overline{P_2B}$ na razão 3:2 $\left(= \frac{AP_2}{AB}\right)$.

Vetorialmente falando, admitem-se razões negativas (se, e somente se, a divisão for interna). Neste texto, porém, considerar-se-ão apenas razões de divisão positivas.

1.4.1.2) Teorema: Dados um segmento qualquer $\overline{AB}$ (não nulo) e um número real positivo K≠1, existem exatamente dois pontos que dividem $\overline{AB}$ na razão K, sendo um dos pontos interno e outro externo.

Demonstração:

A P' P B

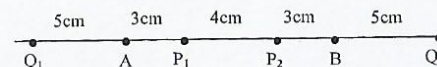
Seja P um ponto do interior de $\overline{AB}$, tal que $\frac{PA}{PB} = K \neq 1$. Se P' for também um ponto do interior de $\overline{AB}$, de modo que $\frac{P'A}{P'B} = K$, suponha-se, para fixar idéias, que P'A < PA. Daí: $\frac{PA}{PB} = \frac{P'A}{P'B} \Leftrightarrow \frac{P'P + P'A}{P'B - P'P} = \frac{P'A}{P'B} \Leftrightarrow P'P \,.\, P'B + P'A \,.\, P'B = P'A \,.\, P'B - P'P \,.\, P'A \Leftrightarrow$ $P'P \,.\, (P'B + P'A) = 0 \Leftrightarrow P'P \,.\, AB = 0 \overset{AB \neq 0}{\Longleftrightarrow} P'P = 0 \Leftrightarrow P' = P$, o que seria um absurdo, admitindo P'A < PA.

De modo inteiramente análogo, é fácil provar que o caso P'A > PA também gera uma contradição. Portanto, deve-se ter P'A = PA, o que acontece, para P e P' no interior de $\overline{AB}$, se, e somente se, P' = P. Logo, há um único ponto que divide $\overline{AB}$, internamente, na razão K.

A demonstração no caso em que o ponto é externo é inteiramente análoga e fica como exercício.

Observação:

5cm 3cm 4cm 3cm 5cm

Q_1 A P_1 P_2 B Q_2

P_1 é o único ponto que divide internamente $\overline{AB}$ na razão 3:7.

Note-se que P_2 divide internamente $\overline{AB}$ na razão 7:3, igual a $\frac{P_2A}{P_2B}$, e não a $\frac{P_2B}{P_2A}$.

Similarmente, Q_1 e Q_2 são os únicos pontos que dividem externamente $\overline{AB}$ na razão 1:3 e 3:1, nesta ordem. É importante notar que, orientando um segmento existe um único ponto interno e um único ponto externo que o dividem numa razão pré-fixada.

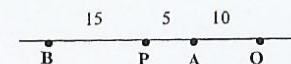
1.4.2) Divisão Harmônica: Sejam P e Q pontos respectivamente do interior e do exterior de um segmento $\overline{AB}$. Diz-se que P e Q dividem harmonicamente $\overline{AB}$ quando o dividem interna e externamente na mesma razão, isto é, quando $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = K$.

É também usual dizer que P e Q são conjugados harmônicos de $\overline{AB}$, segundo a razão K, e que a divisão realizada por eles em $\overline{AB}$ é harmônica.

Exemplos:

1) Determine a razão com que A e B dividem o segmento PQ:

15 5 10

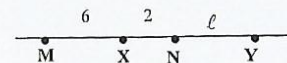
B P A Q

Solução:

P e Q dividem interna e externamente $\overline{AB}$ sob mesma razão, isto é:

$\frac{PA}{PB} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ e $\frac{QA}{QB} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = \frac{1}{3}$, o que significa que P e Q dividem harmonicamente $\overline{AB}$ na razão 1:3.

2)

6 2 ℓ

M X N Y

Qual deve ser o valor de ℓ, na figura, de modo que M e N dividam $\overline{XY}$ harmonicamente?

Solução:

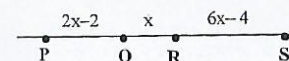
Deve-se impor que: $\frac{MX}{MY} = \frac{NX}{NY} \Leftrightarrow \frac{6}{\ell + 8} = \frac{2}{\ell} \Leftrightarrow \ell = 4$

Note-se que, nesta situação, M e N dividem $\overline{XY}$ harmonicamente na razão $K = \frac{1}{2}\left(= \frac{MX}{MY} = \frac{NX}{NY}\right)$.

É interessante perceber que, como $\frac{XM}{XN} = \frac{6}{2} = 3$ e $\frac{YM}{YN} = \frac{12}{4} = 3$, os pontos X e Y também dividem $\overline{MN}$ harmonicamente, só que segundo outra razão: K'=3.

3) Determinar x de modo que, na figura a seguir, Q e S dividam harmonicamente $\overline{PR}$.

2x–2 x 6x–4

P Q R S

Solução:

Deve-se ter: $\dfrac{QR}{QP}=\dfrac{SR}{SP} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2x-2}=\dfrac{6x-4}{9x-6} \Leftrightarrow 9x^2-6x=12x^2-20x+8 \Leftrightarrow 3x^2-14x+8=0$

Resolvendo, obtém-se: $x = 4$ ou $x = \dfrac{2}{3}$. Note-se, porém, que $x = \dfrac{2}{3}$ não convém, pois, aconteceriam: $PQ=-\dfrac{2}{3}$ e $RS = 0$. Logo, $x = 4$ e portanto $k=\dfrac{QS}{QP}=\dfrac{SR}{SP}=\dfrac{4}{6}=2:3$.

Novamente, é fácil ver aqui que R e P também dividem $\overline{QS}$ harmonicamente, só que na razão $K'=\dfrac{RQ}{RS}=\dfrac{PQ}{PS}=\dfrac{1}{5}\neq k=2:3$.

1.4.3) Teoremas Básicos

1.4.3.1) Se P e Q dividem harmonicamente $\overline{AB}$ segundo uma razão $K \neq 1$, então A e B dividem harmonicamente $\overline{PQ}$, numa razão K', tal que: $K'=\dfrac{|K-1|}{|K+1|}$.

Demonstração:

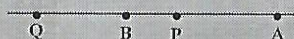
Suponha-se que $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{QA}{QB}=K$. Então: $\dfrac{AP}{AQ}=\dfrac{BP}{BQ}=K'$, o que mostra que A e B dividem $\overline{PQ}$ harmonicamente.

Se $K > 1$, então ocorre a configuração acima. Daí:

$PA = K.PB$ e $QA = K.QB \Rightarrow QB + BP + K.PB = K.QB \Rightarrow QB(K-1) = PB(K+1) \overset{K\neq1}{\Leftrightarrow} \dfrac{PB}{QB}=K'=\dfrac{K-1}{K+1}$.

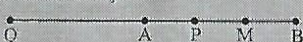
No caso em que $0 < K < 1$, fica como exercício provar que $K'=\dfrac{1-K}{K+1}$.

Portanto, $\forall K \neq 1$ tem-se: $K'=\left|\dfrac{1-K}{K+1}\right|=\left|\dfrac{K-1}{K+1}\right|$.

Q B P A

Observação: O caso em que K = 1 significa que um dos conjugados harmônicos (o interno) é o ponto médio do segmento. O outro conjugado (externo) é um ponto impróprio (infinitamente afastado sobre a reta suporte do segmento).

1.4.3.2) Sendo M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, o qual está dividido interna e externamente pelos pontos P e Q, tem-se que tal divisão é harmônica se, e somente se, $PM \cdot QM = AM \cdot BM = \dfrac{AB^2}{4}$.

Demonstração:

Q A P M B

Suponha-se que $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{QA}{QB}$. Sem perda de generalidade, tome-se a razão de divisão menor que 1.

Daí: $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{QA}{QB} \Leftrightarrow \dfrac{AM-PM}{BM+PM}=\dfrac{QM-AM}{QM+BM} \Leftrightarrow$

$AM.QM + AM.BM - PM.QM - PM.BM = BM.QM - BM.AM + PM.QM - PM.AM \underset{AM=BM}{\Leftrightarrow}$

$2.PM.QM = 2.AM.BM \underset{AM=BM=\frac{AB}{2}}{\Leftrightarrow} PM.QM = AM.BM = \dfrac{AB^2}{4}$.

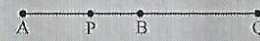
A volta segue o caminho inverso e fica como exercício.

1.4.3.3) Sendo $AB = \ell$ e $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{QA}{QB}=K \neq 1$, em que P e Q dividem harmonicamente $\overline{AB}$, então a distância entre os conjugados é $PQ=\dfrac{2K}{|1-K^2|}.\ell$

Demonstração:

Suponha-se $K > 1$.

A P B Q

Inicialmente, pelo item 1.4.3.1, temos que $BQ = PB\left(\dfrac{1+K}{K-1}\right)$.

Além disso: $AB = PB + PA = PB + K.PB = PB(1+K)$.

Então: $PQ = PB + BQ = PB + PB\left(\dfrac{1+K}{K-1}\right)=\dfrac{2K}{K-1}.PB=\dfrac{2K}{K-1}.\dfrac{AB}{1+K} \Leftrightarrow PQ=\dfrac{2K}{K^2-1}.\ell$.

O caso em que $0 < K < 1$ produz: $PQ=\dfrac{2K}{1-K^2}.\ell$. Assim, em qualquer situação: $PQ=\dfrac{2K}{|1-k^2|}.\ell$.

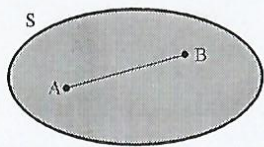
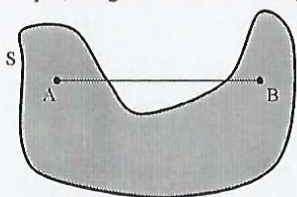
1.4.3.4) Divisão Áurea: Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta. Diz-se que um de seus pontos internos P o divide auricamente quando: $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{PB}{AB}\left(\text{ou } \dfrac{PB}{PA}=\dfrac{PA}{AB}\right)$. Nestas condições, P é denominado ponto de ouro (ou áureo) de $\overline{AB}$. Tem-se ainda que PB (ou PA) é o segmento áureo de $\overline{AB}$.

$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{PB}{AB}$ $\qquad$ $\dfrac{PB}{PA}=\dfrac{PA}{AB}$

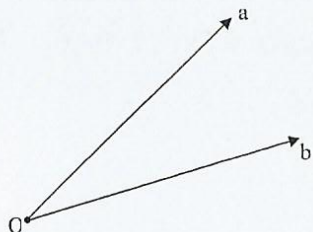
Note-se que, em qualquer caso, o segmento áureo é a média geométrica entre o segmento dado ($\overline{AB}$) e a diferença deste e o segmento áureo. Isto é, sendo $AB = \ell$, a medida x de um de seus segmentos áureos será tal que: $\dfrac{\ell-x}{x}=\dfrac{x}{\ell} \Leftrightarrow x^2=\ell.(\ell-x)$

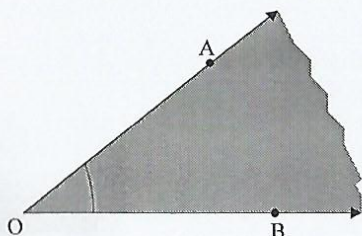
Logo: $x^2+\ell.x-\ell^2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-\ell\pm\ell\sqrt{5}}{2}$. Descartando a medida negativa $x=\ell.\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

1.5) CONVEXIDADE E CONCAVIDADE

1.5.1) Região Convexa: Uma região S é denominada de *região convexa* se, e somente se, para quaisquer pontos distintos A e B de S o segmento de reta $\overline{AB}$ está completamente contido em S.
Por exemplo, a região abaixo é uma região convexa:

1.5.2) Região Côncava: Uma região S é denominada de *região côncava* se, e somente se, existem dois pontos distintos A e B de S de modo que o segmento de reta $\overline{AB}$ não está completamente contido em S.
Por exemplo, a região abaixo é uma região côncava:

1.6) ÂNGULOS

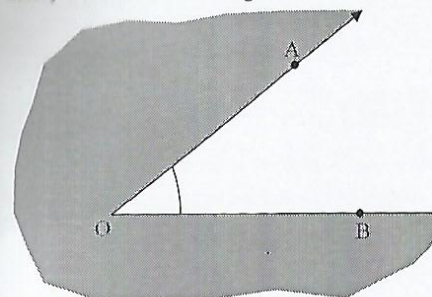
1.6.1) Definição

Dadas duas semi-retas de mesma origem, denomina-se ângulo (geométrico) a união dessas semi-retas. Os lados do ângulo são tais semi-retas e o vértice do ângulo é a origem comum aos seus lados.

Ângulo de vértice em O e de lados $\overrightarrow{Oa}$ e $\overrightarrow{Ob}$: $a\hat{O}b$ ou $\angle aOb$ ou, caso não haja motivo para confusão, simplesmente $\hat{O}$.

1.6.2) Interior de um Ângulo

Os pontos da região hachurada definem o interior do um ângulo $A\hat{O}B$.

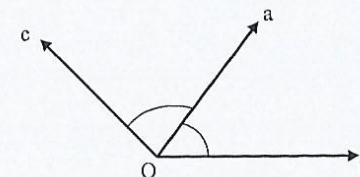
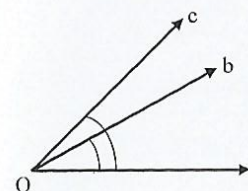
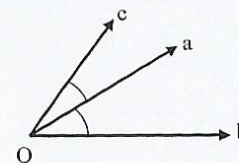
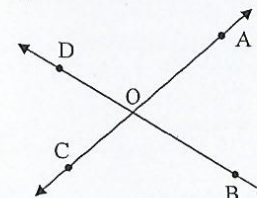
O interior de ângulo é uma região convexa.

Os pontos do interior de um ângulo são denominados de *pontos internos* ao ângulo.

1.6.3) Exterior de um Ângulo

Os pontos da região hachurada definem o exterior do ângulo $A\hat{O}B$.

O exterior do ângulo é uma região côncava.

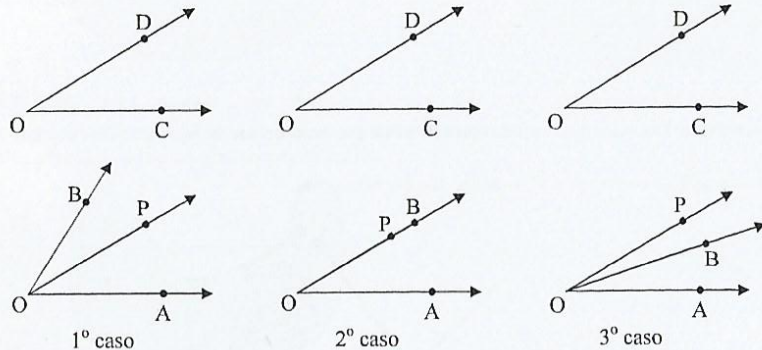
Os pontos do exterior de um ângulo são denominados de *pontos externos* ao ângulo.

1.6.4) Ângulos Consecutivos: Dois ângulos são consecutivos se um lado de um deles coincide com um lado do outro.
Por exemplo, nas figuras seguinte os ângulos $a\hat{O}b$ e $a\hat{O}c$ são consecutivos.

1.6.5) Ângulos Adjacentes: Dois ângulos são adjacentes se e somente se são consecutivos e não possuem pontos internos comuns.
Na figura abaixo os ângulos $a\hat{O}b$ e $a\hat{O}c$ são adjacentes.

1.6.6) Ângulos Opostos Pelo Vértice: Dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um são as respectivas semi-retas opostas aos lados do outro.
Por exemplo, na figura temos que as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ são opostas, bem como as semi-retas $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ também são opostas. Tem-se então que $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são ângulos opostos pelo vértice, da mesma forma que $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ também são opostos pelo vértice.

1.6.7) Congruência de Ângulos: A congruência (simbolizada por ≡) de ângulos é uma noção primitiva dentro da geometria plana que obedece aos seguintes postulados:

i) Reflexiva: AÔB ≡ AÔB;

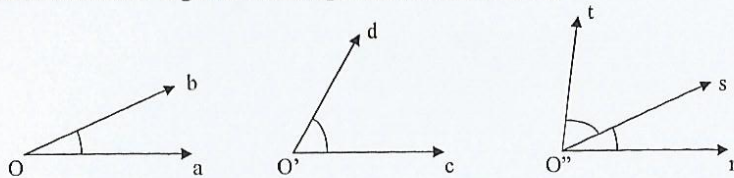
ii) Simétrica: Se AÔB ≡ CÔ'D então CÔ'D ≡ AÔB;

iii) Transitiva: Se AÔB ≡ CÔ'D e CÔ'D ≡ EÔ"F então AÔB ≡ EÔ"F.

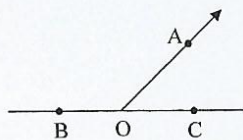
1.6.8) Comparação de Ângulos: Dados dois ângulos AÔB e CÔ'D, pode-se obter no semi-plano com origem em $\overleftrightarrow{OA}$ e que contém B uma semi-reta $\overrightarrow{OP}$ tal que AÔP ≡ CÔ'D. Temos três casos:

No 1º caso, como o ponto P está no interior de AÔB, temos que AÔB > CÔD.

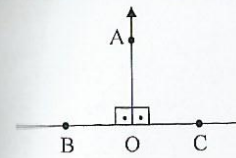
No 2º caso, como P e B pertencem à mesma semi-reta, então AÔB ≡CÔ'D.

No 3º caso, como B está no exterior do ângulo AÔB, temos AÔB < CÔ'D.

1.6.9) Adição de Ângulos: Dados dois ângulos aÔb e cÔ'd, constrói-se o *ângulo soma* de aÔb e cÔ'd tomando-se dois ângulos adjacentes rÔ"s e sÔ"t, de modo que aÔb ≡ rÔ"s e cÔ'd ≡ sÔ"t, como ilustrado abaixo. O ângulo rÔ"t é o ângulo soma de aÔb e cÔ'd.

Assim, dizemos que rÔ"t = aÔb + cÔ'd.

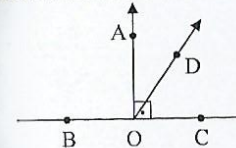
1.6.10) Definições de Ângulo Reto, Ângulo Agudo, Ângulo Obtuso e Ângulos Suplementares

1.6.10.1) Ângulos Suplementares: Dado o ângulo AÔC, a semi-reta $\overrightarrow{OB}$ oposta à semi-reta $\overrightarrow{OC}$ e a semi-reta $\overrightarrow{OA}$ determinam um ângulo AÔB denominado *ângulo suplementar adjacente* de AÔC.

Na figura, AÔC e AÔB são denominados ângulos suplementares.

1.6.10.2) Ângulo Reto: Quando uma semi-reta, com origem pertencente à outra linha reta, fizer com esta dois ângulos adjacentes suplementares congruentes, cada um destes ângulos iguais se chama ângulo reto; e a semi-reta incidente se diz perpendicular á outra reta.

Na figura, se AÔB = AÔC diz-se que tanto AÔB quanto AÔC são ângulos retos.

O ponto O é também denominado de projeção do ponto A sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são perpendiculares (simbolicamente $\overrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{BC}$).

1.6.10.3) Ângulos Complementares: Dois ângulos são complementares se, e somente se, a soma de suas medidas é 90°. Um deles é o complemento do outro.

Na figura, AÔD e DÔC são denominados ângulos complementares.

1.6.10.4) Ângulo Agudo: Ângulo agudo é aquele que é menor que um ângulo reto.

1.6.10.5) Ângulo Obtuso: Ângulo obtuso é aquele que é maior que um ângulo reto.

1.6.11) Medida de um ângulo: A todo ângulo associaremos um número real positivo, denominado medida (ou comprimento), que satisfaz:

i) Dois ângulos são congruentes se e somente possuem igual medida;

ii) Um ângulo é maior que outro se e somente se sua medida é maior que a deste outro;

iii) Um ângulo é soma de outros dois ângulos se possui medida igual é soma das medidas destes dois ângulos.

1.6.12) Unidade de Medida

1.6.12.1) Grau: Um ângulo de *um grau* (simbolizado por 1°) equivale a $\frac{1}{90}$ de um ângulo reto.

Assim, um ângulo reto vale 90°, enquanto que um ângulo agudo é menor que 90° e um ângulo obtuso é maior que 90°.

1.6.12.2) Minuto: Um ângulo de um minuto (simbolizado por 1') equivale a $\frac{1}{60}$ de um grau.

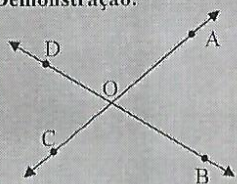
Portanto temos a relação $1' = \frac{1^{\circ}}{60}$ ou 60' = 1°.

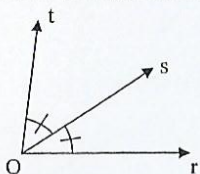
1.6.12.3) Segundo: Um ângulo de um segundo (simbolizado por 1") equivale a $\frac{1}{60}$ de um minuto.

Desta forma, temos a relação $1'' = \frac{1'}{60}$ ou 60" = 1'.

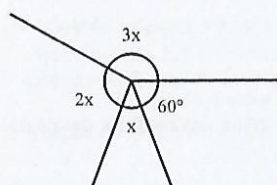
Pelo que foi exposto até então, a variação da medida de um ângulo α qualquer é tal que 0° < α < 180°. Entretanto, pode-se estender a definição de ângulo para α = 0°, denominado *ângulo nulo* (ocorre quando as semi-retas que compõe o ângulo coincidem) e também para α = 180°, denominado *ângulo raso* (ocorre quando as semi-retas que compõe o ângulo são opostas).

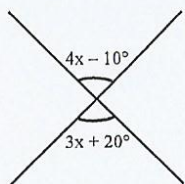
1.6.13) Teorema: Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

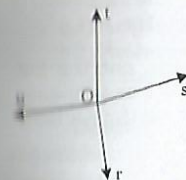
Demonstração:

Observando os ângulos rasos existentes:
$A\hat{O}B + D\hat{O}A = 180^\circ$ e $C\hat{O}D + D\hat{O}A = 180^\circ$.
Subtraindo estas equações obtém-se: $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$.

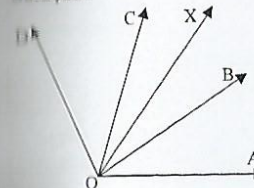
1.6.14) Bissetriz:
Observe-se a figura abaixo

Diz-se que a semi-reta $\overrightarrow{Os}$ é bissetriz de $r\hat{O}t$ quando os ângulos $r\hat{O}s$ e $t\hat{O}s$ possuem igual medida, ou seja, $r\hat{O}s \equiv t\hat{O}s$.
Denomina-se $\overrightarrow{Os}$ de semi-reta bissetriz do ângulo $r\hat{O}t$.

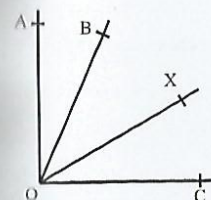
Exemplos:

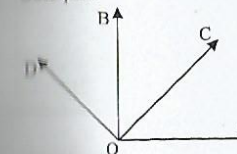
1) Calcule x na figura abaixo

Solução:
Claramente: $3x + 2x + x + 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow 6x = 300^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$.

2) Calcule x na figura abaixo

Solução:
Como os dois ângulos destacados são opostos pelo vértice: $4x - 10^\circ = 3x + 20^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$.

3) Quatro semi-retas de um plano têm a mesma origem e decompõe o plano em quatro ângulos consecutivos, tais que o primeiro é igual ao terceiro e segundo é igual ao quarto. Demonstrar que essas semi-retas são duas a duas opostas.
Solução:

De acordo com o enunciado $r\hat{O}s = t\hat{O}u$ e $u\hat{O}r = s\hat{O}t$.
Assim: $r\hat{O}s + t\hat{O}u + u\hat{O}r + s\hat{O}t = 360^\circ \Rightarrow 2(r\hat{O}s + s\hat{O}t) = 360^\circ \Rightarrow$
$r\hat{O}s + s\hat{O}t = 180^\circ \Rightarrow$ as semi-retas $\overrightarrow{Or}$ e $\overrightarrow{Ot}$ são opostas.
Analogamente, $t\hat{O}u + u\hat{O}r = 180^\circ \Rightarrow$ as semi-retas $\overrightarrow{Os}$ e $\overrightarrow{Ou}$ são opostas.

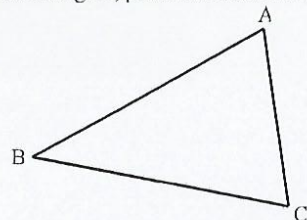
4) $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$ são três ângulos consecutivos iguais. Demonstrar que a bissetriz do ângulo $B\hat{O}C$ também é bissetriz do ângulo $A\hat{O}D$.
Solução:

Sejam $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = \theta$.
Assim: $A\hat{O}X = A\hat{O}B + B\hat{O}X = \theta + \theta/2 = 3\theta/2$.
De modo análogo: $X\hat{O}D = X\hat{O}C + C\hat{O}D = \theta/2 + \theta = 3\theta/2$
Logo: $A\hat{O}X = X\hat{O}D$ e assim conclui-se que $\overrightarrow{OX}$ é bissetriz de $A\hat{O}D$.

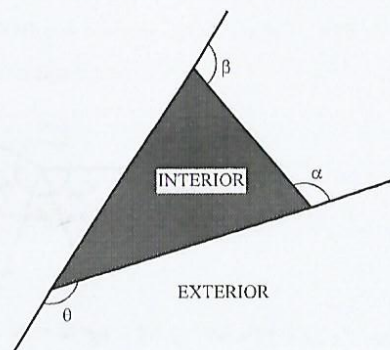
5) Na figura $A\hat{O}C$ é um ângulo reto e OX é bissetriz de $B\hat{O}C$. Calcule $A\hat{O}X$, sabendo que $B\hat{O}X$ é o dobro de $A\hat{O}B$.

Solução:
Seja $A\hat{O}B = x$. Logo temos que $B\hat{O}X = C\hat{O}X = 2x$. Assim: $x + 2x + 2x = 90^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$.

6) Dois ângulos retos, $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, têm uma parte comum – o ângulo $B\hat{O}C$. Mostrar que os ângulos $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ são congruentes e que os ângulos $A\hat{O}D$ e $C\hat{O}B$ são suplementares.
Solução:

Seja $B\hat{O}C = \theta$. Assim: $A\hat{O}B = A\hat{O}C + B\hat{O}C \Rightarrow A\hat{O}C = 90^\circ - \theta$.
Analogamente: $C\hat{O}D = B\hat{O}C + B\hat{O}D \Rightarrow B\hat{O}D = 90^\circ - \theta$.
Conclui-se, portanto, que $A\hat{O}C = B\hat{O}D$.
Observe agora que $A\hat{O}D = A\hat{O}B + B\hat{O}D = 90^\circ + 90^\circ - \theta = 180^\circ - \theta$.
Conseqüentemente: $A\hat{O}D + C\hat{O}B = 180^\circ$, ou seja, os ângulos $A\hat{O}D$ e $C\hat{O}B$ são suplementares.

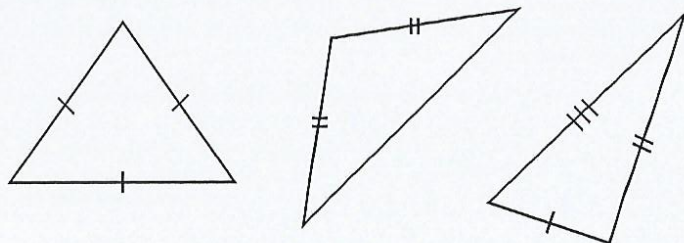
1.7) TRIÂNGULOS E A SUA CLASSIFICAÇÃO

1.7.1) Definições

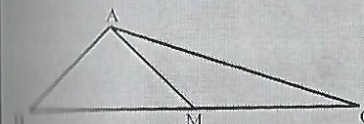
Um triângulo é a união de três segmentos de reta, consecutivos dois a dois, que têm por extremidades pontos não colineares. Os pontos são chamados de *vértices* do triângulo e os segmentos são seus *lados*. Outro conceito fundamental corresponde aos *ângulos internos*, aqueles que têm por lados os do triângulo, possuindo vértices nos do triângulo.

A, B e C são os vértices do triângulo (Δ) ABC.
$\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os lados do Δ ABC.
∠BAC, ∠ABC e ∠ACB são os ângulos internos ou, simplesmente, ângulos do ΔABC. Diz-se também que os ângulos de vértices em A, B e C são, respectivamente, **opostos** aos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, e vice-versa.

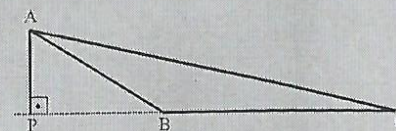
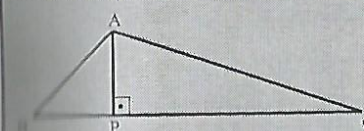
Todo triângulo divide o plano que o contem em duas regiões: uma convexa, denominada *interior*, e outra côncava, o *exterior*. São importantes também as definições de *ângulos externos* de um triângulo: cada um dos quais é um suplemento adjacente de um determinado ângulo interno.

α, β e θ são as medidas dos ângulos externos.

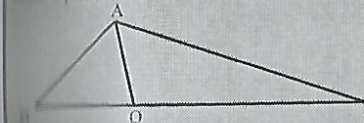
Costuma-se classificar um triângulo segundo dois critérios:

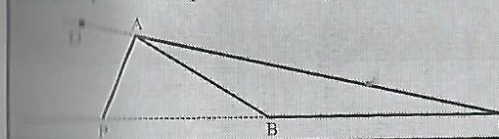
a) Quanto aos seus lados, um triângulo pode ser:
- a.1) **Equilátero**, o qual possui os três lados congruentes.
- a.2) **Isósceles**, que possui dois lados de medidas iguais.
- a.3) **Escaleno**, tendo todos os lados de medidas desiguais (dois a dois).

b) Quanto aos seus ângulos, um triângulo pode ser:
- b.1) **Acutângulo**, com os três ângulos acutângulos.
- b.2) **Retângulo**, que possui um ângulo reto.
- b.3) **Obtusângulo**, o qual tem um ângulo obtuso.

Denomina-se **ceviana** de um triângulo qualquer segmento de reta que tenha uma das extremidades num vértice do triângulo e a outra sobre a reta suporte do lado oposto ao vértice considerado. Essa última extremidade é usualmente chamada de **pé** da ceviana. As cevianas principais são:

MEDIANA, que liga um vértice ao **ponto médio** do lado oposto.

AM é mediana quando BM = MC.

ALTURA, que é perpendicular à reta suporte do lado oposto ao vértice-extremidade.

Nas duas figuras acima AH é altura desde que AH ⊥ BC, H ∈ $\overline{BC}$.

BISSETRIZ (INTERNA), que é a porção da semi-reta bissetriz de um ângulo interno limitada pelo lado oposto.

AC é bissetriz interna quando ∠BAQ = ∠CAQ, Q ∈ $\overline{BC}$.

BISSETRIZ EXTERNA, que é a parte da semi-reta bissetriz de um ângulo externo do triângulo limitada pela reta suporte do lado oposto.

Suponha que D pertence ao prolongamento de AC a partir de A e P pertence ao prolongamento de BC a partir de B. AP é bissetriz externa se ∠PAB = ∠PAD.

OBSERVAÇÕES:

1. Todo triângulo equilátero também é isósceles, uma vez que para ter três lados congruentes precisa ter dois antes. Ou seja: se um triângulo é equilátero, então é isósceles. Note-se que a recíproca é falsa.
2. Num triângulo retângulo, os lados que formam o (*único*, como se provará mais tarde) ângulo reto são chamados de **catetos**, ao passo que o outro lado, oposto ao ângulo reto, recebe o nome de **hipotenusa**.
3. Costuma-se denominar **base** de um triângulo isósceles o lado que não é, necessariamente, congruente a outro lado do mesmo triângulo.

1.8) LUGAR GEOMÉTRICO

Denomina-se lugar geométrico (l. g.) o conjunto dos pontos (em geometria plana, de um plano) que satisfazem determinada condição, ou ainda, que possuem certa propriedade.

A palavra chave no conceito de lugar geométrico é conjunto. Deve-se lembrar que dois conjuntos são iguais se, e somente se, cada um deles estiver contido no outro. Portanto, para provar que um certo conjunto X é o lugar geométrico L procurado, deve-se demonstrar que:

– Todo ponto de X é também ponto de L, isto é, que todo ponto do conjunto "desconfiado" como o lugar possui a propriedade requerida;

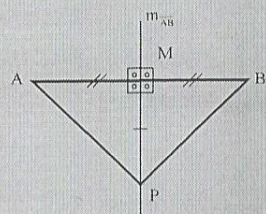
– Todo ponto de L pertence a X, ou seja, todo ponto que tem a propriedade desejada está no conjunto "candidato" a ser o lugar.

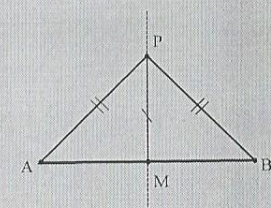
Com os conceitos atuais de congruência de triângulos, já é possível (e importante) obter dois lugares geométricos fundamentais.

1.8.1) Mediatriz de um segmento como lugar geométrico

A mediatriz de um segmento (reta perpendicular ao segmento, pelo seu ponto médio) é o l.g. dos pontos do plano eqüidistantes das extremidades do segmento.

Demonstração

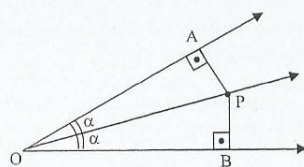
(I) $P \in m_{\overline{AB}}$ (mediatriz de $\overline{AB}$) $\Rightarrow PA = PB$

De fato, se P é o ponto médio de $\overline{AB}$, então é óbvio que PA = PB. Senão, ligando-se P às extremidades, sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$ é fácil notar que os triângulos PAM e PMB são congruentes (LAL). Logo, PA = PB, para todo ponto $P \in m_{\overline{AB}}$.

(II) $PA = PB \Rightarrow P \in m_{\overline{AB}}$

Com efeito, ligando-se P às extremidades e ao ponto médio de $\overline{AB}$, obtém-se dois triângulos (APM e PMB)

A não ser no caso trivial em que P = M, os quais são obviamente congruentes (LLL). Logo, $A\hat{M}P = P\hat{M}B$ e, como tais ângulos são suplementares adjacentes, conclui-se que as medidas de tais ângulos são de 90°. Ou seja, $\overline{PM}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, o que significa que $P \in m_{\overline{AB}}$ (c.q.d).

1.8.2) Bissetriz de um ângulo como lugar geométrico

A bissetriz de um ângulo não nulo é o l.g. dos pontos do plano eqüidistantes dos lados do ângulo.

A demonstração deste teorema (nos mesmos moldes da demonstração anterior) utiliza apenas os casos de congruência de triângulos (LAAo e caso especial de triângulos retângulos) e fica como exercício .

$P \in b_{A\hat{O}B}$ (Bissetriz de $A\hat{O}B$) $\Rightarrow PA = PB$

$PA = PB \Rightarrow P\hat{O}A = P\hat{O}B \; (P \in b_{A\hat{O}B})$

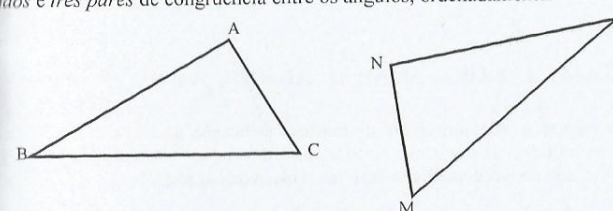
1.9) CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Até agora, já foram vistos dois tipos de congruência de naturezas distintas: a de segmentos e a de ângulos. Tais congruências, apesar de poderem ser introduzidas de modo rigoroso, são altamente intuitivas e experimentais, pois, na prática, são feitas comparações diretas entre dois segmentos, com o auxílio de uma régua graduada (*ruler*, em inglês) ou algo parecido (uma trena, uma fita métrica), ou entre dois ângulos, via transferidor (ou mesmo um teodolito), que são instrumentos de medida aos quais se é apresentado precocemente, com exceção do teodolito, de uso mais técnico. Vale observar que tanto uma régua graduada quanto um transferidor podem ser substituídos por uma régua sem marcas (*straight edge*, em inglês) e por um compasso. Assim, verificar a congruência entre segmentos ou entre ângulos é um trabalho bem fácil, bastando examinar suas medidas ou mesmo efetuar transportes.

A idéia de congruência, contudo, não se restringe a alguns entes geométricos apenas, podendo ser utilizada de forma totalmente geral. Como se faz, então, para garantir que dois triângulos são congruentes, por exemplo? Dizer, apenas, que é quando um se "encaixa" perfeitamente sobre o outro já não pode mais ser considerado satisfatório, apesar de poder ser praticado. Em alguns casos precisa-se agora de uma definição mais rigorosa, de modo que se possa ter absoluta certeza de que dois triângulos são congruentes.

Do exposto, há necessidade de uma definição formal e importante de congruência de triângulos, que é a seguinte:

Dois triângulos são congruentes quando é possível estabelecer uma correspondência, um a um, entre os vértices de um triângulo e os vértices do outro, de tal forma que surjam três pares de lados congruentes e que, entre lados congruentes, os ângulos internos também sejam congruentes.

Perceba-se que na definição de congruência de triângulos utilizam-se os conceitos de congruências entre segmentos e entre ângulos, sendo que devem ocorrer *três pares* de congruência *entre os lados* e *três pares* de congruência entre os ângulos, ordenadamente.

Esquematicamente, a definição fica assim:

$$\Delta ABC \equiv \Delta MNP \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{N} \\ \hat{B} \equiv \hat{P} \\ \hat{C} \equiv \hat{M} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \overline{BC} \equiv \overline{MP} \\ \overline{AB} \equiv \overline{NP} \\ \overline{AC} \equiv \overline{MN} \end{cases}$$, supondo válida a correspondência $A \leftrightarrow N$, $B \leftrightarrow P$ e $C \leftrightarrow M$.

Nessas condições, diz-se que os lados $\overline{BC}$ e $\overline{MP}$, por exemplo, são correspondentes por estarem opostos a ângulos congruentes, $\hat{A}$ e $\hat{N}$, no caso, em triângulos congruentes.

É fácil provar as seguintes propriedades da congruência entre triângulos (válidas, a propósito, para qualquer tipo de congruência):

I. $\Delta ABC \equiv \Delta ABC$ (propriedade reflexiva)
II. $\Delta ABC \equiv \Delta MNP \Rightarrow \Delta MNP \equiv \Delta ABC$ (propriedade simétrica)
III. $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ e $\Delta MNP \equiv \Delta XYZ \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta XYZ$ (propriedade transitiva)

Uma pergunta natural é: como "adivinhar" qual correspondência utilizar? A idéia é que existem condições mínimas que garantem a congruência de triângulos, em número obviamente menor que as seis condições requeridas na definição. Essas condições mínimas são os **casos (ou critérios) de congruência entre triângulos**, com o auxilio dos quais será verificada se vale a congruência dos triângulos em jogo, como se esses critérios servissem de pista.

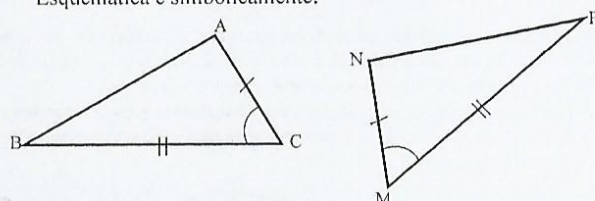
Em verdade, tais casos constituem um dos resultados mais importante (no aspecto teórico formal) de geometria, uma vez que a utilização da congruência entre triângulos pode embasar a maioria dos resultados seguintes (ângulos em paralelas, propriedades dos quadriláteros mais importantes, teorema de Tales, semelhança de triângulos, propriedades das circunferências e até mesmo tópicos de áreas de figuras planas). Portanto, faz-se mister dominar esses critérios para uma melhor compreensão das demonstrações de vários teoremas.

Há quatro casos gerais de congruência, e mais um específico para triângulos retângulos. Todavia, um deles deve ser admitido como postulado, a fim de que os demais possam ser provados. Comumente, aceita-se sem prova o mesmo caso que será escolhido aqui, o primeiro, apesar de a escolha ser arbitrária. Algo mais a ser destacado é que a ordenação ou a nomenclatura (abreviada ou não) dos critérios será usada por mera tradição e comodidade, não constituindo de forma alguma algo obrigatório.

1.9.1) Casos de Congruência entre Triângulos e Algumas Conseqüências

1.9.1.1) 1º CASO ("LADO-ÂNGULO-LADO" ou "LAL")

Se dois triângulos possuem, ordenadamente e aos pares, dois lados e o ângulo formado entre eles congruentes, então esses triângulos são congruentes.

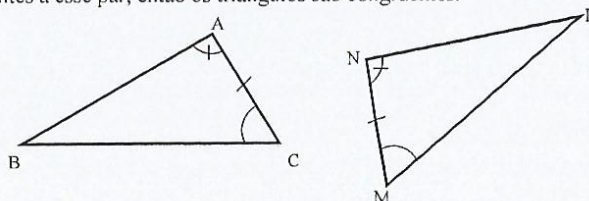
Esquemática e simbolicamente:

$$\overline{AC} \equiv \overline{MN},\ \overline{BC} \equiv \overline{MP}\ \text{e}\ \hat{C} \equiv \hat{M} \overset{\text{LAL}}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta MNP \overset{\text{DEF.}}{\Rightarrow} \overline{AB} \equiv \overline{NP},\ \hat{A} \equiv \hat{N}\ \text{e}\ \hat{B} \equiv \hat{P}$$

∎

Deve-se perceber que, graças a este postulado, a simples verificação de três das condições da definição (convenientemente escolhidas) acarreta que os triângulos devem ser congruentes, e, por isso, as outras três condições devem ser conseqüentemente aceitas. Isso reduz o trabalho à metade, sendo, assim, muito conveniente.

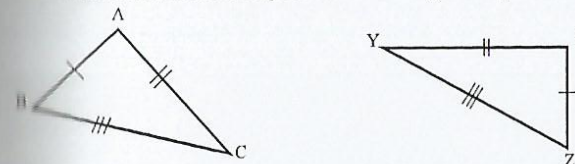
Aqui, pode surgir novamente o questionamento: como "adivinhar" que $\overline{AB} \equiv \overline{NP}$, $\hat{A} \equiv \hat{N}$ e $\hat{B} \equiv \hat{P}$? Inicialmente que $\overline{AB} \equiv \overline{NP}$ é óbvio, por ter sido o último par de lados na congruência. Agora, a parte mais interessante: por que motivo deve-se ter $\hat{A} \equiv \hat{N}$ e $\hat{B} \equiv \hat{P}$, mas não $\hat{A} \equiv \hat{P}$ e $\hat{B} \equiv \hat{N}$? Aí é que entra a importante definição de lados e ângulos *correspondentes*. Basta perceber quais são os pares de lados congruentes nos dois triângulos e impor que os respectivos ângulos opostos também o sejam. Assim, uma vez que $\overline{BC} \equiv \overline{MP}$, deve-se ter necessariamente a congruência entre os respectivos ângulos opostos a tais lados: $\hat{A} \equiv \hat{N}$, o que encerra a questão.

1.9.1.2) 2º CASO ("ÂNGULO-LADO-ÂNGULO" ou "ALA")

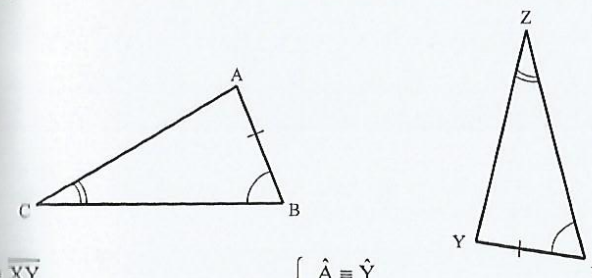
Se dois triângulos têm, respectivamente, um par de lados congruentes, assim como os ângulos adjacentes a esse par, então os triângulos são congruentes.

$$\overline{AC} \equiv \overline{MN},\ \hat{A} \equiv \hat{N}\ \text{e}\ \hat{C} \equiv \hat{M} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP \Rightarrow \overline{BC} \equiv \overline{MP},\ \overline{AB} \equiv \overline{NP}\ \text{e}\ \hat{B} \equiv \hat{P}$$

Mais uma vez, para fins de esclarecimento completo, a resposta à pergunta "Por que $\overline{BC} \equiv \overline{MP}$?" é porque esses dois lados estão ambos opostos aos ângulos de vértices em A e em N, os quais se sabe serem congruentes.

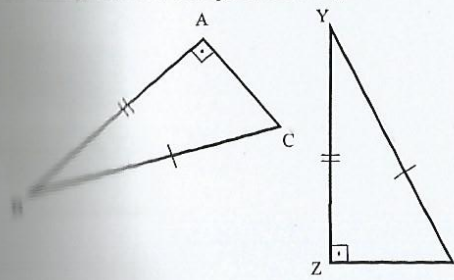
1.9.1.3) 3º CASO ("LADO-LADO-LADO" ou "LLL")

Tendo os três lados respectivamente congruentes, dois triângulos serão congruentes.

$$\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{XZ} \\ \overline{AC} \equiv \overline{XY} \\ \overline{BC} \equiv \overline{YZ} \end{cases} \underset{\text{LLL}}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta XYZ \overset{\text{DEF.}}{\Rightarrow} \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{X} \\ \hat{B} \equiv \hat{Z} \\ \hat{C} \equiv \hat{Y} \end{cases}$$

1.9.1.4) 4º CASO ("LADO-ÂNGULO-ÂNGULO OPOSTO" ou "LAAo")

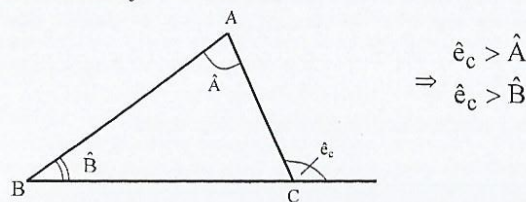
Se dois triângulos têm um lado, um ângulo adjacente ao lado considerado e o ângulo oposto a tal lado respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

$$\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{XY} \\ \hat{B} \equiv \hat{X} \\ \hat{C} \equiv \hat{Z} \end{cases} \underset{\text{LAAo}}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta XYZ \overset{\text{DEF.}}{\Rightarrow} \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{Y} \\ \overline{AC} \equiv \overline{YZ} \\ \overline{BC} \equiv \overline{XZ} \end{cases}$$

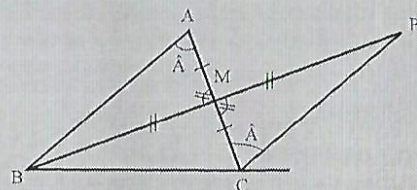
1.9.1.5) Caso especial (Apenas em triângulos retângulos):

Se dois triângulos retângulos têm hipotenusas congruentes e um par de catetos de mesma medida (um em cada), então os triângulos são congruentes.

$$\begin{cases} \overline{BC} \equiv \overline{XY} \\ \overline{AB} \equiv \overline{YZ} \\ \hat{A}\ \text{e}\ \hat{Z}\ \text{são retos} \end{cases} \underset{\text{CASO ESPECIAL}}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta XYZ \overset{\text{DEF.}}{\Rightarrow} \begin{cases} \overline{AC} \equiv \overline{XW} \\ \hat{C} \equiv \hat{X} \\ \hat{B} \equiv \hat{Y} \end{cases}$$

1.9.2) Conseqüências Importantes

1.9.2.1) Teorema do ângulo externo: Num triângulo, qualquer ângulo externo é maior que os ângulos internos não adjacentes a ele.

$$\Rightarrow \begin{matrix} \hat{e}_c > \hat{A} \\ \hat{e}_c > \hat{B} \end{matrix}$$

Demonstração:

Seja M o ponto médio de $\overline{AC}$. Ligando-se B a M, prolongue-se $\overline{BM}$ de modo a obter-se P (M entre B e P), tal que BM = MP.

Como $A\hat{M}B \equiv P\hat{M}C$ (opostos pelo vértice), os triângulos ABM e PCM são congruentes, pelo caso LAL. Logo, $P\hat{C}M \equiv \hat{A}$, o qual está contido no interior do ângulo externo relativo a C, $\hat{e}_c$. Assim, $\hat{e}_c > \hat{A}$. De modo inteiramente análogo, é possível transportar $\hat{B}$ sobre $\hat{e}_c$ e concluir que $\hat{e}_c > \hat{B}$.

Observação: Perceba-se que $\hat{e}_c$ pode ser maior que, menor que ou congruente a $\hat{C}$, conforme este seja agudo, obtuso ou reto, respectivamente.

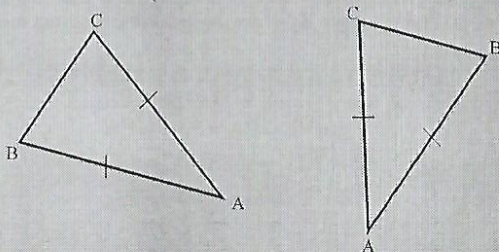
1.9.2.2) Teorema do Triângulo Isósceles

Num triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes. Equivalentemente, *num mesmo triângulo*, a lados congruentes opõem-se ângulos também congruentes.

ΔABC; $AB = AC \Rightarrow \angle ABC \equiv \angle ACB$

Demonstração

Basta observar a seguinte correspondência entre os vértices de um triângulo ABC, em que AB = AC, e os vértices do mesmo triângulo (ou de uma cópia sua), ACB: $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$.

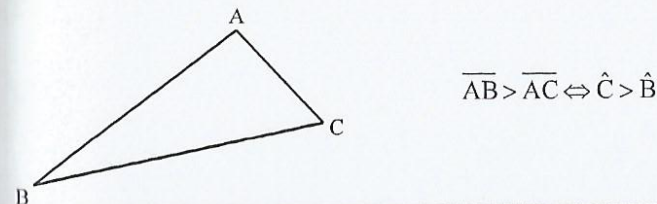
Visto que $\hat{A} \equiv \hat{A}$, AB = AC e AC = AB, pode-se afirmar que os triângulos ABC e ACB são congruentes (o que já era bem óbvio), pelo caso LAL. A partir dessa congruência, conclui-se que os ângulos dos vértices B e C (bem como os dos vértices C e B!) são congruentes.

Corolário: Todo triângulo equilátero é, também, eqüiângulo.

1.9.2.3) Recíproca do Teorema do Triângulo Isósceles

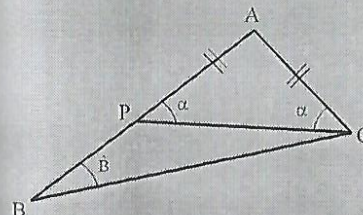
Se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então ele é isósceles. Parafraseando, *num mesmo triângulo*, a ângulos congruentes opõem-se lados também congruentes.

A demonstração deste teorema é análoga à anterior, só que ao invés de utilizar o caso LAL, usa-se o critério ALA. Fica como exercício: ΔABC; $\angle ABC \equiv \angle ACB \Rightarrow AB = AC$

1.9.2.4) Ao maior (menor) lado de um triângulo opõe-se o maior (menor) ângulo do triângulo, e reciprocamente.

$$\overline{AB} > \overline{AC} \Leftrightarrow \hat{C} > \hat{B}$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha-se que $\overline{AB} > \overline{AC}$. Então é possível transportar $\overline{AC}$ sobre $\overline{AB}$, de modo que exista um (único) ponto P em $\overline{AB}$ tal que: $\overline{AC} \equiv \overline{AP}$. Daí, pelo teorema do triângulo isósceles aplicado ao triângulo APC, deve-se ter $A\hat{P}C \equiv A\hat{C}P (= \alpha)$.

Pelo teorema do ângulo externo no triângulo BPC, vem: $\alpha > \hat{B}$. Como $A\hat{P}C$ está contido no interior de $\hat{C}$, tem-se: $\hat{C} > \alpha$. Por transitividade: $\hat{C} > \alpha$ e $\alpha > \hat{B} \Rightarrow \hat{C} > \hat{B}$.

($\Leftarrow$) Suponha-se, agora, que $\hat{C} > \hat{B}$ e que, por absurdo, $\overline{AB}$ não seja maior que $\overline{AC}$. Haveria duas possibilidades:

a) $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$. Pela recíproca do teorema do triângulo isósceles, deveria ocorrer $\hat{C} \equiv \hat{B}$, o que é uma contradição.

b) $\overline{AB} < \overline{AC}$. Pelo teorema acima demonstrado (ida), deveria acontecer $\hat{C} < \hat{B}$, o que é, novamente, um absurdo.

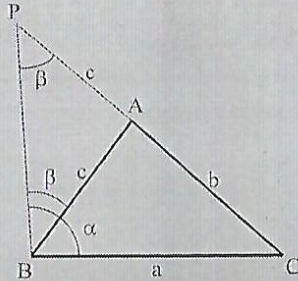
Portanto, por exclusão, deve-se ter: $\hat{C} > \hat{B} \Rightarrow \overline{AB} < \overline{AC}$.

Observação: Note-se que aumentando-se um ângulo de um triângulo, aumenta-se conseqüentemente o lado oposto ao ângulo (mantendo-se os demais lados constantes), e vice-versa. Isso garante que o lado de um triângulo seja (diretamente) proporcional ao ângulo oposto?

A resposta é um retumbante NÃO. Como será visto (bem) mais adiante, os lados de um triângulo não proporcionais aos senos dos ângulos opostos (lei dos senos).

1.9.2.5) Desigualdade triangular: Cada lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois.

Demonstração:

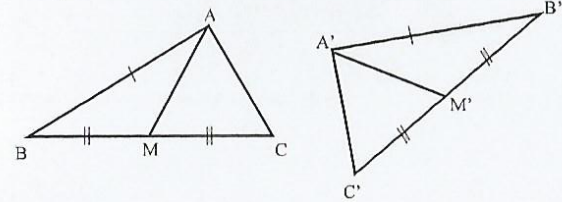
Seja P um ponto sobre o prolongamento de $\overline{AC}$ (A entre P e C) tal que $\overline{AP} \equiv \overline{AC}$. Obtém-se, assim, o triângulo isósceles ABP. Logo m($A\hat{P}B$) = m($A\hat{B}P$) = β. Como β está contido no interior de α (α = med ($P\hat{B}C$), β < α. Logo, no triângulo BCP, deve-se ter a < b + c. Analogamente, prova-se que b < a + c e que c < a + b.

Observação: É possível provar a recíproca do teorema anterior, ou seja: dados três segmentos, de medidas a, b e c, tais que qualquer um deles seja menor que a soma dos demais (ou, equivalentemente, que o maior dos três seja menor que a soma dos outros dois), então existe um triângulo de lados a, b e c.

Além disso, as três desigualdades triangulares podem ser resumidas do seguinte modo: o maior lado de um triângulo deve estar entre a soma e o módulo da diferença entre os outros dois.

$$\begin{cases} a \geq b \\ a \geq c \end{cases} \Rightarrow |b - c| < a < b + c$$

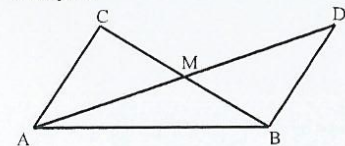
Exemplos:

1) ABC e A'B'C' são dois triângulos nos quais são iguais os lados AB e A'B', BC e B'C' e as medianas AM e A'M'. Demonstrar que ABC e A'B'C' são dois triângulos congruentes.

Solução:

Uma vez que M e M' são os pontos médios de BC e B'C' e BC ≡ B'C' então BM ≡ B'M'. Desde que AB ≡ A'B', AM ≡ A'M' e BM ≡ B'M' então ΔABM ≡ ΔA'B'M'. Assim, temos que: ∠AMB ≡ ∠A'M'B' ⇒ 180^0 – ∠AMC ≡ 180^0 – ∠A'M'C' ⇒ ∠AMC ≡ ∠A'M'C'.

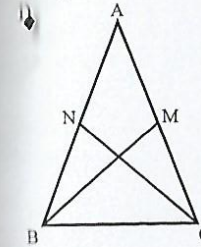
Como ∠AMC ≡ ∠A'M'C', AM ≡A'M' e BM ≡ B'M' então ΔAMC ≡ A'M'C' ⇒ AC ≡ A'C'.
Do fato de AC ≡ A'C', AB ≡ A'B' e BC ≡ B'C' então ΔABC ≡ ΔA'B'C'.

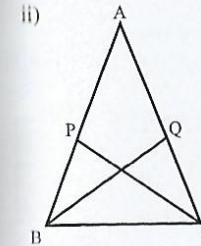
2) Prolonga-se a mediana AM de um triângulo ABC de um segmento MD = MA e une-se D com B. Mostrar que BD = AC.

Solução:

Desde que CM ≡ BM, AM ≡ MD e ∠AMC ≡ ∠DMB então temos que ΔAMC ≡ DMB ⇒ BD ≡ AC.

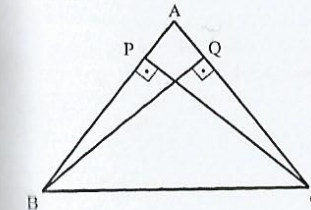
3) Num triângulo isósceles, demonstrar que são iguais: i) as medianas relativas aos lados iguais; ii) as bissetrizes relativas aos ângulos da base;

Solução:

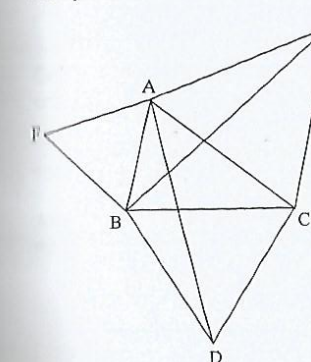
i)

Como AB ≡ AC e M e N são os pontos médios de AB e AC então temos que BN ≡CM. Como nos triângulos BCN e CBM temos BC comum a estes dois triângulos, ∠NBC ≡ MCB e BN ≡ CM então temos que ΔBCN ≡ CBM. Logo, temos que CN ≡ BM.

ii)

Desde que ∠ABC ≡ ∠ACB e BQ e CP são bissetrizes, então ∠CBQ ≡ ∠BCP. Como em ΔBCP e ΔCBQ temos BC comum, ∠CBP ≡ ∠BCQ e ∠CBQ ≡ ∠BCP então temos que ΔBCP ≡ ΔCBQ. Deste modo, concluímos que BQ ≡ CP.

4) Provar que um triângulo que tem duas alturas de igual comprimento é isósceles.

Solução:

Note que os triângulos BCP e CBQ são triângulos retângulos em que as hipotenusas possuem iguais comprimentos (BC, comum aos dois triângulos) e um cateto em cada um também de igual comprimento (BQ ≡ CP). Pelo caso especial de congruência de triângulos para triângulos retângulos temos que ΔBCP ≡ ΔCBQ, onde concluímos que ∠CBP ≡ ∠BCQ, implicando que ΔABC é isósceles.

5) Sobre os lados de um triângulo ABC constroem-se externamente os triângulos equiláteros BCD, CAE e ABF. Demonstrar que os segmentos AD, BE e CF são congruentes.

Solução:

Observe que nos triângulos ACD e ECB temos:
CD ≡ BC, AC ≡ EC e ∠ACD = 60o + $\hat{C}$ = ∠ECB.
Portanto, temos que os triângulos ACD e ECB são congruentes, implicando que AD e BE possuem igual comprimento.
De maneira análoga demonstra-se que CF é congruente a AD e BE.

6) AB = 15 cm e BC = 8 cm são dois lados de um triângulo ABC. Determinar entre que limites pode variar a medida do lado AC.

Solução:

Pela desigualdade triangular temos que $|c - a| < b < c + a \Rightarrow 7 \text{ cm} < b < 23 \text{ cm}$.

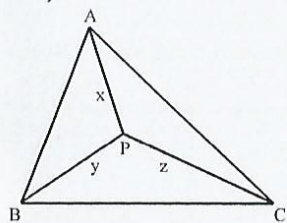
7) Provar que qualquer lado de um triângulo é menor que o semi-perímetro.

Solução:

Pela desigualdade triangular: $a < b + c \Rightarrow \frac{a}{2} < \frac{b+c}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{b+c}{2} + \frac{a}{2} \Rightarrow a < \frac{a+b+c}{2}$.

A demonstração para os outros lados é análoga.

8) Demonstrar que a soma dos segmentos que unem um ponto interno a um triângulo aos três vértices está compreendida entre o semi-perímetro e o perímetro do triângulo.

Solução:

Considere que a distância do ponto P aos vértices A, B e C são x, y e z, respectivamente. Observando os triângulo ΔABP, ΔACP e ΔBCP obtemos: $c < x + y$, $b < x + z$ e $a < y + z$.

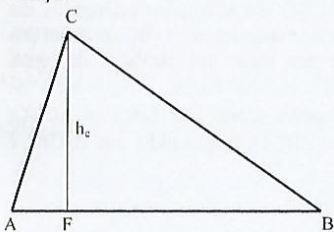
Somando estas desigualdades obtemos $x + y + z > \frac{a+b+c}{2}$.

Nos triângulo ΔAPC e ΔBPC temos: $z - x < b$ e $y - z < a$.

Somando obtemos: $x + y < a + b$.

Analogamente: $x + z < a + c$ e $y + z < b + c$.

Somando estas desigualdades: $x + y + z < a + b + c$.

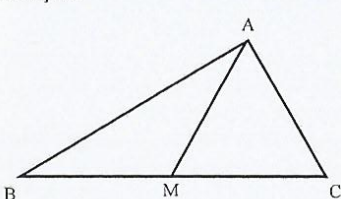
9) Demonstrar que a soma das três alturas de um triângulo acutângulo é maior que o semi-perímetro.

Solução:

Em ΔACF, ΔBCF temos: $h_c + AF > b$ e $h_c + BF > a \Rightarrow 2h_c + (AF + BF) > a + b \Rightarrow 2h_c > a + b - c$.

Analogamente: $2h_b > a - b + c$ e $2h_a > -a + b + c$.

Somando estas desigualdades: $h_a + h_b + h_c > \frac{a+b+c}{2}$.

10) M é um ponto qualquer do lado BC de um triângulo ABC. Demonstrar que $AM < (a + b + c)/2$.

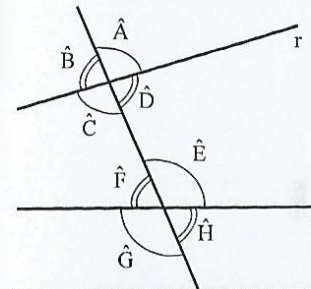
Solução:

Pela desigualdade triangular aplicada aos triângulos ABM e ACM, respectivamente: $AM - BM < c$ e $AM - CM < b$.

Somando obtemos $2AM - (BM + CM) < b + c \Rightarrow$

$AM < \frac{a+b+c}{2}$

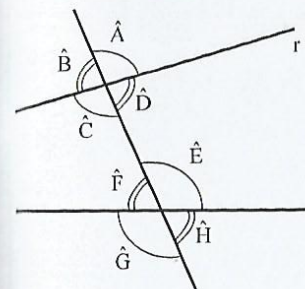
1.10) PARALELISMO

1.10.1) Definições

Dadas duas retas distintas, uma terceira reta que intersecte as duas é denominada transversal do conjunto formado pelas duas iniciais. Formam-se, assim, oito ângulos (não nulos nem rasos), os quais são fáceis de se relacionar, desde que, dois a dois, tenham vértice comum.

$$\hat{A} \equiv \hat{C}; \hat{B} \equiv \hat{D}; \hat{A} + \hat{B} \equiv \hat{B} + \hat{C} \equiv \hat{C} + \hat{D} \equiv \hat{D} + \hat{A} (= 1 \text{ raso})$$
$$\hat{E} \equiv \hat{G}; \hat{F} \equiv \hat{H}; \hat{E} + \hat{F} \equiv \hat{F} + \hat{G} \equiv \hat{G} + \hat{H} \equiv \hat{H} + \hat{E} (= 1 \text{ raso})$$

O problema consiste em relacionar ângulos com vértices distintos, com o Â e Ĝ. Para tanto, inicialmente será considerado o caso em que $r \cap s = \varnothing$, ou seja, o caso em que r e s são paralelas.

Diz-se que dois ângulos, com vértices distintos, dentre os oito acima, são:

– Dois ângulos são correspondentes quando um lado de cada situa-se em t no mesmo sentido bem como outros lados estiverem um em r, outro em s.

Na figura ao lado, Â e Ê; B̂ e F̂ ; Ĉ e Ĝ; D̂ e Ĥ são os pares de ângulos correspondentes.

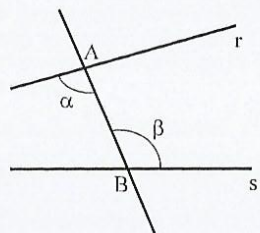
Colaterais internos / externos: quando estão num mesmo semi-plano de origem em t (mesmo lado – colaterais), bem como no interior (exterior) da região limitada por r e s.

Na situação esquematizada anteriormente, D̂ e Ê; Ĉ e F̂ são os pares de colaterais internos, enquanto que Â e Ĥ; B̂ e Ĝ são os pares de colaterais externos;

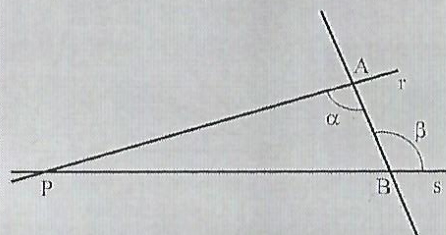
Alternos internos / externos: quando estão em lados (semi-planos) distintos (alternados) em relação a t, mas ambos no interior ou no exterior da região determinada por r e por s.

Na situação original, D̂ e F̂ ; Ĉ e Ê são alternos internos e Â e Ĝ; B̂ e Ĥ são alternos externos;

1.10.2) Teorema fundamental do paralelismo

Duas retas são paralelas se, e somente se, formam ângulos correspondentes (ou alternos de mesmo tipo) congruentes (e, conseqüentemente, colaterais de mesmo tipo suplementares).

$r // s \Leftrightarrow \alpha = \beta$

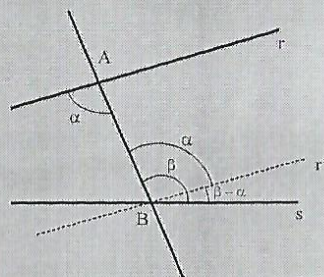
Demonstração:

$\Leftarrow$ Suponha-se que $\alpha = \beta$, mas que r não fosse paralela a s. Daí, r e s deveriam concorrer nalgum ponto P. Supondo que P esteja no mesmo semi-plano de α em relação a t, deveria ocorrer:

(ΔPAB) $\beta > \alpha$ (contradição, pois, por hipótese, $\beta = \alpha$) (Teorema do ângulo externo)

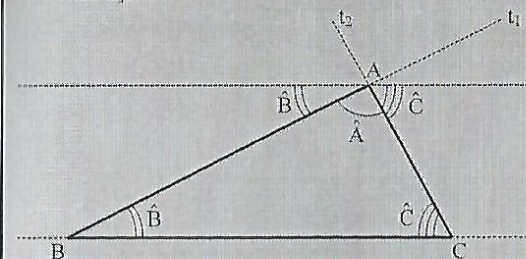
Se P estivesse no mesmo semi-plano de β, ocorreria: $\alpha > \beta$, outro absurdo.

Deste modo, deve-se ter r // s, já que estas não podem encontrar-se, apesar de serem coplanares.

$\Rightarrow$ Agora, novamente por redução ao absurdo, suponha-se que r // s, embora $\alpha \neq \beta$. Nesta situação, sem perda de generalidade, seja $\beta > \alpha$. Aí, seria possível transportar α sobre β, de modo que um lado de α estivesse sobre t e o outro sobre uma reta r', por B, mas então, pelo resultado anterior, r' // r. Como r // s, dever-se-ia impor que: r' // r e r // s $\Rightarrow$ r' // s. Daí, haveria duas paralelas a r por B, o que é um absurdo. (Pelo postulado V de Euclides).

Logo, não pode ocorrer $\beta > \alpha$. Do mesmo modo, é impossível que r // s e $\beta > \alpha$. Assim, $\alpha = \beta$.

1.10.3) Conseqüências

1.10.3.1) A soma dos ângulos internos de um triangulo ABC é um ângulo raso, ou seja, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

Demonstração:

Traçando $r // s = \overleftrightarrow{BC}$, pelo vértice A, obtêm-se alternos internos, como indicados pela figura, considerando as transversais t_1 e t_2.

Logo: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

1.10.3.2) Cada ângulo interno de um triangulo eqüilátero mede 60°.

Demonstração:

Tomemos um triângulo ABC, de modo que o ângulo $\hat{A}$ é oposto ao lado $\overline{BC}$, $\hat{B}$ é oposto a $\overline{AC}$ e $\hat{C}$ é oposto a $\overline{AB}$. Inicialmente, como todo triangulo eqüilátero é também isósceles, é imediato concluir que todo triangulo eqüilátero é eqüiângulo.

De fato, como $\overline{AB} \equiv \overline{AC} \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$. Analogamente, $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \Rightarrow \hat{C} \equiv \hat{A}$.

Portanto: $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = \alpha \Rightarrow \alpha + \alpha + \alpha = 180° \Leftrightarrow \alpha = 60°$

1.10.3.3) Um triângulo retângulo tem:

a) Dois ângulos agudos (complementares).

b) A hipotenusa como maior lado.

Demonstração:

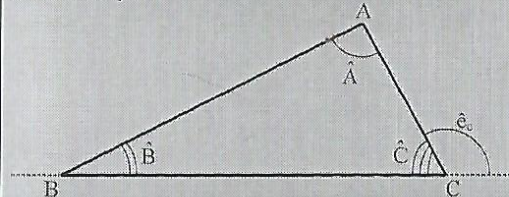
a) Sendo α e β os ângulos (não retos) de um triângulo retângulo:

$$\alpha + \beta = 90° \underset{\alpha,\beta > 0°}{\Longrightarrow} \begin{cases} \alpha, \beta < 90° \\ \beta = 90° - \alpha \end{cases}$$

b) Como o maior ângulo é o reto, ao maior ângulo opõe-se o maior lado. No caso, a hipotenusa.

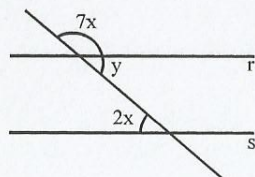
Obs: Conseqüentemente, um triângulo retângulo tem um único ângulo reto.

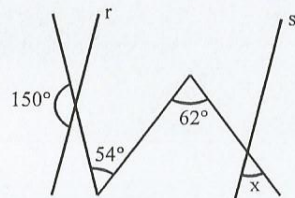
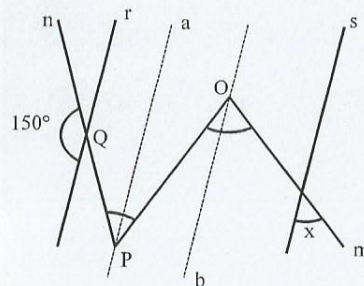
1.10.3.4) Cada ângulo externo de um triangulo é, exatamente, igual à soma dos internos não adjacentes.

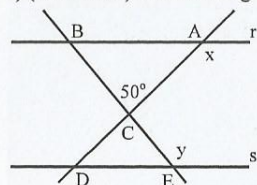
Demonstração:

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \\ \hat{e}_c + \hat{C} = 180° \end{cases} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{e}_c + \hat{C} \Leftrightarrow \hat{e}_c = \hat{A} + \hat{B}$$

Analogamente: $\begin{cases} \hat{e}_A = \hat{B} + \hat{C} \\ \hat{e}_B = \hat{A} + \hat{C} \end{cases}$

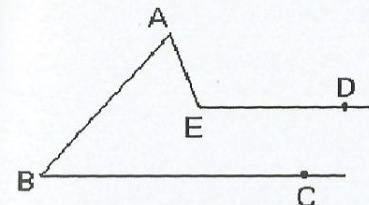
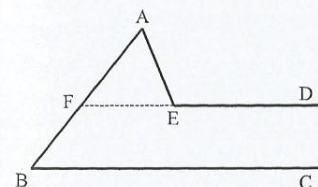
Exemplos:

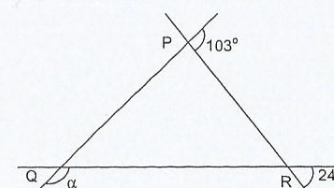
1) Na figura, sabe-se que **r // s**. Calcule **x** e **y**.

Solução:
Como r // s tem-se que 2x = y (1)
Devido ao ângulo raso sobre a transversal: 7x + y = 180° (2)
Substituindo a equação (1) na (2): 9x = 180° ⇒ x = 20° ⇒ y = 40°

2) Calcule x na figura sabendo que r // s.

Solução:

Designemos os pontos de interseção das retas por letras, de acordo com a figura ao lado. Trace-se por P uma reta a que é paralela a r e s. Analogamente, trace-se por O uma reta b paralela às retas r e s.
Note que:
$\angle nQr = 180° - 150° = 30°$
$\angle nPa = \angle nQr = 30°$
$\angle aPO = 54° - \angle nPa = 54° - 30° = 24°$
$\angle POb = \angle aPO = 24°$
$\angle bOm = 62° - \angle POb = 62° - 24° = 38°$
Agora basta reparar que $x = \angle bOm \Rightarrow x = 38°$

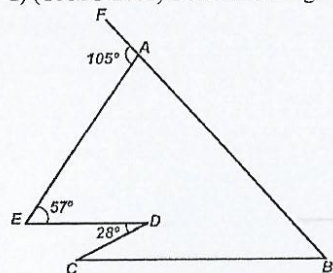
3) (ESA-2001) Observe a figura abaixo:

A reta r é paralela à reta s, então o valor de $\hat{x} + \hat{y}$ é:
a) 180° b) 230° c) 250° d) 280° e) 300°
Solução:

Pela figura, os ângulos internos do triângulo ABC valem 50°, $180° - \hat{x}$ e $180° - \hat{y}$.
Logo: $50° + 180° - \hat{x} + 180° - \hat{y} = 180° \Rightarrow \hat{x} + \hat{y} = 230°$.

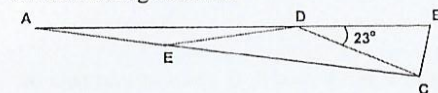
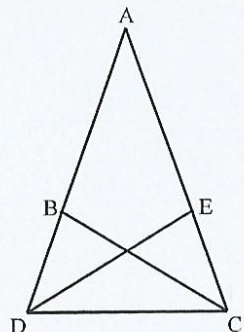
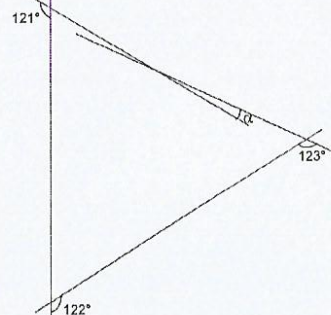
4) (EEAR-2004) Na figura, $\overline{ED} // \overline{BC}$, $med(B\hat{A}E) = 80°$ e $med(A\hat{B}C) = 35°$. Assim, a medida de $A\hat{E}D$ é:

a) 100° b) 110° c) 115° d) 120°
Solução:

Traçando FE // BC, obtemos que $\angle AFE = \angle ABC = 35°$.
Observando o triângulo AFE:
$35° + 80° + \angle AEF = 180° \Rightarrow \angle AEF = 65°$.
Logo:
$\angle AED = 180° - \angle AEF = 115°$

5) (UECE-2004) As retas na figura interceptam-se duas a duas nos pontos P, Q e R. Considerando os valores indicados, o ângulo α é igual a:
a) 101°
b) 102°
c) 103°
d) 104°

Solução:
Observe o triângulo PQR, cujos ângulos internos $\hat{P}$ e $\hat{R}$ valem 77° e 24°, respectivamente. Uma vez que α é um ângulo externo de ΔPQR, então α = 77° + 24° = 101°.

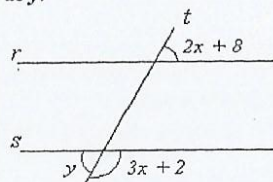
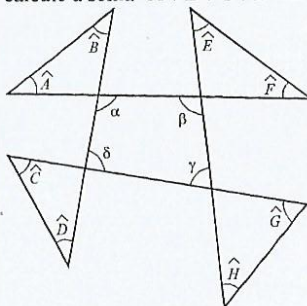
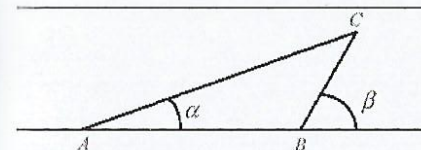
Exercícios

1) (UFMG-2001) Observe esta figura:

Nessa figura, os pontos F, A e B estão em uma reta e as retas CB e ED são paralelas. Assim sendo, o ângulo $A\hat{B}C$ mede

a) 39° b) 44° c) 47° d) 48°

2) (Covest-99) Na ilustração abaixo, os segmentos **DC, DE, EA** têm mesma medida. O ângulo **CDB** mede **23°**. Qual a soma dos dígitos da medida em minutos do ângulo **EAD**?

3) (Covest-2004) Na figura ilustrada abaixo, os segmentos AB, BC, CD, DE e EA são congruentes. Determine, em graus, a medida do ângulo $C\hat{A}D$.

4) (Covest-2002) Determine a medida em graus do ângulo α na ilustração a seguir.

5) (UFRN-97) A diferença entre os ângulos agudos de um triângulo retângulo é 50°. Qual a medida do menor ângulo desse triângulo?

a) 10° b) 40° c) 20° d) 70° e) 25°

6) (UFPB-94) Na figura ao lado estão representadas as retas *r*, *s* e *t*. Sabendo-se que as retas *r* e *s* são paralelas, calcule, em graus, o valor de *y*.

7) (UFPB-99) Considerando a figura ao lado, calcule a soma $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E}+\hat{F}+\hat{G}+\hat{H}$.

8) (UFU-2000) Considere o triângulo ABC, abaixo, e D um ponto no lado $\overline{AC}$, tal que $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{BC} = 1$ cm. Nesse caso, a relação existente entre os ângulos a e b indicados é:

a) $\beta + 2\beta = \pi$ b) $\beta = 2\beta$

c) $\beta = 3\alpha$ d) $\alpha - \beta = \pi/4$

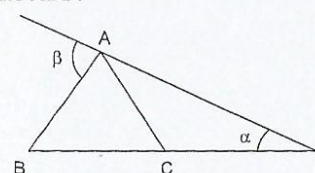
9) (UFMS-2000) Diz-se que um ponto P de um segmento $\overline{AB}$ efetua a divisão áurea desse segmento se $\frac{AP}{AB} = \frac{PB}{AP}$, onde AP, AB e PB denotam o comprimento dos segmentos $\overline{AP}, \overline{AB}$ e $\overline{PB}$, respectivamente. Considerando que o ponto P efetua a divisão áurea de um segmento $\overline{AB}$, é correto afirmar que

(01) $AP = \sqrt{AB \cdot PB}$.

(02) $AP = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cdot AB$.

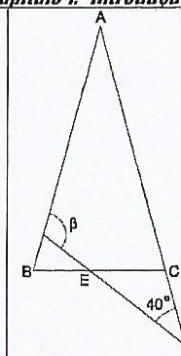
(04) $PB = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \cdot AB$.

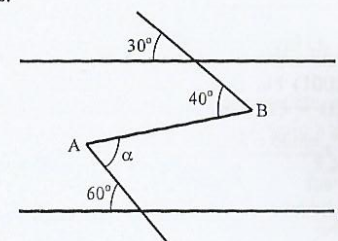
(08) AP é raiz da equação $x^2 + (AB)x - (AB)^2 = 0$.

10) (UFC-99) Na figura abaixo, os segmentos de reta $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes, β é um ângulo externo, e α um ângulo interno do triângulo ABD.

Assinale a opção que contém a expressão correta de β em termos de α.

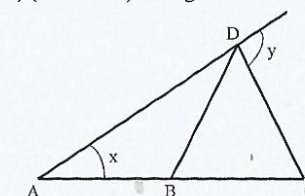
a) $\beta = 3\alpha$ b) $\beta = 2\alpha$ c) $\beta = \alpha/2$

d) $\beta = 2\alpha/3$ e) $\beta = 3\alpha/2$.

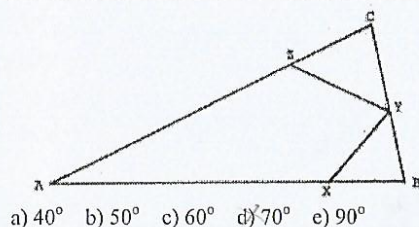
11) (Mackenzie-2003) Na figura, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{CE} = \overline{CF}$. A medida de β é:

a) 90° b) 120° c) 110° d) 130° e) 140°

12) (FGV-2004) Na figura, os pontos A e B estão no mesmo plano que contém as retas paralelas r e s.

Assinale o valor de α.

a) 30° b) 50° c) 40° d) 70° e) 60°

13) (Fuvest-81) Na figura: AB = BD = CD. Então

a) y = 3x b) y = 2x c) x + y = 180°

d) x = y e) 3x = 2y

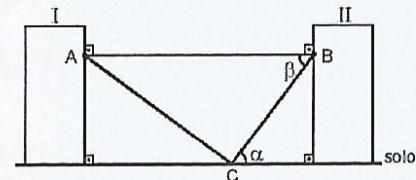
14) (Fuvest-91) Na figura, AB = AC, BX = BY e CZ = CY. Se o ângulo A mede 40°, então o ângulo XYZ mede:

a) 40° b) 50° c) 60° d) 70° e) 90°

15) (Fuvest-96) Na figura, as retas r e s são paralelas, o ângulo 1 mede 45° e o ângulo 2 mede 55°. A medida, em graus, do ângulo 3 é:

a) 50 b) 55 c) 60 d) 80 e) 100

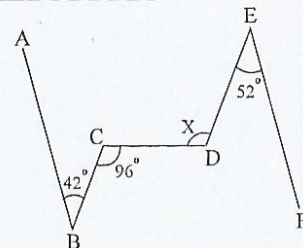
16) (Fuvest-2001) Na figura abaixo, tem-se que **AD = AE, CD = CF** e **BA = BC**. Se o ângulo $E\hat{D}F$ mede **80°**, então o ângulo $\mathbf{A\hat{B}C}$ mede:

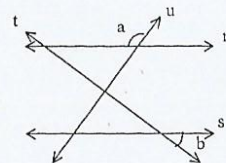
a) 20° b) 30° c) 50° d) 60° e) 90°

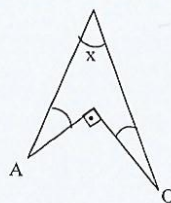
17) (Bombeiros/RJ-2000) Observe a figura abaixo.

Ela sugere um cabo aéreo ($\overline{AB}$) e duas cordas ($\overline{AC}$ e $\overline{BC}$) presas ao solo no ponto C. Em relações aos ângulos α e β, pode-se afirmar que:

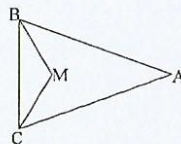
a) β = α b) β = 3α/2 c) β = 2α/3
d) β = 3α/5 e) β = 2α

18) (EEAR-2000) Na figura, $\overline{BA}$ // $\overline{EF}$. A medida X é

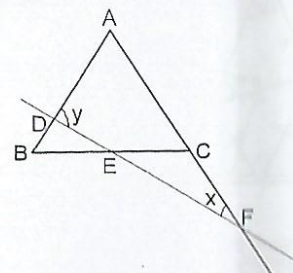
a) 105^0
b) 106^0
c) 107^0
d) 108^0

19) (EEAR-2003) Na figura, r // s e t ⊥ u. O valor de **a – b** é

a) 100°
b) 90°
c) 80°
d) 70°

20) (EEAR-2003) Na figura abaixo, os ângulos assinalados Â e Ô medem, respectivamente, 10° e 50°. Assim sendo, o valor de tg x é

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) 1

21) (EEAR-2003) Na figura, AB = AC, M é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos do triângulo ABC e o ângulo $B\hat{M}C$ é o triplo do ângulo Â, então a medida de Â é

a) 15°
b) 18°
c) 24°
d) 36°

22) (EEAR-2003) Seja α um ângulo agudo. Se somarmos a medida de um ângulo reto à medida de α e, em seguida, subtrairmos dessa soma a medida do suplemento de α, obteremos sempre a medida de um ângulo

a) nulo, qualquer que seja a medida de α.
b) reto, qualquer que seja a medida de α.
c) agudo, desde que 45° < α < 90°.
d) raso, desde que α < 45°.

23) (Ciaba-2003) O triângulo ABC, representado na figura abaixo, é isósceles.

Se $\overline{EC} = \overline{CF}$ e x = 40°, a medida y, do ângulo assinalado, é:

a) 160° b) 150° c) 140° d) 130° e) 120°

24) (UFV-2005) Muitas das construções e esculturas da Grécia Antiga utilizavam a "secção áurea" em suas dimensões, como, por exemplo, na ilustração da Figura 1.

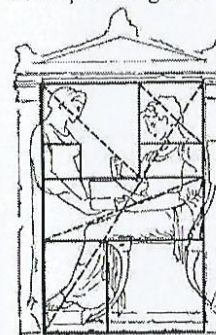
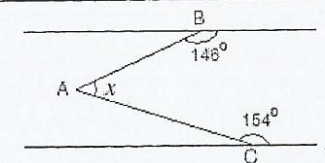



Figura 1 Figura 2

Dizemos que um ponto C, conforme a Figura 2, divide um segmento de reta AB em secção áurea se a razão entre as medidas do maior e do menor dos dois segmentos determinados por C é igual à razão entre as medidas de AB e do maior dos segmentos obtidos, isto é, AC/CB = AB/AC. O número AC/CB, denominado razão áurea, é igual a:

a) $(1+\sqrt{2})/2$ b) $(1+\sqrt{7})/2$ c) $(1+\sqrt{3})/2$
d) $(1+\sqrt{9})/2$ e) $(1+\sqrt{5})/2$

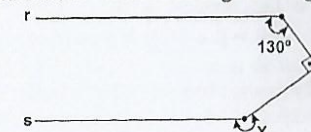
25) (UFV-2005) Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas.

Determine a medida do ângulo x.

26) (Colégio Naval-2000/2001) A, B, C e D são vértices consecutivos de um quadrado e PAB é um triângulo eqüilátero, sendo P interno ao quadrado ABCD. Qual é a medida do ângulo PCB?

a) 30° b) 45° c) 60° d) 75° e) 90°

27) (Colégio Naval-2001/2002) Considere um quadrado ABCD e dois triângulos eqüiláteros ABP e BCQ, respectivamente, interno e externo ao quadrado. A soma das medidas dos ângulos $A\hat{D}P, B\hat{Q}P$ e $D\hat{P}Q$ é igual a:

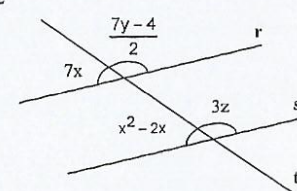
a) 270° b) 300° c) 330° d) 360° e) 390°

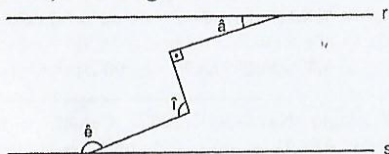
28) (Epcar-2000) Na figura seguinte, as retas r e s são paralelas. A medida do ângulo x é igual a

a) 230° b) 225° c) 220° d) 210°

29) (Epcar-2001) Sabendo-se que os ângulos internos de um triângulo são diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 4, tem-se que suas medidas valem

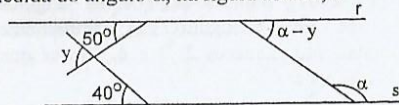
a) 40°, 60° e 80° c) 20°, 40° e 120°
b) 30°, 50° e 100° d) 50°, 60° e 70°

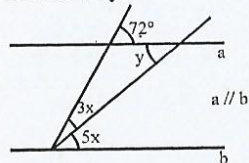
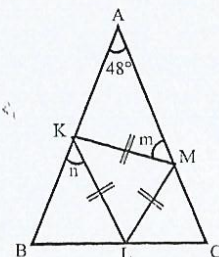
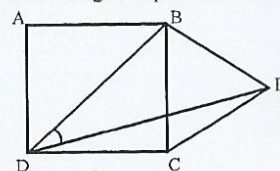
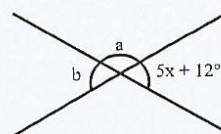
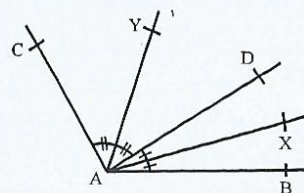
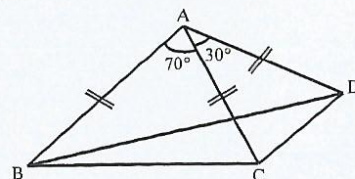
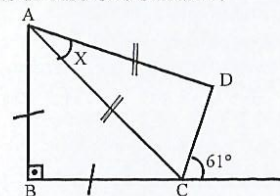
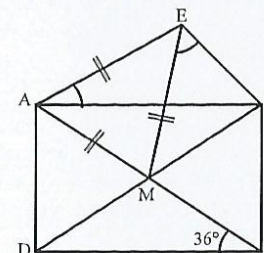
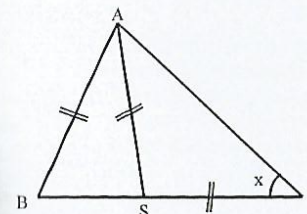
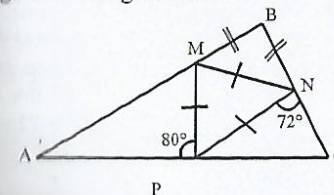
30) (Epcar-2003) Na figura abaixo, onde **r** e **s** são retas paralelas e t é uma transversal, ficam determinados os ângulos não nulos, que têm medidas em graus dadas pelas expressões 7x, $x^2 - 2x$, $\frac{7y-4}{2}$ e 3z. É correto afirmar que

a) x + y = z
b) y < z < x
c) y – x = z
d) x < y < z

31) (Epcar-2004) De um ponto **O**, tomado sobre uma reta **AB** (**O** entre **A** e **B**), traçam-se para um mesmo semi-plano de **AB**, as semi-retas **ON**, **OP** e **OQ**. Os ângulos AÔN, NÔP, PÔQ e QÔB medem, respectivamente, $80° - 3x$, $5x - 14°$, x e $4x + 9°$. O complemento do menor ângulo é
a) 68° b) 75° c) 78° d) 80°

32) (Epcar-2004) Considere as retas r e s (r//s) e os ângulos ê, î e â da figura abaixo

Pode-se afirmar que
a) ê + î + â = 270°
b) ê + î + â = 180°
c) ê + î = â
d) ê + î = â + 90°

33) (AFA-98) Seja o triângulo eqüilátero DEF, inscrito no triângulo isósceles ABC, com $\overline{AB} = \overline{AC}$ e DE paralelo a BC. Tomando-se $A\hat{D}E = \alpha$, $C\hat{E}F = \beta$ e $D\hat{F}B = \gamma$ pode-se afirmar que
a) $\alpha + \beta = 2\gamma$
b) $\gamma + \beta = 2\alpha$
c) $2\alpha + \gamma = 3\beta$
d) $\beta + 2\gamma = 3\alpha$

34) (AFA-2001) Sejam r e s retas paralelas. A medida do ângulo α, na figura abaixo, é

a) 115° b) 125° c) 135° d) 145°

35) Calcule x e y.

36) Na figura, **KLM** é um triângulo eqüilátero. Qual é o valor de **m – n**?

37) Na figura seguinte, **ABCD** é um quadrado e **BCE** é um triângulo eqüilátero. Calcule BD̂E.

38) Calcule x na figura, sabendo que a – b = 24°.

39) Na figura **BÂC = 120°**, $\overline{AX}$ é bissetriz de **BÂD** e $\overline{AY}$ é bissetriz de **CAD**. Calcule **XÂY**.

40) Na figura seguinte sabe-se que **AB = AC = AD**. Calcule as medidas dos ângulos do triângulo **BCD**.

41) Na figura a seguir, **ABC** é um triângulo retângulo e isósceles e **ACD** é um triângulo isósceles de base **CD**. Calcule **x**.

42) Na figura, **ABCD** é um retângulo e **AME** é um triângulo. Calcule **EÂB** e **BÊM**.

43) Na figura seguinte, $\overline{AS}$ é bissetriz interna do triângulo **ABC**. Calcule **x**, sabendo que **AB = AS = SC**.

44) Na figura seguinte, o triângulo **MNP** é eqüilátero e **BM = BN**. Calcule as medidas dos ângulos do triângulo **ABC**.

45) A, B, C, D são pontos distintos de uma reta, sucedendo-se na ordem alfabética, e tais que AB = CD = 3 cm, BC = 5 cm. Mostrar que AC = BD e que os segmentos AD e BC têm o mesmo ponto médio.

46) O, A, B e C são quatro pontos de uma reta, sucedendo-se na ordem OABC, e tais que OA = 3 cm, OB = 5 cm, 4AB + AC – 2BC = 6 cm. Calcular a distância entre os pontos O e C.

47) AB e BC são segmentos adjacentes, cujos pontos médios respectivos são M e N. Demonstrar que MN = (AB + BC)/2.

48) AD e BC são segmentos de uma mesma reta que têm o mesmo ponto médio. Demonstrar que AB = CD e AC = BD.

49) M é o ponto médio de um segmento AB e C é um ponto interno ai segmento MB. Demonstrar que MC = (CA – CB)/2.

50) ABC e A'B'C' são dois triângulos nos quais são iguais: 1) os lados BC e B'C'; 2) os ângulos B e B'; 3) as bissetrizes internas BD e B'D'. Mostrar que os dois triângulos são congruentes.

51) BM e CN são duas medianas de um triângulo ABC. Prolonga-se BM de um segmento MP = MB e CN de um segmento NQ = NC. Demonstrar que os pontos P e Q são eqüidistantes do vértice A.

52) Num triângulo ABC, traça-se a bissetriz do ângulo A e sobre ela toma-se os segmentos AE = AB e AF = AC. Une-se B com F e C com E. Mostrar que BF = CE.

53) M e N são pontos dos catetos AB e AC de um triângulo retângulo isósceles ABC, tais que AM = AN. As retas BN e CM cortam-se em O. Mostrar que o triângulo BOC é isósceles.

54) Demonstrar que são congruentes dois triângulos que têm respectivamente iguais um lado e as alturas relativas aos outros lados.

55) Provar que são congruentes dois triângulos que têm respectivamente iguais um lado, um ângulo adjacente a esse lado e a diferença dos outros dois lados.

56) Demonstrar que dois triângulos isósceles são congruentes quando têm iguais os perímetros e as alturas relativas às bases.

57) Determinar a medida do maior lado de um triângulo sabendo que é expressa por um número inteiro de centímetros e que os outros dois lados medem 2 cm e 9 cm.

58) AB = 12 cm e BC = 5 cm são dois lados de um triângulo isósceles ABC. Determinar a medida do lado AC.

59) O perímetro de um triângulo é 14 m. Determinar as medidas dos lados sabendo que são expressas por números inteiros de metros.

60) M é um ponto interno a um triângulo ABC. Une-se M com A e com B. Demonstrar que MA + MB < AC + CB.

61) Sobre os lados de um triângulo ABC marcam-se os pontos M, N e P, um em cada lado. Provar que o perímetro de MNP é menor que o perímetro de ABC.

62) Demonstrar que a hipotenusa de um triângulo retângulo é maior que a semi-soma dos catetos.

63) Demonstrar que a soma dos comprimentos das medianas de um triângulo está compreendida entre o semi-perímetro e o perímetro do triângulo.

64) Provar que o segmento que une um vértice de um triângulo com um ponto qualquer do lado oposto é menor que ao menos um dos outros dois lados.

65) Num triângulo ABC, o ângulo $\hat{A} = 60^\circ$ e o ângulo $\hat{B} = 100^\circ$. Prolonga-se o lado AB de um segmento BD = BC e une-se C com D. Achar os ângulos do triângulo BCD.

66) Achar o ângulo $\hat{A}$ de um triângulo ABC, sabendo que as bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ formam um ângulo de 132°.

67) ABC é um triângulo no qual $\hat{B} = 60^\circ$ e $\hat{C} = 20^\circ$. Calcular o ângulo formado pela altura relativa ao lado BC e a bissetriz do ângulo $\hat{A}$.

68) A bissetriz do ângulo $\hat{A}$ de um triângulo ABC intercepta o lado BC em um ponto D tal que AD = BD. Sabendo que o ângulo $\hat{C} = 66^\circ$, calcular os ângulos A e B do triângulo.

69) As bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo acutângulo ABC formam um ângulo de 128°. Calcular o ângulo agudo formado pelas alturas traçadas dos vértices B e C.

70) M e N são pontos da hipotenusa BC de um triângulo retângulo ABC, tais que MB = BA e NC = CA. Calcular o ângulo $M\hat{A}N$.

71) P é um ponto do lado AB de um triângulo ABC, tal que AP = PC = BC; além disso, CP é a bissetriz interna relativa ao vértice C. Calcular os ângulos do triângulo.

72) ABC é um triângulo no qual a bissetriz interna relativa ao vértice A é igual ao lado AB e a bissetriz interna relativa ao vértice C é igual ao lado AC. Calcular os ângulos do triângulo.

73) ABC é um triângulo no qual o ângulo $\hat{A}$ é o dobro do ângulo $\hat{B}$; P e Q são pontos dos lados BC e AC tais que AB = AP = PQ = QC. Calcular os ângulos do triângulo.

74) AH é a altura relativa à hipotenusa BC de um triângulo retângulo ABC. A bissetriz do ângulo BAH intercepta BC em D. Demonstrar que o triângulo ACD é isósceles.

75) Pelo vértice A de um triângulo ABC traçam-se duas retas que interceptam o lado BC nos pontos D e E, tais que os ângulos $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}E$ são respectivamente iguais aos ângulos C e B do triângulo. Demonstrar que AD = AE.

76) ABC é um triângulo retângulo e AH é a altura relativa à hipotenusa BC. Demonstrar que as bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $H\hat{A}C$ são perpendiculares.

77) Um observador pretendendo determinar a altura de uma torre AB, colocou-se no ponto D de forma que o ângulo $A\hat{D}B = 15^\circ$. Andando em direção à torre passou pelo ponto C tal que o ângulo $A\hat{C}B = 30^\circ$ e verificou que DC = 72 m. Determinar a altura da torre AB.

78) BD e CE são as bissetrizes internas relativas aos ângulos B e C de um triângulo ABC. O ângulo $B\hat{E}D = 95^\circ$ e o ângulo $B\hat{D}C = 82^\circ$. Calcular os ângulos do triângulo.

79) ABC é um triângulo no qual $\hat{A} = 120^\circ$; M e N são pontos do lado BC tais que MB = BA e NC = CA. Calcular o ângulo $M\hat{A}N$.

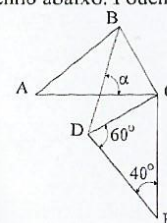
80) OX e OY são as bissetrizes de dois ângulos consecutivos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$, ambos agudos, e tais que $A\hat{O}B - B\hat{O}C = 36^\circ$; OZ é a bissetriz do ângulo $X\hat{O}Y$. Calcular o ângulo $B\hat{O}Z$.

81) $A\hat{O}B$ é um ângulo cuja bissetriz é OM e OC é uma semi-reta interna ao ângulo $A\hat{O}M$. Demonstrar que o ângulo $C\hat{O}M$ é igual à semi-diferença dos ângulos $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}C$.

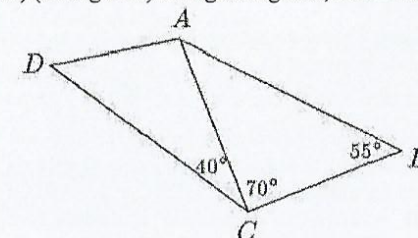
82) $X\hat{O}Y$ e $Y\hat{O}Z$ ($X\hat{O}Y > Y\hat{O}Z$) são dois ângulos consecutivos; OA, OB e OC são as bissetrizes respectivas dos ângulos $X\hat{O}Y$, $Y\hat{O}Z$ e $X\hat{O}Z$. Demonstrar que a bissetriz do ângulo $C\hat{O}Y$ também é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

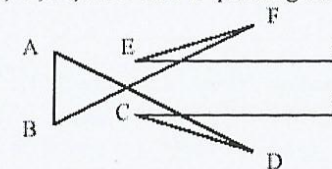
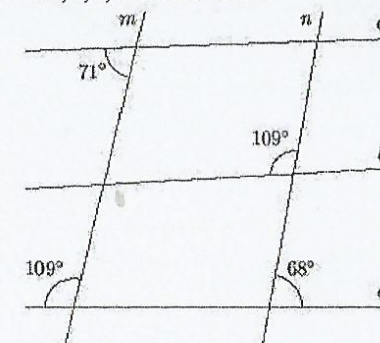
83) (Campina Grande-2004) Num triângulo ABC, as medidas dos ângulos internos de vértices B e C são dadas por $2x + 10^\circ$ e $4x - 40^\circ$. Se a medida do ângulo externo de vértices A é 5x, então os ângulos internos desse triângulo são iguais a:
A) 30°; 60° e 90° B) 30°, 70° e 80°
C) 20°, 80° e 80° D) 30°, 65° e 85°
E) 25°, 75° e 80°

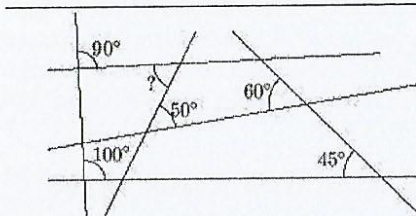
84) (Pará-2000) Em um triângulo ABC, o ponto D pertence ao lado AC de modo que **BD = DC**. Sabendo-se que **∠BAC = 40°, ∠ABC = 80°** então o ângulo **∠ADB** é igual a:
a) 30° b) 40° c) 50° d) 60° e) 70°

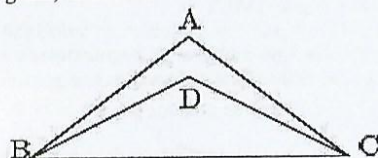
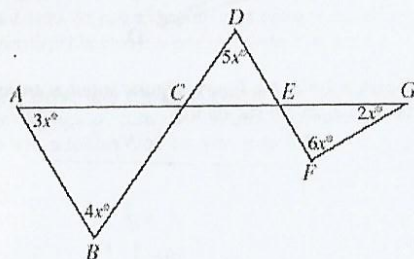
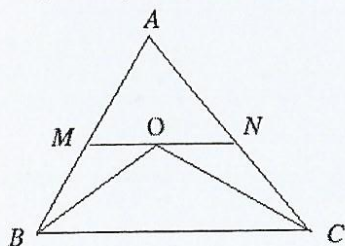
85) (OBM-2001) O triângulo *CDE* pode ser obtido pela rotação do triângulo *ABC* de 90° no sentido anti-horário ao redor de *C*, conforme mostrado no desenho abaixo. Podemos afirmar que α é igual a:

a) 75° b) 65° c) 70° d) 45° e) 55°

86) (Pará-2002) Seja ABC um triângulo que possui $\angle B\hat{A}C = 36^\circ$ e $\angle A\hat{B}C = 21^\circ$. Sobre o lado $\overline{AB}$ marcam-se os pontos D e E de modo que $\overline{AD} = \overline{DC}$ e $\overline{EB} = \overline{EC}$. Determinar a medida do ângulo $\angle D\hat{C}E$.

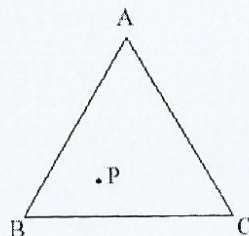
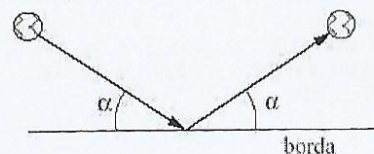
87) (Portugal-98) Na figura seguinte, $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Quanto mede o ângulo $D\hat{A}C$?

88) (Goiás-99) Na figura abaixo os segmentos de reta r e s são paralelos. Então a soma dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{E}$ e $\hat{F}$ será de quantos graus?

89) (Bélgica-2003) Na figura, alguns ângulos entre as retas a, b, c, m e n são dados.

Quais retas são paralelas?
a) a e b b) b e c c) a e c d) m e n
e) não existem duas retas paralelas

90) (Bélgica-2003) Seis retas intersectam-se com os ângulos mostrados na figura.

Determine o valor do lado do ângulo indicado com o sinal de interrogação.
a) 45° b) 50° c) 55° d) 60° e) 65°

91) (Canadian Open Challenge-97) Em um triângulo ABC, ∠A = 120°. Um ponto D está no interior do triângulo tal que ∠DBC = 2.∠ABD e ∠DCB = 2.∠ACD. Determine a medida, em graus, de ∠BDC.

92) (Canadian Open Challenge-2001) No diagrama abaixo, qual o valor de x?

93) (Panamá-2001) Na figura, $\overline{BO}$ bissecta o ângulo ∠CBA, $\overline{CO}$ bissecta o ângulo ∠ACB e $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Se AB = 12, BC = 24 e AC = 18, então o perímetro de ΔAMN é:

a) 30 b) 33 c) 36 d) 39 e) 42

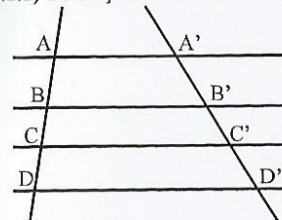
94) (Campina Grande-2004) Sobre o lado BC do quadrado BCDE, constrói-se, externamente, o triângulo ABC tal que AC = BC. Então, o ângulo DÂB é igual a:
a) 30° b) 40° c) 50° d) 60° e) 45°

95) (São Paulo-2003) Fernando e Paulo construíram uma mesa de bilhar com formato de um triângulo eqüilátero, como se vê na figura a seguir:

Descobriram que quando a bola bate na borda do tabuleiro com um certo ângulo, ela rebate com mesmo ângulo.

a) Numa bola situada no ponto P, Paulo deu a primeira tacada, perpendicularmente ao lado AB. Depois de bater pela primeira vez na borda da mesa, a bola passou pelo ponto P. Depois disso, a bola voltará a passar pelo ponto P novamente? Em caso afirmativo, faça um desenho mostrando a trajetória da bola e diga quantas vezes a bola bate na borda da mesa até voltar a passar pelo ponto P.
b) Numa bola situada no ponto P, agora Fernando deu a primeira tacada, paralela ao lado AC. A bola voltará a passar pelo ponto P novamente? Em caso afirmativo, faça um desenho mostrando a trajetória da bola e diga quantas vezes a bola bate na borda da mesa até voltar a passar pelo ponto P.

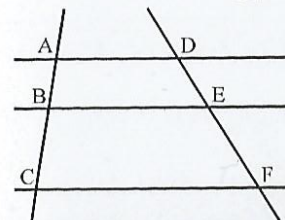
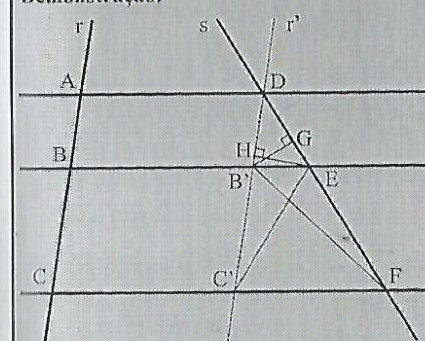
96) (Argentina-2001) Seja ABC um triângulo com Ĉ = 85°. Considere um ponto P no lado AB, um ponto Q no lado BC e um ponto R no lado AC tais que AP = AR e BP = BQ. Calcule a medida de ∠QPR.

Semelhança de Triângulos e Triângulos Retângulos

2.1) TEOREMA DE TALES

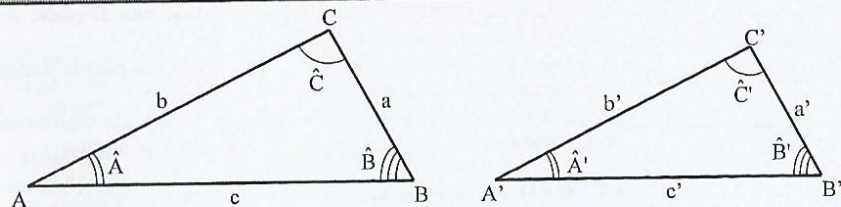
2.1.1) Definições:

- Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.
- Transversal do feixe de retas paralelas é uma reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe.
- Pontos correspondentes de duas transversais são pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe.
- Segmentos correspondentes de duas transversais são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.

Na figura acima: A e A', B e B', C e C', D e D' são pares de pontos correspondentes.
$\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$, $\overline{BD}$ e $\overline{B'D'}$ são pares de segmentos correspondentes.

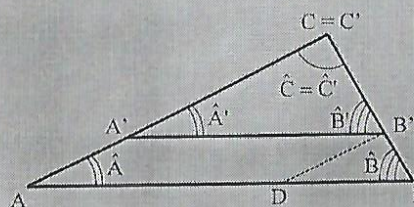
2.1.2) TEOREMA DE TALES: "Se três retas paralelas cortam duas transversais nos pontos A, B, C, D, E, F, respectivamente, então $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$."

Demonstração:

Essa demonstração necessita apenas do conhecimento que a área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura relativa, tomadas na mesma unidade (consulte o cap. 4 deste livro para quaisquer dúvidas).
Inicialmente tracemos, passando por D, uma reta r' paralela à reta r, como indica a figura.
Sejam B' e C' as interseções de r' com BE e CF, respectivamente.
A área do triângulo DB'E pode ser calculada de duas maneiras $\frac{\overline{DB'}.\overline{EH}}{2}$ ou $\frac{\overline{DE}.\overline{B'G}}{2}$.
Da igualdade conclui-se que $\overline{DB'}.\overline{EH} = \overline{DE}.\overline{B'G}$
Como $\overline{DB'} = \overline{AB}$ temos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{B'G}}{\overline{EH}}$ (1).

Os triângulos C'B'E e FEB' têm áreas iguais (mesma base $\overline{B'E}$ e mesma altura).
Logo $\frac{\overline{B'C'}.\overline{EH}}{2} = \frac{\overline{EF}.\overline{B'G}}{2}$. Como $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ temos $\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{B'G}}{\overline{EH}}$ (2).
De (1) e (2) vem $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$.

2.2) SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Definição: Sejam $a \leq b \leq c$ os lados de ΔABC e $a' \leq b' \leq c'$ os lados de $\Delta A'B'C'$. Dizemos que ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são semelhantes quando $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, em que k é uma constante denominada razão de semelhança.

Os pares de lados (a,a'), (b, b') e (c, c') são denominados pares de lados homólogos.
Simbolicamente, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ significa que ΔABC é semelhante a $\Delta A'B'C'$.

2.2.1) Teorema 1: Sejam $\hat{A} \leq \hat{B} \leq \hat{C}$ os ângulos de ΔABC e $\hat{A}' \leq \hat{B}' \leq \hat{C}'$ os ângulos de $\Delta A'B'C'$. Se $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$ então $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Demonstração:
Como $\hat{C} = \hat{C}'$, então pode-se montar a seguinte figura com os dois triângulos.

Desde que $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$, então $AB \,//\, A'B'$.

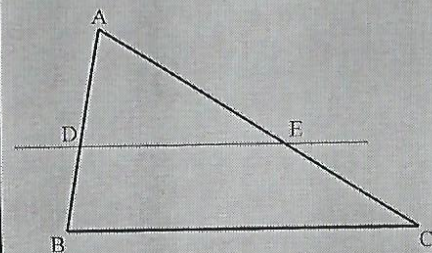
Pelo Teorema de Tales: $\frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{CB}}$.

Por B', tracemos uma paralela a $\overline{AC}$, que intersecta $\overline{AB}$ em D. Como AA'B'B é um paralelogramo, então $\overline{A'B'} = \overline{AD}$.

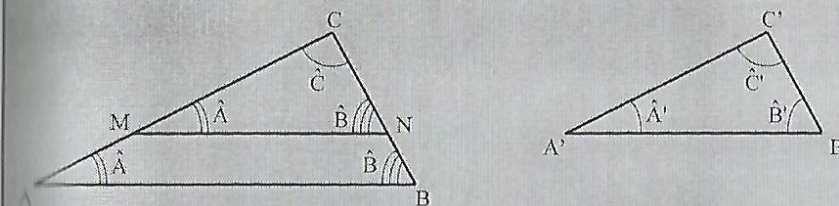
Pelo Teorema de Tales: $\frac{\overline{C'B'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{C'B'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

Deste modo, concluímos que $\frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, ou seja, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

2.2.2) Teorema 2: Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intersecta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ele determina é semelhante ao primeiro.

Demonstração:

Considere o triângulo ABC e sejam D e E os pontos que uma reta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, corta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.
Observe que os ângulos internos de ΔABC são iguais aos ângulos internos de ΔADE. Assim, pelo teorema anterior, temos que $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

2.2.3) Teorema 3: Sejam $\hat{A} \leq \hat{B} \leq \hat{C}$ os ângulos de ΔABC e $\hat{A}' \leq \hat{B}' \leq \hat{C}'$ os ângulos de $\Delta A'B'C'$. Se $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ então $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$.

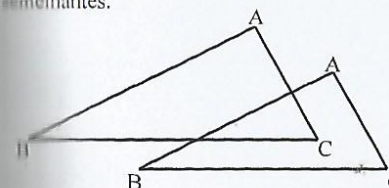
Demonstração:
Considere a construção abaixo, onde $\overline{CM} = \overline{C'A'}$ e $MN \,//\, AB$.

Como $MN \,//\, AB$, então $\Delta ABC \sim \Delta MNC$: $\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}}$.

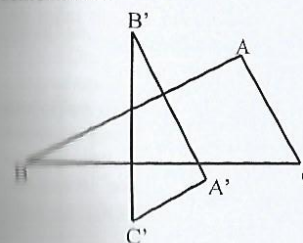
Uma vez que $\overline{CM} = \overline{C'A'}$: $\frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}}$ (1)

Desde que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$: $\frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ (2)

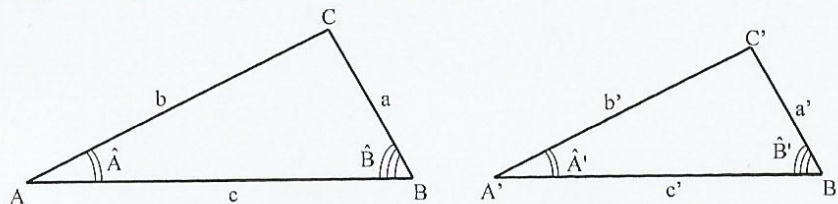
De (1) e (2) concluímos que ΔMNC e $\Delta A'B'C'$ são congruentes, e, portanto: $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$.

2.2.4) Propriedades: A semelhança de triângulos obedece às seguintes propriedades:
a) Reflexiva: $\Delta ABC \sim \Delta ABC$
b) Simétrica: $\Delta ABC \sim \Delta RST \Leftrightarrow \Delta RST \sim \Delta ABC$
c) Transitiva: $\left.\begin{matrix}\Delta ABC \sim \Delta RST \\ \Delta RST \sim \Delta XYZ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta XYZ$

2.2.5) Conseqüências do Teorema 1:
i) Dois triângulos que possuem os lados (ou seus prolongamentos) respectivamente paralelos são semelhantes.

Se $AB \,//\, A'B'$, $AC \,//\, A'C'$ e $BC \,//\, B'C'$ então $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

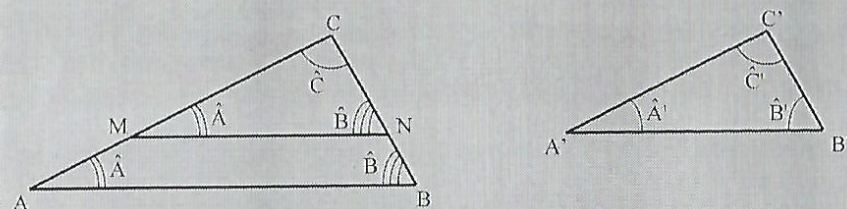
ii) Dois triângulos que possuem os lados (ou seus prolongamentos) respectivamente perpendiculares são semelhantes.

Se $AB \perp A'B'$, $AC \perp A'C'$ e $BC \perp B'C'$ então $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

2.2.6) Casos de Semelhança de Triângulos

1º Caso: Se dois ângulos de um triângulo A'B'C' são respectivamente congruentes a dois ângulos de um triângulo ABC, esses triângulos são semelhantes.

Demonstração:
Já foi demonstrado que a soma dos ângulos internos de um triângulo é constante e igual a 180°. Assim, se dois ângulos forem congruentes (por exemplo, na figura temos $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$) então certamente teremos $\hat{C} = \hat{C}'$. Assim, pelo Teorema 1, segue que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

2º Caso: Se dois lados de um triângulo A'B'C' são respectivamente proporcionais a dois lados de um triângulo ABC e se forem congruentes os ângulos formados por esses lados, os triângulos são semelhantes.

Demonstração:
Suponhamos, por hipótese, que: $\hat{C} = \hat{C}'$ e $\frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{CB}}$ (1).

Considere a construção abaixo, onde $\overline{CM} = \overline{C'A'}$ e MN // AB.

Como MN // AB, então $\Delta ABC \sim \Delta MNC$: $\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}}$.

Uma vez que $\overline{CM} = \overline{C'A'}$, concluímos que $\frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}}$ (2)

De (1) e (2) temos que $\overline{CN} = \overline{C'B'}$.

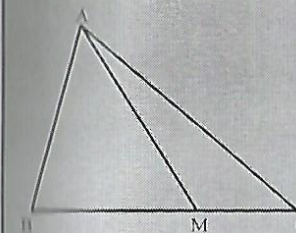
Desde que $\overline{CN} = \overline{C'B'}$, $\overline{CM} = \overline{C'A'}$ e $\hat{C} = \hat{C}'$, temos que ΔMNC e $\Delta A'B'C'$ são congruentes.

Como $\Delta MNC \sim \Delta ABC$, então $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

3º Caso: Se os três lados de um triângulo A'B'C' são respectivamente proporcionais aos três lados de um triângulo ABC, esses triângulos são semelhantes.

$$\left[\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k\right] \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{bmatrix}$$

2.2.7) Teorema: A razão entre os comprimentos de duas cevianas homólogas de dois triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança.

Demonstração:

Sejam ABC e A'B'C' dois triângulos semelhantes com razão de semelhança igual a k, com A' correspondente a A, B' correspondente a B e C' correspondente a C. Considere o ponto M $\in$ BC e o ponto M' $\in$ B'C' de modo que $\frac{BM}{CM} = \frac{B'M'}{C'M'} = m$.

$$\frac{BM}{CM} = m \Rightarrow \frac{BM + CM}{CM} = m + 1 \Rightarrow \frac{BC}{CM} = m + 1 \quad (1)$$

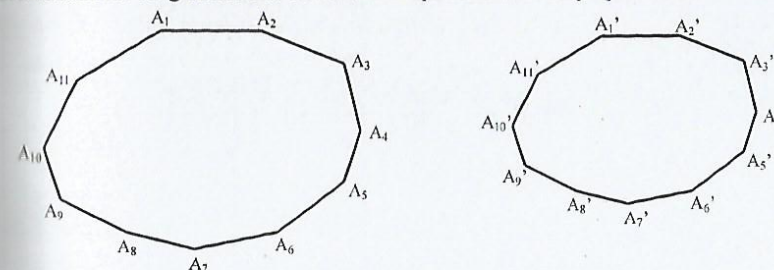
Analogamente: $\frac{B'C'}{C'M'} = m + 1$ (2)

$$(1) \text{ e } (2) \Rightarrow \frac{BC}{CM} = \frac{B'C'}{C'M'} \Rightarrow \frac{CM}{C'M'} = \frac{BC}{B'C'} = k.$$

Uma vez que $\frac{CM}{C'M'} = \frac{AC}{A'C'} = k$ e $\angle MCA = \angle M'C'A'$ então temos que $\Delta AMC \sim \Delta A'M'C' \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = k$.

Como conseqüência deste teorema, temos que em dois triângulos semelhantes a razão entre duas medianas homólogas, duas alturas homólogas e duas bissetrizes homólogas é igual a razão de semelhança entre esses dois triângulos.

2.3) SEMELHANÇA DE POLÍGONOS

2.3.1) Definição: Dois polígonos são semelhantes se e somente se os ângulos internos forem ordenadamente congruentes e se os lados correspondentes forem proporcionais.

Por exemplo, analisando os polígonos acima, considerando que o vértice A_i é correspondente ao vértice A_i' ($1 \leq i \leq 11$), teremos que os dois polígonos são semelhantes se e somente se $\hat{A}_1 \equiv \hat{A}_1'$, $\hat{A}_2 \equiv \hat{A}_2'$, $\hat{A}_3 \equiv \hat{A}_3'$, ..., $\hat{A}_{11} \equiv \hat{A}_{11}'$ e $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1'A_2'}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_2'A_3'}} = ... = \frac{\overline{A_{11}A_1}}{\overline{A_{11}'A_1'}} = k$, onde k é a razão de semelhança entre os dois polígonos.

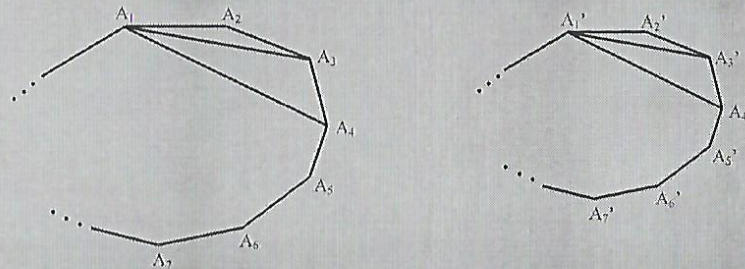
Observe que no caso da semelhança entre triângulos não é necessário analisar separadamente a congruência entre os ângulos correspondentes e a proporção entre os lados homólogos pois, no caso específico de triângulos, a ocorrência de uma destas condições de semelhança implica na outra. Isto acontece porque uma vez definidos os três lados de um triângulo (satisfazendo as desigualdades triangulares), existe somente um triângulo com estes lados. O mesmo não ocorre com os outros polígonos, pois com os mesmos comprimentos dos lados existem infinitas possibilidades para as configurações dos polígonos.

2.3.2) Teorema: A razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes é igual à razão de semelhança.

Demonstração:
Sejam $A_1A_2...A_n$ e $A_1'A_2'...A_n'$ dois polígonos semelhantes, cada um de n lados, em que o vértice A_i é correspondente ao vértice A_i' $(1 \le i \le n)$, sendo 2p e 2p' seus perímetros, respectivamente. Assim, tem-se que $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1'A_2'}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_2'A_3'}} = ... = \frac{\overline{A_nA_1}}{\overline{A_n'A_1'}} = k$, onde k é a razão de semelhança entre os dois polígonos.
Aplicando propriedade das proporções:

$$k = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1'A_2'}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_2'A_3'}} = ... = \frac{\overline{A_nA_1}}{\overline{A_n'A_1'}} = \frac{\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + ... + \overline{A_nA_1}}{\overline{A_1'A_2'} + \overline{A_2'A_3'} + ... + \overline{A_n'A_1'}} = \frac{2p}{2p'}$$

2.3.3) Teorema: Dois polígonos convexos semelhantes podem ser divididos em um igual número de triângulos correspondentes semelhantes.

Demonstração:

Sejam $A_1A_2...A_n$ e $A_1'A_2'...A_n'$ dois polígonos semelhantes, cada um de n lados, em que o vértice A_i é correspondente ao vértice A_i' $(1 \le i \le n)$. Tracemos todas as diagonais possíveis a partir de A_1 e A_1'. Desta maneira, fica claro que o triângulo $A_1A_2A_3$ é correspondente ao triângulo $A_1'A_2'A_3'$, que o triângulo $A_1A_3A_4$ é correspondente ao triângulo $A_1'A_3'A_4'$, e assim por diante.

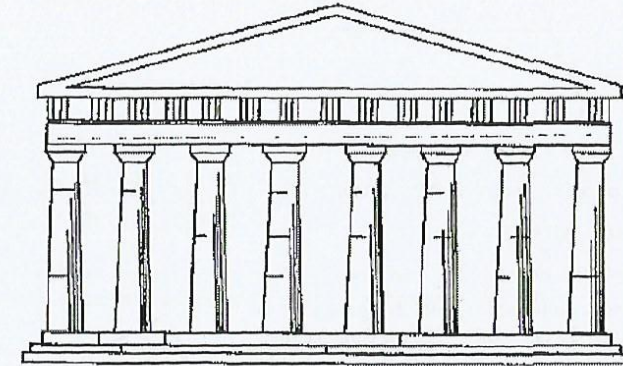
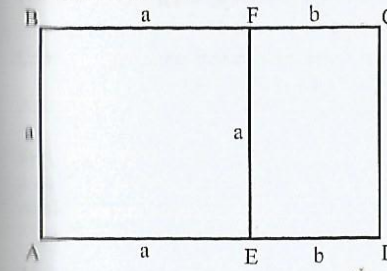
Uma vez que $\hat{A}_2 = \hat{A}_2'$ e $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1'A_2'}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_2'A_3'}} = k$ então $\Delta A_1A_2A_3 \sim \Delta A_1'A_2'A_3'$ (1° caso).

Assim, concluí-se que $\angle A_2A_3A_1 = \angle A_2'A_3'A_1'$ e $\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1'A_3'}} = k$.

Como $\hat{A}_1 = \hat{A}_1'$ e $\angle A_2A_3A_1 = \angle A_2'A_3'A_1'$ então $\angle A_1A_3A_4 = \angle A_1'A_3'A_4'$. Disto e do fato de que $\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1'A_3'}} = \frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{A_3'A_4'}} = k$ implicam que $\Delta A_1A_3A_4 \sim \Delta A_1'A_3'A_4'$ (2° caso).

Portanto, concluí-se que $\angle A_3A_4A_1 = \angle A_3'A_4'A_1'$ e $\frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1'A_4'}} = k$, e assim sucessivamente para os outros casos, provando o teorema.

2.3.4) Retângulo Áureo

Você já reparou que os valores das razões das dimensões de diversos retângulos observados no cotidiano (jornais, outdoors, janelas de casas ou apartamentos, etc.) aparentemente são iguais? Por exemplo, as dimensões de um jornal são, aproximadamente, 52 x 32 cm. A razão de suas dimensões vale $\frac{52}{32} = 1,625$. O Pathernon, uma das obras mais antigas e admiradas do mundo, possui de forma destacada um retângulo em sua fachada cuja razão das dimensões é aproximadamente 1,62.

Note que este valor é relativamente próximo da razão entre as dimensões de um jornal. Este fato não é mera coincidência. Arquitetos e artistas consideram que retângulos cujas razões das dimensões sejam aproximadamente 1,62 são mais agradáveis visualmente e possuem grande valor estético. Estes retângulos são chamados retângulos áureos e são definidos da seguinte maneira: "ABCD é um retângulo áureo se dele suprimirmos um quadrado, como ABFE, e o retângulo restante, CDEF, seja semelhante ao retângulo original".

Se a + b e a são as dimensões do retângulo original, a definição anterior é equivalente à expressão $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$. Assim: $a^2 = ab + b^2 \Rightarrow b^2 + ab - a^2 = 0 \Rightarrow$ $b = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$. Desde que $b > 0$ então tem-se $b = a\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Logo, a razão entre as dimensões do retângulo é: $\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618$.

O valor $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ é denominado de "razão áurea". O retângulo áureo está diretamente ligado à divisão áurea de um segmento, exposto neste livro no capítulo 1. A divisão áurea é conhecida desde os pitagóricos do século 5 A.C. Na antiguidade a divisão de um segmento na razão áurea era tão comum que era denominada simplesmente de "seção". A expressão "divisão áurea" foi usada pela primeira vez por Kepler (1571-1630), que escreveu: "A Geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro, a divisão áurea. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro e o segundo a uma jóia preciosa".

Exemplos:

1) (UFMG-89) Na figura, os segmentos BC e DE são paralelos, $\overline{AB} = 15$ m, $\overline{AD} = 5$ m e $\overline{AE} = 6$ m. A medida do segmento CE é, em metros:

a) 5

b) 6

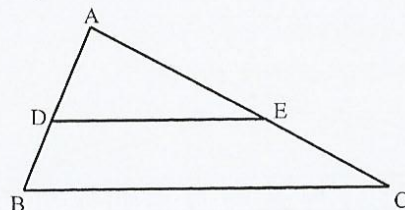
c) 10

d) 12

e) 18

Solução:

Como BC e DE são paralelos, então $\Delta ABC \sim \Delta ADE$: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{15}{5} = \frac{AC}{6} \Rightarrow AC = 18$

Deste modo: $CE = AC - AE = 18 - 6 = 12$

2) (FGV-2005) Os lados do triângulo ABC da figura ao lado são: AB = 28 cm, AC = 21 cm e BC = 35 cm. Uma paralela ao lado $\overline{BC}$ intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ nos pontos C e E, respectivamente. Determine a medida dos lados BD, DE e EC, sabendo que o perímetro do quadrilátero BDEC é 74 cm.

Solução:

Como o perímetro do quadrilátero BDEC é 74 cm então:

$BD + EC + DE + 35 = 74 \Rightarrow BD + EC + DE = 39$

Como DE // BC então $\Delta ADE \sim \Delta ABC$: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{28 - BD}{28} = \frac{21 - EC}{21} = \frac{DE}{35}$

Utilizando uma propriedade de proporções:

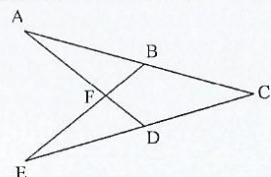
$$\frac{28 - BD}{28} = \frac{21 - EC}{21} = \frac{DE}{35} = \frac{(28 - BD) + (21 - EC) - DE}{28 + 21 - 35} = \frac{49 - (BD + EC + DE)}{14} = \frac{49 - 39}{14} = \frac{5}{7}$$

Assim:

i) $\frac{28 - BD}{28} = \frac{5}{7} \Rightarrow 28 - BD = 20 \Rightarrow BD = 8$

ii) $\frac{21 - EC}{21} = \frac{5}{7} \Rightarrow 21 - EC = 15 \Rightarrow EC = 6$

iii) $\frac{DE}{35} = \frac{5}{7} \Rightarrow DE = 25$

3) (EEAR-2002) Na figura, se o ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{E}$, então a <u>relação falsa</u> é

a) $CA \cdot CB = CE \cdot CD$ b) $\frac{CA - CE}{CE} = \frac{CD - CB}{CD}$

c) $\frac{CA + CD}{CE + CB} = \frac{CD}{CB}$ d) $\frac{CA \cdot CD \cdot DA}{CE \cdot CB \cdot EB} = \left(\frac{CD}{CB}\right)^3$

Solução:

A relação incorreta é da alternativa b. Observe as justificativas abaixo.

a) Se $\hat{A} \equiv \hat{E}$ então temos que $\Delta ACD \sim \Delta ECB$: $\frac{CA}{CE} = \frac{CD}{CB} = \frac{DA}{EB} \Rightarrow CA \cdot CB = CE \cdot CD$.

b) Pela expressão de do item anterior: $\frac{CA}{CE} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow \frac{CA}{CE} - 1 = \frac{CD}{CB} - 1 \Rightarrow \frac{CA - CE}{CE} = \frac{CD - CB}{CB}$.

c) Utilizando propriedade de proporções: $\frac{CA}{CE} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow \frac{CA}{CE} = \frac{CD}{CB} = \frac{CA + CD}{CE + CB}$.

d) $\frac{CA \cdot CD \cdot DA}{CE \cdot CB \cdot EB} = \frac{CD}{CB}\frac{CD}{CB}\frac{CD}{CB} = \left(\frac{CD}{CB}\right)^3$.

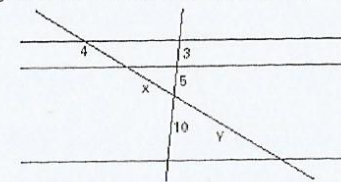
4) (Unesp-2003) Considere 3 retas coplanares paralelas, r, s e t, cortadas por 2 outras retas, conforme a figura. Os valores dos segmentos identificados por x e y são, respectivamente,

a) 3/20 e 3/40

b) 6 e 11

c) 9 e 13

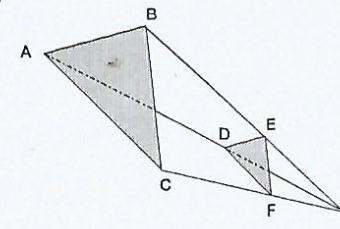
d) 11 e 6

e) 20/3 e 40/3

Solução:

Pelo Teorema de Tales: $\frac{4}{x + y} = \frac{3}{15} \Rightarrow x + y = 20$.

Como os triângulos que existem entre as retas s e t são semelhantes: $\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \Rightarrow y = 2x$.

Assim: $3x = 20 \Rightarrow x = 20/3 \Rightarrow y = 40/3$.

5) (UFPE-2000) Sejam **ABC** e **DEF** triângulos tais que **AB**, **BC** são paralelos a **DE**, **EF** respectivamente e as retas passando por **B** e **E**; **A** e **D**; **C** e **F** são concorrentes em **V** conforme a ilustração abaixo. Analise as sentenças seguintes:

(1) VED e VBA são triângulos semelhantes.

(2) $\frac{VE}{VB} = \frac{ED}{BA} = \frac{VD}{VA}$

(3) $\frac{VD}{VA} = \frac{VF}{VC}$ e os triângulos VDF e VAC são semelhantes

(4) AC e DF são paralelos.

Solução:
(1) Verdadeira. Como AB // DE então $\Delta VED \sim \Delta VBA$.

(2) Verdadeira. Como $\Delta VED \sim \Delta VBA$ então $\dfrac{VE}{VB} = \dfrac{ED}{BA} = \dfrac{VD}{VA}$ (*)

(3) Verdadeira. Como BC // EF então $\Delta BCV \sim \Delta EFV \Rightarrow \dfrac{VE}{VB} = \dfrac{VF}{VC} = \dfrac{EF}{BC}$ (**). De (*) e (**)

concluímos que $\dfrac{VD}{VA} = \dfrac{VF}{VC}$ (***).

(4) Verdadeira. Do fato de $\angle FVD = \angle CVA$ e da expressão (***) temos que $\Delta FVD \sim \Delta CVA \Rightarrow$ AC e DF são paralelos.

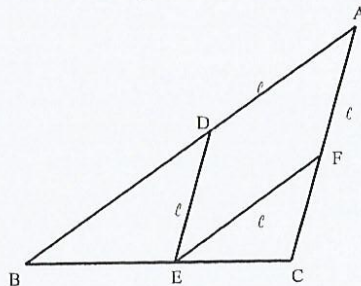
6) (Cesgranrio-79) O losango ADEF está inscrito no triângulo ABC, como mostra figura. Se AB = 12 m, BC = 8 m e AC = 6 m, o lado ℓ do losango mede:

a) 5 m

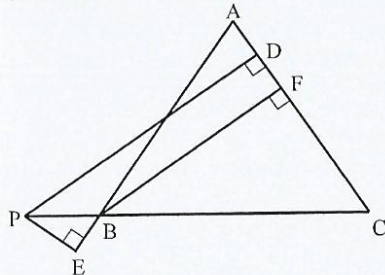
b) 3 m

c) 2 m

d) 4 m

e) 8 m

Solução:
Desde que DE e AC são paralelos, então $\Delta DBE \sim \Delta ABC$:

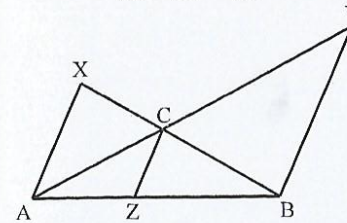
$\dfrac{DE}{AC} = \dfrac{DB}{AB} \Rightarrow \dfrac{\ell}{6} = \dfrac{12-\ell}{12} \Rightarrow 12\ell = 72 - 6\ell \Rightarrow 18\ell = 72 \Rightarrow \ell = 4$ m

7) Em um triângulo isósceles ABC (AB = AC), $\overline{CB}$ é prolongado a partir de B até P. Uma reta tirada a partir de P, paralela à altura $\overline{BF}$, encontra $\overline{AC}$ em D (onde D está entre A e F). A partir de P é traçada uma perpendicular, encontrando o prolongamento de $\overline{AB}$ em E, de forma que B está entre E e A. Expresse BF em termos de PD e PE.

Solução:
Desde que ΔABC é isósceles $\Rightarrow \angle ACB = \angle ABC$.

Como $\angle PBE = \angle ACB$ e $\angle PEB = \angle BFC$ temos que $\Delta BFC \sim \Delta PEB$: $\dfrac{PE}{BF} = \dfrac{PB}{BC}$.

Em ΔPDC, como $\overline{BF} // \overline{PD}$, então $\Delta PDC \sim \Delta BFC$: $\dfrac{PD}{BF} = \dfrac{PB + BC}{BC} \Rightarrow \dfrac{PD}{BF} = \dfrac{PB}{BC} + 1 \Rightarrow$

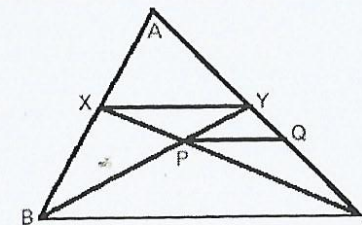
$\dfrac{PD}{BF} - 1 = \dfrac{PB}{BC} \Rightarrow \dfrac{PD - BF}{BF} = \dfrac{PB}{BC} \Rightarrow \dfrac{PD - BF}{BF} = \dfrac{PE}{BF} \Rightarrow BF = PD - PE$.

8) Em um triângulo ABC, Z é um ponto da base $\overline{AB}$ e $\overline{CZ}$ é traçado. Uma reta é traçada a partir de A paralela à $\overline{CZ}$ encontrando $\overline{BC}$ em X. Uma reta é traçada a partir de B paralela à $\overline{CZ}$ encontrando $\overline{AC}$ em Y. Prove que $\dfrac{1}{AX} + \dfrac{1}{BY} = \dfrac{1}{CZ}$.

Solução:
Desde que $\overline{CZ} // \overline{BY}$ então $\Delta ACZ \sim \Delta AYB$: $\dfrac{AZ}{CZ} = \dfrac{AB}{BY}$ (1)

Desde que $\overline{CZ} // \overline{AX}$ então $\Delta BCZ \sim \Delta BXA$: $\dfrac{BZ}{CZ} = \dfrac{AB}{AX}$ (2)

(1) + (2): $\dfrac{AZ}{CZ} + \dfrac{BZ}{CZ} = \dfrac{AB}{BY} + \dfrac{AB}{AX}$

Mas AZ + BZ = AB, ou seja, $\dfrac{AB}{CZ} = \dfrac{AB}{BY} + \dfrac{AB}{AX} \Rightarrow \dfrac{1}{CZ} = \dfrac{1}{AX} + \dfrac{1}{BY}$

9) (Olimpíada de Wisconsin-2004) Em um triângulo ABC, a reta XY é traçada paralela à BC, onde X pertence ao lado AB e Y pertence ao lado AC. Seja P o ponto onde BY encontra CX e suponha que a reta passando por P paralela à BC encontra YC em Q. Se CQ = 2 e QY = 1, determine o valor de AC.

Solução:
Desde que PQ // BC: $\Delta YBC \sim \Delta YPQ$: $\dfrac{YQ}{YC} = \dfrac{PQ}{BC} \Rightarrow \dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{1}{3}$ (1)

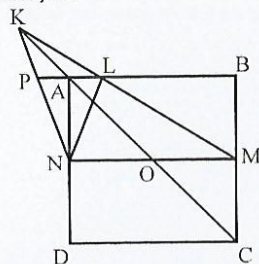
Como XY // BC: $\Delta XYC \sim \Delta PQC$: $\dfrac{XY}{PQ} = \dfrac{YC}{QC} \Rightarrow \dfrac{XY}{PQ} = \dfrac{3}{2}$ (2)

Multiplicando as expressões (1) e (2) obtemos $\dfrac{XY}{BC} = \dfrac{1}{2}$.

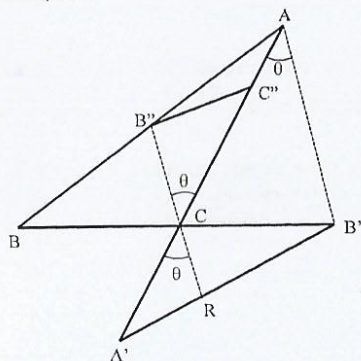
Uma vez que XY // BC temos $\Delta AXY \sim \Delta ABC$:

$$\frac{AY}{AC} = \frac{XY}{BC} \Rightarrow \frac{AC-3}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2AC - 6 = AC \Rightarrow AC = 6.$$

10) (Torneio das Cidades-2005) M e N são os pontos médios dos lados BC e AD, respectivamente, de um quadrado ABCD. K é um ponto arbitrário no prolongamento da diagonal AC a partir de A. O segmento KM intersecta o lado AB em um ponto L. Prove que ∠KNA = ∠LNA.

Solução:

Suponha que AC corta MN em O e o prolongamento de BA corta KN em P. Uma vez que PL // NM, então temos que ΔKPL ~ ΔKNM. Como KO é mediana de ΔKNM então KA é mediana de ΔKPL, fazendo com que A seja o ponto médio de PL.
Deste modo, os triângulos PAN e LAN são congruentes (PA ≡ LA, AN comum e ∠PAN ≡ ∠LAN). Assim, temos diretamente que ∠KNA = ∠LNA.

11) (Torneio das Cidades-2000) ABC é um triângulo. O ponto A' é tomado na reta AC de modo que AA' = AB. O ponto B' é tomado na reta BC de modo que BB' = AB. O ponto B" é tomado na reta BA de modo que BB" = BC. O ponto C" é tomado sobre a reta CA de modo que CC" = BC. Determine a razão A'B'/B"C" em termos dos lados do triângulo ABC.

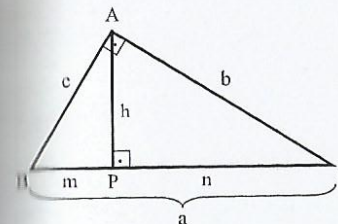
Solução:

Seja R a intercessão de A'B' e o prolongamento de B"C.
Como BB" = BC, BA = BB' e ∠B"BC ≡ ∠ABB' então temos que ΔB"BC ~ ΔABB':

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{CB''}{BB''} \Rightarrow \frac{AB'}{AA'} = \frac{CB''}{CC''} \quad (1)$$

Além disso, podemos concluir que B"C // AB'.
Portanto: ∠B'AC = ∠ACB" = ∠RCA' = θ (2)
Desde que CR // AB' então ΔA'CR ~ ΔAA'B' (3):

$$\frac{CR}{AB'} = \frac{CA'}{AA'} \Rightarrow \frac{CR}{A'C} = \frac{AB'}{AA'} \,(4)$$

De (1) e (4) obtemos $\frac{CR}{A'C} = \frac{CB''}{CC''}$. Isto e (2) implicam que ΔB"CC" ~ ΔA'CR. De (3) temos ΔA'CR ~ ΔAA'B', onde concluímos que ΔB"CC" ~ ∠AA'B' $\Rightarrow \frac{A'B'}{B''C''} = \frac{AA'}{CC''} = \frac{c}{a}$.

2.4) RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Nas expressões abaixo adote que A é o vértice do ângulo reto, P é o pé da altura relativa à hipotenusa (AP = h) e P divide BC em dois segmentos de modo que BP = m e CP = n.

2.4.1) Propriedades:

i) ΔCBA ~ ΔABP $\Rightarrow \frac{BP}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{m}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow$ $\boxed{c^2 = m.a}$

ii) ΔCBA ~ ΔCAP $\Rightarrow \frac{CP}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow$ $\boxed{b^2 = n.a}$

iii) ΔCBA ~ ΔABP $\Rightarrow \frac{AC}{AP} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{b}{h} = \frac{a}{c} \Rightarrow$ $\boxed{a.h = b.c}$

iv) De i e ii temos que $b^2.c^2 = m.n.a^2 \Rightarrow m.n = \left(\frac{b.c}{a}\right)^2 \Rightarrow$ $\boxed{m.n = h^2}$

v) $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{n.a} + \frac{1}{m.a} = \frac{1}{a}\left(\frac{m+n}{m.m}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{a}{h^2}\right) \Rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}}$

2.4.2) Teorema de Pitágoras

Provavelmente este se trata do mais famoso teorema da matemática, principalmente pela simplicidade de seu enunciado:

Em um triângulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa

Documentos históricos comprovam que os babilônios conheciam casos particulares desse teorema, como por exemplo que o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo. Porém acredita-se que a primeira demonstração tenha surgido realmente com Pitágoras (ou com o grupo que levava seu nome).

1ª Demonstração (mais curta):
Somando as propriedades i e ii: $b^2 + c^2 = m.a + n.a = (m + n)a = a.a = a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$

2ª Demonstração (considerada a mais bela):

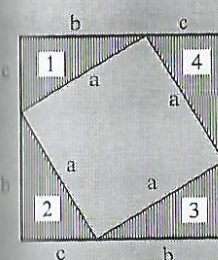
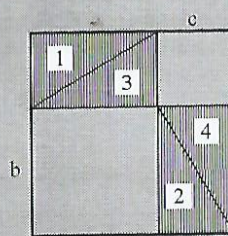
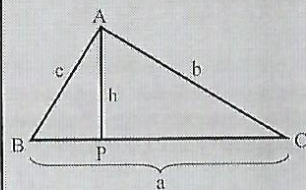
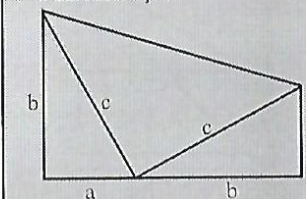



Figura 1 Figura 2

Em um quadrado de lado b + c (figura 1) desenhamos 4 triângulos retângulos, todos congruentes, de catetos b e c e hipotenusa a. Note que, no interior do quadrado original, temos um quadrado branco de lado a.
Agora arraste os triângulos de modo a formar a figura 2. Observe que na figura 2 temos dois quadrados brancos formados, um de lado b e outro de lado c.
Uma vez que a área em branco nas duas figuras deve possuir o mesmo valor, então a área do quadrado de lado a deve ser igual à soma das áreas dos quadrados de lados b e c, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

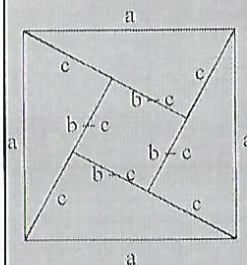
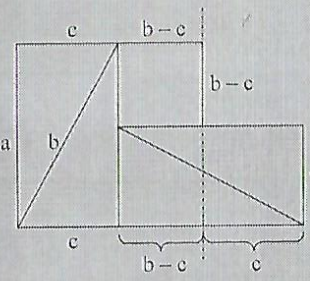
3ª Demonstração:

Em um triângulo retângulo ABC, traçamos a altura AP. Note que $\Delta ABC \sim \Delta PBA \sim \Delta PAC$. Sabe-se que as áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança (veja o capítulo 3). Portanto: $\frac{S_{PBA}}{S_{ABC}} = \frac{c^2}{a^2}$ e $\frac{S_{PAC}}{S_{ABC}} = \frac{b^2}{a^2}$.

$S_{PBA} + S_{PAC} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2}S_{ABC} + \frac{b^2}{a^2}S_{ABC} = S_{ABC} \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$.

4ª Demonstração:

Tomemos dois triângulos retângulos de hipotenusa c e catetos a e b e construímos o trapézio ao lado. Observe que o triângulo isósceles de lados congruentes iguais a c é retângulo.

A área do trapézio de base maior b, base menor a e altura a + b é igual à soma das áreas dos dois triângulos retângulos de lados a, b e c e do triângulo retângulo isósceles de catetos iguais a c.

Assim: $\frac{(a+b)}{2}(a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$.

5ª Demonstração:

Considere as duas figuras ao lado. A figura 1 é um quadrado de lado a, composta de quatro triângulos retângulos congruentes de hipotenusa a e catetos b, c e de um quadrado de lado b – c. A figura 2 é formada pela justaposição das mesmas figuras que compõe a figura 1. A linha pontilhada na figura 2 divide esta em dois quadrados, em de lado b e outro de lado c. Como as figuras 1 e 2 possuem a mesma área, então podemos afirmar que: $a^2 = b^2 + c^2$.

Na verdade existem inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras. Só no livro "The Pythagorean Proposition", de Elisha Scott Loomis, re-editado em 1968 e 1972 pelo National Council of Techers os Mathematics, existem 370 demonstrações para o Teorema de Pitágoras. Entretanto, as cinco demonstrações anteriores são consideradas as mais curtas e simples para este teorema.

Todas as demonstrações para o teorema de Pitágoras se dividem em dois tipos: obtidas através de semelhança de polígonos ou obtidas através de expressões envolvendo áreas de figuras planas. Não é possível demonstrar o teorema de Pitágoras utilizando argumentos trigonométricos, uma vez que a relação fundamental da trigonometria ($sen^2 x + cos^2 x = 1$) é demonstrada via teorema de Pitágoras.

2.4.2.1) Teorema Recíproco de Pitágoras

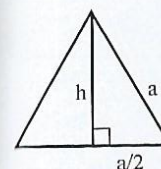
Se em um triângulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa então este triângulo é retângulo.

Demonstração:
Suponha que em um triângulo ΔABC temos $a^2 = b^2 + c^2$. Construindo um triângulo retângulo ΔMNP de hipotenusa d e catetos b e c temos $d^2 = b^2 + c^2$, implicando que d = a. Assim, temos que $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, fazendo com que ΔABC seja um triângulo retângulo.

Exemplos:

1) (Colégio Naval-83/84) Num triângulo equilátero de altura h, seu perímetro é dado por

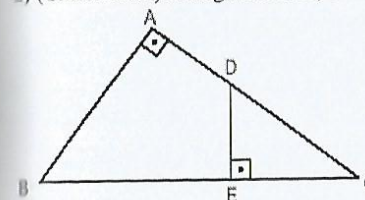
a) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$ b) $h\sqrt{3}$ c) $2h\sqrt{3}$ d) 6h e) $6h\sqrt{3}$

Solução:

Como h é altura de um triângulo eqüilátero, então h corta o lado oposto em seu ponto médio. Pelo Teorema de Pitágoras:

$a^2 = a^2/4 + h^2 \Rightarrow 3a^2/4 = h^2 \Rightarrow a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}h}{3}$

Assim, o perímetro do triângulo eqüilátero vale:

$2p = 3a \Rightarrow 2p = 2\sqrt{3}h$

2) (Unifor-2003) Na figura abaixo, têm-se AB = 6 cm, BC = 10 cm e EC = 4 cm.

A medida de DE, em centímetros, é igual a

a) 12/5 b) 5/2 c) $2\sqrt{2}$ d) 3 e) $2\sqrt{3}$

Solução:

Aplicando o teorema de Pitágoras em ΔABC: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 100 = 36 + AC^2 \Rightarrow AC = 8$ cm.

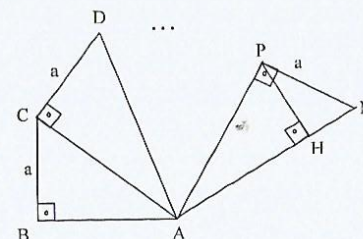
Uma vez que $\Delta EDC \sim \Delta ABC$: $\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{6} = \frac{4}{8} \Rightarrow DE = 3$ cm

3) (AFA-2001) Na figura abaixo existem n triângulos retângulos onde ABC é o primeiro, ACD o segundo e APN é o n-ésimo triângulo. A medida do segmento $\overline{HN}$ é

a) $\frac{a\sqrt{n}}{n}$

b) $\frac{a\sqrt{n+1}}{n+1}$

c) $\frac{a\sqrt{n-1}}{n-1}$

d) $\frac{a\sqrt{n+1}}{n}$

Solução:

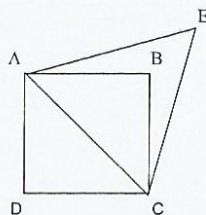
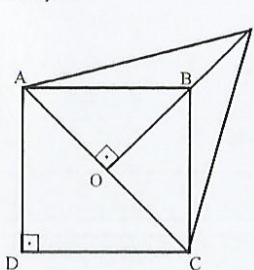
Aplicando o Teorema de Pitágoras em ΔABC: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}.a$

Aplicando o Teorema de Pitágoras em ΔACD: $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow AD = \sqrt{3}.a$

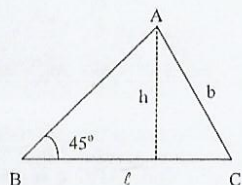
Assim, observamos que no n-ésimo triângulo teremos $AN = \sqrt{n}.a$

Pelas propriedades dos triângulos retângulos: $HN.AN = PN^2 \Rightarrow HN.\sqrt{n}.a = a^2 \Rightarrow HN = \frac{a\sqrt{n}}{n}$

4) (AFA-2002) Na figura, o triângulo AEC é equilátero e ABCD é um quadrado de lado 2 cm. A distância BE, em cm, vale

a) $2\sqrt{3}$
b) $\sqrt{6} - 1$
c) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
d) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

Solução:

Teorema de Pitágoras em ΔADC:
$AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow AC^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}$
Seja O o ponto médio da diagonal AC do quadrado.
Assim: $AO = CO = \sqrt{2}$.
Como $\angle OAB = \angle OBA = 45^o$ então ΔOAB é isósceles: $BO = \sqrt{2}$.
Como ΔAEC é equilátero então $EA = AC = 2\sqrt{2}$
Teorema de Pitágoras em ΔOEA:
$EA^2 = EO^2 + AO^2 \Rightarrow 8 = EO^2 + 2 \Rightarrow EO = \sqrt{6}$
Portanto: $BE = EO - BO \Rightarrow BE = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

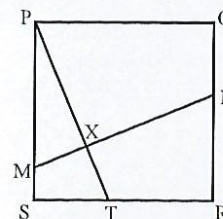
5) (UFC-99) No triângulo ABC abaixo, $\underline{\ell}$ é a base, $\underline{h}$ a altura relativa à esta base, e $\underline{b}$ o lado oposto ao ângulo de 45^o. Se $\ell + h = 4$, então o valor mínimo de b^2 é:

a) 16.
b) 16/5.
c) 4/5.
d) $4\sqrt{5}$.
e) $16\sqrt{5}$.

Solução:
Seja H o pé da altura, no lado BC. Como h é a altura relativa à base ℓ, o ângulo $B\hat{H}A$ é reto, e, portanto, o ângulo $B\hat{A}H$ mede 45^0. Assim, o triângulo ABH é isósceles, e daí o segmento BH mede h, e, em conseqüência, o segmento de reta HC mede $\ell - h$.

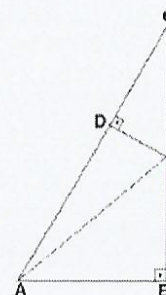
Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AHC, obtemos $b^2 = h^2 + (\ell - h)^2 \Rightarrow$
$b^2 = h^2 + (4 - h - h)^2 = h^2 + (4 - 2h)^2 = h^2 + 16 - 16h + 4h^2 = 5h^2 - 16h + 16$
Assim, b^2 é uma função quadrática de h e esta função possui um mínimo cujo valor é

$$b^2_{min} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-((-16)^2 - 4.5.16)}{20} = \frac{-(16.16 - 20.16)}{20} = \frac{16}{5}.$$

6) Os lados e a altura de um triângulo retângulo ABC são a (hipotenusa), b, c e h, respectivamente. Demonstrar que o triângulo que tem para lados b + c, h e a + h também é retângulo.
Solução:
Pelas relações métricas nos triângulos retângulos temos que $bc = ah$ e $b^2 + c^2 = a^2$.
Assim: $(a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 = b^2 + c^2 + 2bc + h^2 \Rightarrow (a + h)^2 = (b + c)^2 + h^2 \Rightarrow$ o triângulo que tem para lados b + c, h e a + h também é retângulo.

7) (Olimpíada da Argentina-93) Na figura, PQRS é um quadrado de lado 12; ST mede 5 e MX mede 4. Sabe-se também que MN é perpendicular a PT. Calcular o comprimento de XN.

Solução:
Teorema de Pitágoras em ΔPST: $PT^2 = PS^2 + ST^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow PT = 13$
Como PT e MN são transversais que cortam lados opostos de um quadrado sob um mesmo ângulo então temos que $MN = PT = 13$. Assim: $XN = MN - MX = 13 - 4 = 9$.

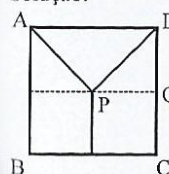
8) (Fuvest-2005) Na figura, BAC e CDE são triângulos retângulos, AB = 1, $BC = \sqrt{3}$ e BE = 2DE. Logo, a medida de $\overline{AE}$ é

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{7}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{11}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

Solução:
Pelo teorema de Pitágoras em ΔABC: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow AC = 2$.
Seja DE = x. Assim temos que $BE = 2x \Rightarrow CE = \sqrt{3} - 2x$.

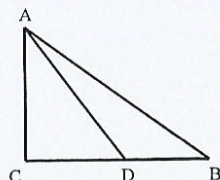
Uma vez que $\Delta ABC \sim \Delta EDC$: $\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{3} - 2x}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow BE = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

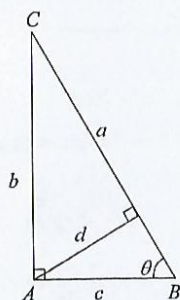
Aplicando o teorema de Pitágoras ao ΔABE: $AE^2 = AB^2 + BE^2 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow AE = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

9) (OBM-97) P é um ponto interior a um quadrado ABCD. As distâncias de P aos vértices A e D e ao lado BC são iguais a 10cm. O lado do quadrado mede:
A) 10cm B)12cm C)14cm D) 16cm E) 18cm

Solução:

Seja L o lado do quadrado. Passando por P trace uma paralela a AD, que corta CD em Q. Assim: $PQ = L/2$ e $DQ = L - 10$.
Teorema de Pitágoras em ΔDPQ: $PD^2 = PQ^2 + DQ^2 \Rightarrow$
$100 = L^2/4 + (L - 10)^2 \Rightarrow 100 = L^2/4 + L^2 - 20L + 100 \Rightarrow$
$5L^2/4 = 20L \Rightarrow L = 16$ cm

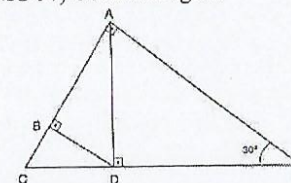
10) (Indiana University of Pennsylvania-99) Em um triângulo retângulo, se AB = 20, AC = 12 e AD = DB + 8, então CD é:

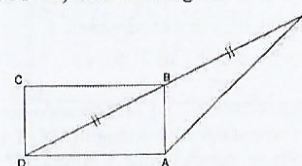
a) 14
b) $12\sqrt{2}$
c) 8
d) 9
e) nda

Solução:
Aplicando o teorema de Pitágoras em ΔABC: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow 400 = 144 + BC^2 \Rightarrow BC = 16$
Seja CD = x. Logo temos DB = 16 – x e AD = 24 – x.
Aplicando o teorema de Pitágoras em ΔACD:
$AD^2 = AC^2 + CD^2 \Rightarrow (24-x)^2 = 144 + x^2 \Rightarrow 576 - 48x + x^2 = 144 + x^2 \Rightarrow x = 9.$

11) (OBM-2003) O triângulo ABC é retângulo em A. Dentre os pontos P pertencentes ao perímetro do triângulo, encontre aquele que minimiza a soma $AP + BP + CP$.
Solução:

Sejam a, b, c as medidas dos segmentos BC, AC e AB, respectivamente.
Consideraremos separadamente os casos em que P está em AC, em AB e em BC.
Se P está em AC, então $AP + CP = b$. Então, minimizar $AP + BP + CP$ reduz-se a minimizar BP. Isso ocorre quando P coincide com A, pois a menor distância entre um ponto e uma reta é determinada pelo pé da perpendicular traçada a partir desse ponto.
Nesse caso o valor mínimo de $AP + BP + CP$ é $b + c$.
O caso em que P está em AB é inteiramente análogo.
Suponha, agora, que P está em BC. Então $BP + CP = a$, ou seja, minimizar $AP + BP + CP$ reduz-se a minimizar AP.
Isso ocorre quando AP é perpendicular a BC.
Essa medida está representada por d no diagrama ao lado. Nesse caso, o mínimo de $AP + BP + CP$ é $a + d$.

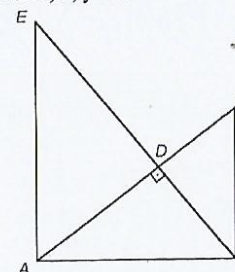
Assim, para completar a resolução da questão, basta comparar $a + d$ e $b + c$.
Observe que $bc = ad$ e $a^2 = b^2 + c^2$.
Logo $(a+d)^2 = a^2 + 2ad + d^2 = b^2 + c^2 + 2bc + d^2 = (b+c)^2 + d^2$ e, como $d^2 > 0$,
$(a+d)^2 > (b+c)^2 \Leftrightarrow a + d > b + c$.
Resposta: O ponto que minimiza $AP + BP + CP$ é $P = A$ (nesse caso $AP + BP + CP = b + c$).

Exercícios

1) (UFMG-97) Observe a figura.

Se a medida de CE é 80, o **comprimento** de BC é
a) 20 b) 10 c) 8 d) 5

2) (UFMG-98) Observe a figura.

Nessa figura, B é o ponto médio do segmento DE e ABCD é um retângulo de lados DC = 1 e AD = 2. **CALCULE** a medida do segmento AE.

3) (UFMG-2002) Em determinada hora do dia, o sol projeta a sombra de um poste de iluminação sobre o piso plano de uma quadra de vôlei. Neste instante, a sombra mede 16 m. Simultaneamente, um poste de 2,7 m, que sustenta a rede, tem sua sombra projetada sobre a mesma quadra. Neste momento, essa sombra mede 4,8 m. A altura do poste de iluminação é de
a) 8,0 m b) 8,5 m c) 9,0 m d) 7,5 m

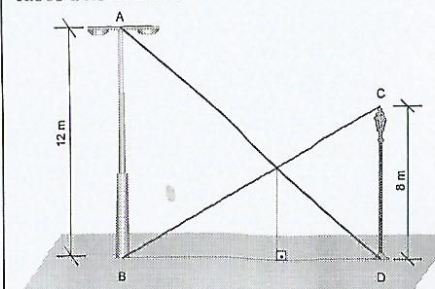
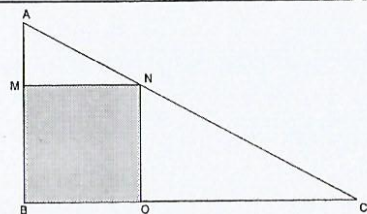
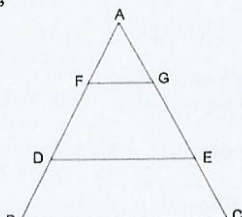
4) (UFMG-2004) Nesta figura, os ângulos , e são retos e os segmentos AD, CD e BC medem, respectivamente, x, y e z:

Nessa situação, a altura do triângulo ADE em relação ao lado AE é dada por

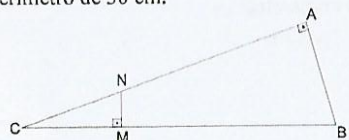
a) $\dfrac{x\sqrt{z^2 - y^2}}{y}$ b) $\dfrac{x\sqrt{z^2 - y^2}}{z}$

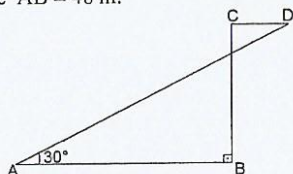
c) $\dfrac{y\sqrt{z^2 - y^2}}{z}$ d) $\dfrac{z\sqrt{z^2 - y^2}}{y}$

5) (Covest-99) O triângulo da ilustração abaixo é isósceles **(AB = AC)** e **BD = DE = EC** (isto é, **D**, **E** trissectam **BC**):

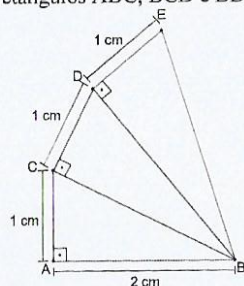
Analise as afirmações:
0-0) Os ângulos BAD, DAE e EAC são congruentes.
1-1) Os triângulos ABD e ACE são congruentes.
2-2) AD = AE
3-3) Os ângulos AED e ADE são congruentes.

6) (Covest-2002) Os postes verticais **AB** e **CD** na figuram medem **12m** e **8m** respectivamente. Existem cabos de sustentação unindo a base de cada um dos postes ao topo do outro poste. Qual a distância, em **dm**, do ponto de interseção dos cabos à horizontal?

7) (Covest-2003) O triângulo ABC ilustrado na figura abaixo tem lados medindo AB = 7 e BC = 13. Sabendo-se que BMNO é um quadrado com todos os vértices sobre os lados do triângulo ABC, indique a soma dos dígitos da medida do lado do quadrado.

8) (Unifor-98) Na figura abaixo tem-se o triângulo ABC e os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{FG}$ e $\overline{DE}$, paralelos entre si. Se AF = 3 cm, DF = 2,1 cm, BD = 1,5 cm, CE = 2 cm e FG = 2 cm, então o perímetro do triângulo ABC é, em centímetros,

a) 16,4 b) 17,8 c) 18,6 d) 19,2 e) 19,8

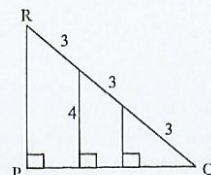
9) (Unifor-99) Na figura abaixo, o triângulo ABC, retângulo em A, tem lados de medidas 39 cm, 36 cm e 15 cm, sendo $\overline{AB}$ seu cateto menor, enquanto que o triângulo MNC, retângulo em M, tem perímetro de 30 cm.

Qual é a medida do segmento $\overline{NA}$?

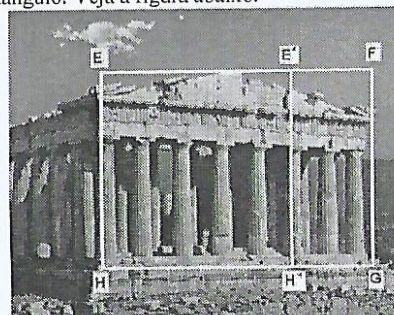
10) (Unifor-99) Na figura abaixo $\overline{CD} // \overline{AB}$, CD = 12 m e AB = 48 m.

A medida do segmento $\overline{AD}$, em metros, é aproximadamente igual a

a) 78 b) 74 c) 72 d) 68 e) 64

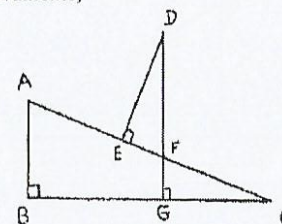
11) (Unifor-99) Na figura abaixo têm-se os triângulos retângulos ABC, BCD e BDE.

Se os lados têm as medidas indicadas, então a medida do lado $\overline{BE}$, em centímetros, é

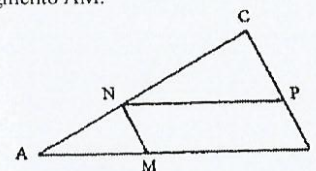
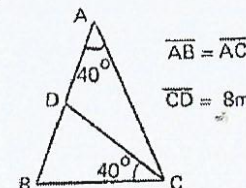
a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{6}$ c) $\sqrt{5}$ d) 2 e) $\sqrt{3}$

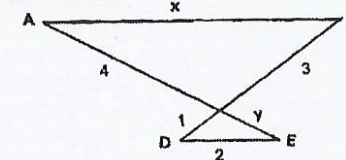
12) (UFRN-2000) Considerando-se as informações constantes no triângulo PQR (figura abaixo), pode-se concluir que a altura PR desse triângulo mede:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8

13) (UFRN-2004) Phidias, um arquiteto grego que viveu no século quinto a.C., construiu o Parthenon com medidas que obedeceram à proporção áurea, o que significa dizer que EE'H'H é um quadrado e que os retângulos EFGH e E'FGH' são semelhantes, ou seja, o lado maior do primeiro retângulo está para o lado maior do segundo retângulo assim como o lado menor do primeiro retângulo está para o lado menor do segundo retângulo. Veja a figura abaixo.

Assim, podemos afirmar que a razão da medida da base do Parthenon pela medida da sua altura é uma raiz do polinômio:

a) $x^2 + x + 1$ b) $x^2 + x - 1$
c) $x^2 - x - 1$ d) $x^2 - x + 1$

14) (UFPB-78) Na figura ao lado, os ângulos B, E e G são retos, $\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 9$, $\overline{AC} = 15$ e $\overline{EF} = 4$. Então, os segmentos $\overline{ED}$ e $\overline{DF}$ valem, respectivamente,

a) 5 e 3 b) 3 e 4 c) 4 e 3
d) 3 e 5 e) 4 e 5

15) (UFPB-86) Na figura, NP || AB e NM || CB. Se NM = 2, NP = 6 e CB = 5, determine a medida do segmento AM.

16) (UFPB-87) O comprimento $\overline{BC}$, na figura ao lado, vale:

a) 4 m b) $2\sqrt{2}$ m c) $4\sqrt{2}$ m d) 8 m e) $8\sqrt{2}$ m

17) (UFPB-88) Na figura, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{DE}$. Então, é válida a igualdade

a) $x - y = 14$ b) $x + y = 22$ c) $x.y = \frac{8}{3}$

d) $x : y = 8$ e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{11}{12}$

18) (Puc/MG-2003) As medidas dos catetos de um triângulo retângulo são 6 e 8. A medida da projeção do menor cateto sobre a hipotenusa é igual a:

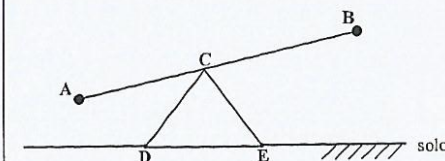
a) 2,0 b) 2,5 c) 3,2 d) 3,6

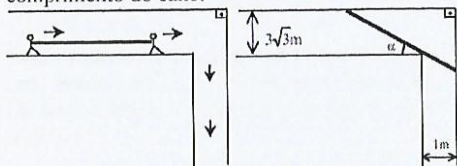
19) (Puc/RS-2000) Em um triângulo retângulo, a medida de um cateto é igual a 6cm e a medida da projeção do outro cateto sobre a hipotenusa é igual a 5cm. O maior lado desse triângulo mede, em cm,

a) $6.\sqrt{3}$ b) $\frac{28}{3}$ c) 9 d) 8 e) $4.\sqrt{2}$

20) (Puc/RS-2001) Um segmento de reta RV tem pontos internos S, T e U. Sabendo que S é o ponto médio de RT, U é o ponto médio de TV, a medida de RV é 69 e a medida de RT é 19, então a medida de UV é

a) 25 b) 35 c) 45 d) 50 e) 55

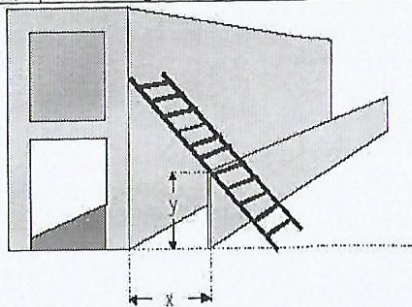
21) (UFMS-99) Uma gangorra é formada por uma haste rígida $\overline{AB}$, apoiada sobre uma mureta de concreto no ponto C, como na figura. As dimensões são $\overline{AC}$ = 1.2m, $\overline{CB}$ = 4.8m, $\overline{DC} = \overline{DE} = \overline{CE} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ m. Sendo **h** a altura, em relação ao solo, da extremidade A, no momento em que a extremidade B toca o solo, determine o valor, em metros, de 8 vezes a altura **h**.

22) (UFMS-2002) Dois homens carregam um cano de diâmetro desprezível, paralelamente ao

chão, por um corredor de $3\sqrt{3}$ m de largura, que encontra, ortogonalmente, outro corredor de 1 m de largura. Na passagem de um corredor para o outro, as extremidades do cano tocaram as paredes dos corredores e outro ponto do cano tocou a parede onde os corredores se encontram, formando um ângulo α, conforme mostrado na ilustração abaixo. Sabendo-se que a medida do ângulo α é 60°, determine, em metros, o comprimento do cano.

23) (UFPA-97) A sombra de uma árvore é de 4 metros no mesmo instante que minha sombra é de 44 cm. Sabendo que a sombra é diretamente proporcional ao tamanho e que minha altura é 1,65 m, então podemos afirmar que a altura da árvore é, em metros, igual a

a) 15 b) 14 c) 13,03 d) 12,5 e) 10,72

24) (UFPA-98) Os catetos de um triângulo retângulo ABC medem AB = 12cm e AC = 16cm. Pelo ponto médio M do lado AC, traça-se uma perpendicular MN ao lado BC, sendo N pertencente ao segmento BC. Determine o perímetro do triângulo MNC.

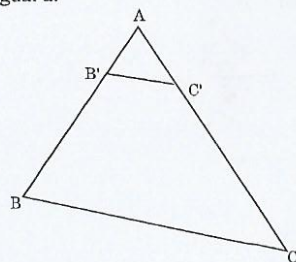
25) (UFC-98) Dois pontos A e B, que distam entre si 10 cm, encontram-se em um mesmo semiplano determinado por uma reta r. Sabendo que A e B distam 2 cm e 8 cm, respectivamente, de r, determine a medida, em centímetros, do menor caminho para ir-se de A para B passando por r.

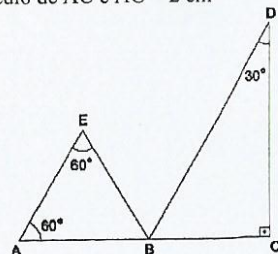
26) (UFC-2000) Um muro com y metros de altura se encontra a x metros de uma parede de um edifício. Uma escada que está tocando a parede e apoiada sobre o muro faz um ângulo q com o chão, onde $tg\theta = \sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. Suponha que o muro e a parede são perpendiculares ao chão e que este é plano (veja figura).

O comprimento da escada é:

a) $\left(x^{3/2}+y^{3/2}\right)^{1/2}$ b) $\left(x^{2/3}+y^{2/3}\right)^{3/2}$

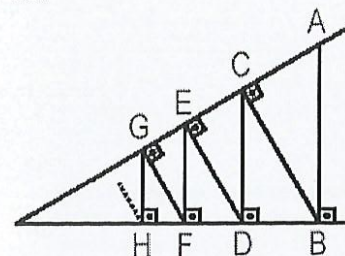
c) $\left(x^{3/2}+y^{3/2}\right)^{2/3}$ d) $\left(x^{1/2}+y^{1/2}\right)^{3/2}$

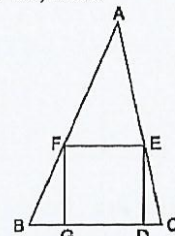
e) $\left(x^{1/2}+y^{1/2}\right)^{2/3}$

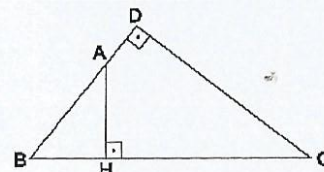
27) (UFC-2002) Na figura abaixo, os triângulos ABC e AB'C' são semelhantes. Se $\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = 4$ então o perímetro de AB'C' dividido pelo perímetro de ABC é igual a:

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

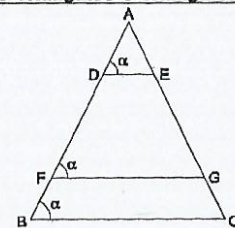
28) (Fatec-2000) Na figura abaixo, além das medidas dos ângulos indicados, sabe-se que **B** é ponto médio de AC e AC = 2 cm

A medida de $\overline{DE}$, em centímetros, é igual a

a) 1/2 b) 1 c) $\sqrt{2}$ d) 1,5 e) $\sqrt{3}$

29) (Mackenzie-99) Na figura, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 5 e 4. Então o valor mais próximo da medida de $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{ED} + \overline{EF} + ...$ é:

a) 17 b) 19 c) 21 d) 23 e) 25

30) (Mackenzie-2002) No triângulo ABC da figura, o lado BC mede 4,5 e o lado do quadrado DEFG mede 3. A altura do triângulo ABC, em relação ao lado BC, mede:

a) 7,5 b) 8,0 c) 8,5 d) 9,0 e) 9,5

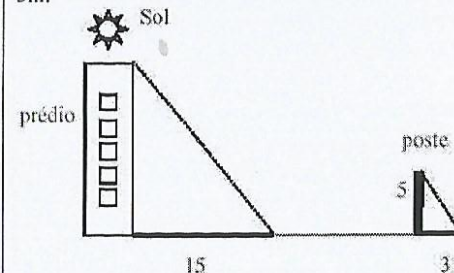
31) (Mackenzie-2002) Na figura, AH = 4, BC = 10 e DC = 8. A medida de AB é:

a) 4,8 b) 5,2 c) 5,0 d) 4,6 e) 5,4

32) (Mackenzie-2003) Na figura, se $\overline{AB} = 5\overline{AD} = 5\overline{FB}$, a razão $\frac{\overline{FG}}{\overline{DE}}$ vale:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 5/2 e) 7/2

33) (Puc/SP-2000) Uma estação de tratamento de água (ETA) localiza-se a 600m de uma estrada reta. Uma estação de rádio localiza-se nessa mesma estrada, a 1000m da ETA. Pretende-se construir um restaurante, na estrada, que fique à mesma distância das duas estações. A distância do restaurante a cada uma das estações deverá ser de

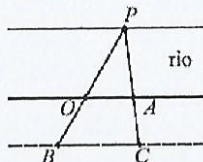
a) 575m b) 625 m c) 600 m d) 700m c) 750m

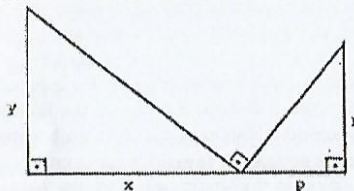
34) (Unb-2000) Em uma região completamente plana, um barco, considerado aqui como um ponto material, envia sinais de socorro que são recebidos por duas estações de rádio, *B* e *C*, distantes entre si de 80 km. A semi-reta de origem *B* e que contém *C* forma, com a direção Sul-Norte, um ângulo de 45° no sentido Noroeste. Os sinais chegam em linha reta à estação *B*, formando um ângulo de 45° com a direção Sul-Norte no sentido Nordeste. Sabendo que a estação mais próxima dista 310 km do barco, calcule, em **quilômetros**, a distância do barco à outra estação.

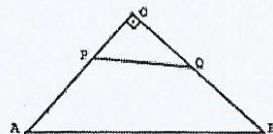
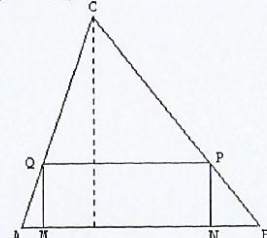
35) (Unesp-2002) A sombra de um prédio, num terreno plano, numa determinada hora do dia, mede 15m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5m mede 3m.

A altura do prédio, em metros, é

a) 25 b) 29 c) 30 d) 45 e) 75

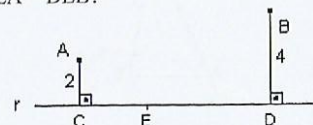
36) (Unesp-2004) Um observador situado num ponto *O*, localizado na margem de um rio, precisa determinar sua distância até um ponto *P*, localizado na outra margem, sem atravessar o rio. Para isso marca, com estacas, outros pontos do lado da margem em que se encontra, de tal forma que *P*, *O* e *B* estão alinhados entre si e *P*, *A* e *C* também. Além disso,

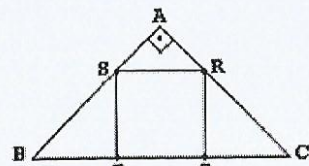
OA é paralelo a *BC*,
OA = 25 m,
BC = 40 m e
OB = 30 m,
conforme figura.

A distância, em metros, do observador em *O* até o ponto *P*, é:
a) 30 b) 35 c) 40 d) 45 e) 50

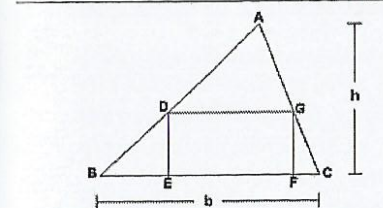
37) (Fuvest-87) Na figura os ângulos assinalados são retos. Temos necessariamente:

a) $\frac{x}{y} = \frac{p}{m}$ b) $\frac{x}{y} = \frac{m}{p}$ c) $xy = pm$
d) $x^2 + y^2 = p^2 + m^2$ e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{m} + \frac{1}{p}$

38) (Fuvest-88) Em um triângulo retângulo OAB, retângulo em O, com AO = a e OB = b, são dados os pontos P em AO e Q em OB de tal maneira que AP = PQ = QB = x. Nestas condições o valor de x é:
a) $\sqrt{ab} - a - b$
b) $a + b - \sqrt{2ab}$
c) $\sqrt{a^2 + b^2}$
d) $a + b + \sqrt{2ab}$
e) $\sqrt{ab} + a + b$

39) (Fuvest-98) No triângulo acutângulo ABC a base AB mede 4 cm e a altura relativa a essa base também mede 4 cm. MNPQ é um retângulo cujos vértices M e N pertencem ao lado AB, P pertence ao lado BC e Q ao lado AC. O perímetro desse retângulo, em cm, é:

a) 4 b) 8 c) 12 d) 14 e) 16

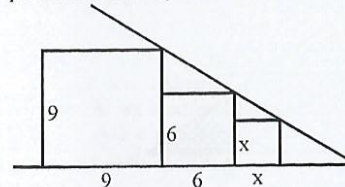
40) (Fuvest-99) Num triângulo retângulo ABC, seja D um ponto da hipotenusa AC tal que os ângulos DAB e ABD tenham a mesma medida. Então o valor de AD/DC é:
a) $\sqrt{2}$ b) $1/\sqrt{2}$ c) 2 d) 1/2 e) 1

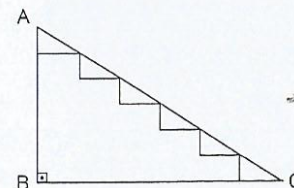
41) (Fuvest-99) Na figura abaixo, as distâncias dos pontos A e B à reta r valem 2 e 4. As projeções ortogonais de A e B sobre essa reta são os pontos C e D. Se a medida de CD é 9, a que distância de C deverá estar o ponto E, do segmento CD, para que $C\hat{E}A = D\hat{E}B$?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

42) (Fuvest-2000) Na figura abaixo, **ABC** é um triângulo isósceles e retângulo em A e **PQRS** é um quadrado de lado $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Então, a medida do lado **AB** é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

43) (Fuvest-2003) O triângulo **ABC** tem altura **h** e base **b** (ver figura). Nele, está inscrito o retângulo **DEFG**, cuja base é o dobro da altura. Nessas condições, a altura do retânguslo, em função de **h** e **b**, é pela fórmula:

a) $\frac{bh}{h+b}$ b) $\frac{2bh}{h+b}$ c) $\frac{bh}{h+2b}$ d) $\frac{bh}{2h+b}$ e) $\frac{bh}{2(h+b)}$

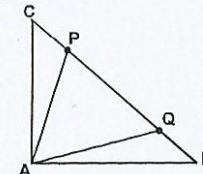
44) (UNICAMP-97) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 1 metro e um dos ângulos agudos é o triplo do outro.
a) Calcule os comprimentos dos catetos.
b) Mostre que o comprimento do cateto maior está entre 92 e 93 centímetros.

45) (ESA-95) Calculando x na figura dos quadrinhos abaixo, encontramos:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 3 e) 8

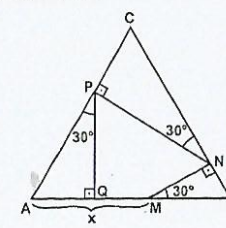
46) (Ciaba-2003) Uma escada cujos degraus têm todos a mesma extensão, além da mesma altura, está representada na figura, vista de perfil.

Se $\overline{AB} = 2m$ e $B\hat{C}A = 30^\circ$, a medida da extensão de cada degrau é, em metros:
a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m

47) (Colégio Naval-85/86) Num triângulo equilátero de altura h, seu perímetro é dado por
a) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$ b) $h\sqrt{3}$ c) $2h\sqrt{3}$ d) 6h e) $6h\sqrt{3}$

48) (Colégio Naval-89/90) Num triângulo ABC traça-se a ceviana interna AD, que o decompõe em dois triângulos semelhantes e não congruentes ABD e ACD. Conclui-se que tais condições:
a) só são satisfeitas por triângulos acutângulos
b) só são satisfeitas por triângulos retângulos
c) só são satisfeitas por triângulos obtusângulos
d) podem ser satisfeitas, tanto por triângulos acutângulos quanto por triângulos retângulos
e) podem ser satisfeitas, tanto por triângulos retângulos quanto por triângulos obtusângulos.

49) (Epcar-2000) É dado o triângulo retângulo e isósceles ABC, onde A = 90° e AB = m, como na figura abaixo:

O lado do triângulo equilátero AQP mede
a) $\frac{m\sqrt{6}}{3}$ b) $\frac{m}{2}$ c) $\frac{m\sqrt{6}}{2}$ d) m

50) (Epcar-2004) Se o triângulo **ABC** da figura abaixo é equilátero de lado **a**, então a medida de $\overline{QM}$ em função de **a** e **x** é

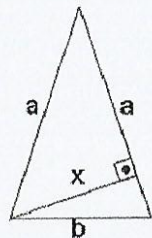
a) $\frac{3a - x}{4}$
b) $\frac{3a - x}{8}$
c) $\frac{8x + 3a}{8}$
d) $\frac{9x - 3a}{8}$

51) (AFA-94) Dados dois triângulos semelhantes, um deles com **4**, **7** e **9cm** de lado, e o outro com **66 cm** de perímetro, pode-se afirmar que o menor lado do triângulo maior mede, em cm.
a) 9,8 b) 11,6 c) 12,4 d) 13,2

52) (AFA-2000) O valor de x^2, na figura abaixo, é

a) $b^2 - \frac{a^2}{4}$

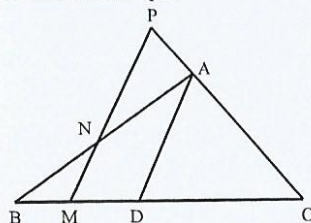
b) $\frac{a^4}{b^2} - \frac{a^2}{4}$

c) $\frac{b^2}{4} - \frac{b^4}{a^2}$

d) $b^2 - \frac{b^4}{4a^2}$

53) (ITA-78) Os catetos **b** e **c** de um triângulo retângulo de altura **h (relativa à hipotenusa)**, são dados pelas seguintes expressões: $\mathbf{b} = \sqrt{k+\frac{1}{k}}$ e $\mathbf{c} = \sqrt{k-\frac{1}{k}}$ onde **k** é um número real maior que **1**. Então o valor de **h** em função de **k** é:

a) $\frac{\sqrt{k^2-1}}{2k}$ c) $\frac{\sqrt{1+k^2}}{-1-k^2}$ e) n.d.a.

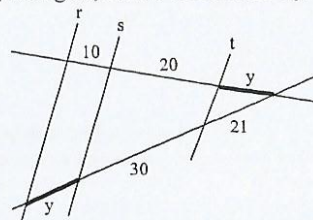
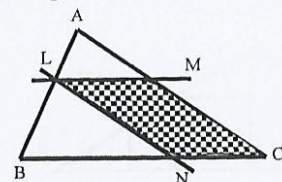
b) $\frac{k^2-1}{k^2-2}$ d) $\frac{\sqrt{2(k^2-1)}}{2k}$

54) (ITA-79) Considere o triângulo ABC, onde AD é a mediana relativa ao lado BC. Por um ponto arbitrário M do segmento BD, tracemos o segmento MP paralelo a AD, onde P é o ponto de interseção desta paralela com o prolongamento do lado AC. Se N é o ponto de interseção de AB com MP, podemos afirmar que:

a) MN + MP = 2 BM d) MN + MP = 2 AD
b) MN + MP = 2 CM e) MN + MP = 2 AC
c) MN + MP = 2 AB

55) (ITA-87) O perímetro de um triângulo retângulo isósceles é $2p$. A altura relativa à hipotenusa é:

a) $p\sqrt{2}$ b) $(p+1)(\sqrt{3}-1)$ c) $p(\sqrt{2}-1)$
d) $4p(\sqrt{2}-1)$ e) $8p(\sqrt{2}+4)$

56) (ITA-2003) Considere um quadrado ABCD. Sejam E o ponto médio do segmento $\overline{CD}$ e F um ponto sobre o segmento $\overline{CE}$ tal que $m(\overline{BC}) + m(\overline{CF}) = m(\overline{AF})$. Prove que $\cos\alpha = \cos 2\beta$, sendo os ângulos $\alpha = B\hat{A}F$ e $\beta = E\hat{A}D$.

57) Na figura, **r // s // t**. Calcule x e y.

58) Na figura, **AB = 12, AC =16, BC = 20** e **BL = 9**. Se $\overline{LM} // \overline{NC}$ e $\overline{LN} // \overline{MC}$, calcule o perímetro do paralelogramo **LMCN**.

59) Provar que dois triângulo ABC e A'B'C', cuja razão $\frac{BC}{B'C'}$ entre as hipotenusas é igual a razão $\frac{AB}{A'B'}$ entre dois catetos, são semelhantes.

60) Num triângulo ABC, retângulo em A e de altura AD, tomam-se, respectivamente, sobre AB, AC e DA: AB' = AB/3, AC' = AC/3 e DD' = DA/3. Demonstrar que o triângulo D'B'C' é semelhante a ABC.

61) Dados dois triângulos ABC e A'B'C' que tenham dois ângulos iguais, $\hat{A} = \hat{A}'$, e dois suplementares, $\hat{B} + \hat{B}' = 180^\circ$, demonstrar que os lados opostos a esses são proporcionais, isto é $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$.

62) Sobre uma reta, consideram-se quatro pontos consecutivos, A, B, C e D, tais que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$. Traça-se, por A, uma segunda reta, sobre a qual se toma AE = AC. Demonstrar que EC é bissetriz do ângulo BED.

63) Demonstrar que num triângulo as distâncias do ponto médio de um lado qualquer aos dois outros lados são inversamente proporcionais a estes últimos.

64) Demonstrar que, em qualquer triângulo, o produto dos segmentos determinados por uma altura no lado correspondente é igual ao produto das distâncias do pé dessa altura aos pés das outras duas alturas.

65) Por dois pontos quaisquer, M e M', do lado BC de um triângulo ABC, traçam-se paralelas a AB que encontram AC em P e P'; em seguida, paralelas a AC encontram AB em Q e Q'. Provar que $\frac{PP'}{QQ'} = \frac{AC}{AB}$.

66) Dado um triângulo ABC, por um ponto qualquer, A' da mediana AD, traçam-se paralelas aos lados AB e AC, designando por B' e C' as interseções com o lado BC. Provar que A'D' é mediana do triângulo A'B'C'.

67) Provar que num triângulo ABC toda paralela à mediana AA' determina sobre os lados AB e AC segmentos AD e AE proporcionais a estes lados.

68) Dados um triângulo ABC, um ponto D sobre AB e um ponto E sobre AC, de modo que $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$, demonstrar que os pontos médios de AB, AC e DE estão em linha reta.

69) Sejam quatro pontos consecutivos A, B, C e D de uma reta XY. Por A e B traçam-se duas paralelas, por C e D duas outras paralelas. Provar que as diagonais do paralelogramo formado por essas quatro retas cortam XY em dois pontos fixos.

70) Uma paralela ao lado BC de um triângulo ABC encontra AB em B' e AC em C'. Seja M o ponto médio de B'C'. BM corta AC em C'' e CM corta AB em B''. Demonstrar que B''C'' é paralelo a BC.

71) Dado um triângulo ABC, pelo ponto médio D do lado BC traça-se uma reta que corta AB em B' e AC em C'. Demonstrar que $\frac{B'A}{B'B} = \frac{C'A}{C'C}$.

72) Num triângulo ABC, prolongam-se os lados AB e AC de comprimentos iguais a BD e CE, respectivamente. Seja F a interseção de BC com DE. Mostrar que $\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{DF}$.

73) Por um ponto M do lado BC de um triângulo ABC, traça-se uma paralela à mediana AD. Sendo N e P os pontos onde ela encontra as retas AB e AC, demonstrar que a soma MN + MP permanece constante quando M varia sobre BC.

74) Dá-se um triângulo ABC, no qual a altura AD é igual ao lado correspondente. Demonstrar que todos os retângulos inscritos nesse triângulo, com dois vértices em BC, têm o mesmo perímetro.

75) Dados um triângulo ABC retângulo em A, D o ponto médio de AB, DE perpendicular a BC, demonstrar que $EC^2 - EB^2 = AC^2$.

76) De um ponto qualquer, traçam-se AO', OB' e OC' respectivamente perpendiculares aos lados BC, CA e AB de um triângulo ABC. Demonstrar que: $AB'^2 + BC'^2 + CA'^2 = AC'^2 + BA'^2 + CB'^2$

77) Dá-se um triângulo ABC, retângulo em A; de um ponto D qualquer da hipotenusa, traça-se DE perpendicular a AB e DF perpendicular a AC. Demonstrar que DB.DC = EA.EB + FA.FC.

78) Em um triângulo ABC, D, E e F são os pontos médios dos lados AC, AB e BC, respectivamente. Se BG é uma altura de ΔABC, prove que ∠EGF = ∠EDF.

79) Em um triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em C, tome os pontos D ∈ AB, E ∈ AB, F ∈ BC e G ∈ AC de modo que BD = BC, AE = AE, EF ⊥ BC e DG ⊥ AC. Prove que DE = EF + DG.

80) Em um triângulo ABC, BE e AD são alturas. F, G e K são os pontos médios de AH, AB e BC, respectivamente. Prove que ∠FGK = 90°.

81) Em ΔABC, a altura $\overline{BE}$ é prolongada até um ponto G de modo que $\overline{EG} = \overline{CF}$. A reta que passa por G e é paralela a $\overline{AC}$ encontra $\overline{BA}$ em H. Prove que $\overline{AH} = \overline{AC}$.

82) P é um ponto da altura $\overline{CD}$ de um triângulo ABC. $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ encontram os lados $\overline{CB}$ e $\overline{CA}$ nos pontos Q e R, respectivamente. Prove que $\angle QDC = \angle RDC$.

83) Em um triângulo ABC, E é um ponto qualquer sobre a altura AD. Prove que $AC^2 - CE^2 = AB^2 - EB^2$.

84) A hipotenusa $\overline{AB}$ de um triângulo ABC é dividido em quatro segmentos congruentes G, E e H, de modo que $\overline{AG} = \overline{GE} = \overline{EH} = \overline{HB}$. Se $\overline{AB} = 20$, determine o valor de $\overline{CG}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{CH}^2$.

85) AB = 5 m e AC = 2m são os catetos de um triângulo retângulo. A mediatriz da hipotenusa BC intercepta o cateto AB em I. Calcular AI.

86) Os lados de um triângulo são AB = 28 cm, AC = 21 cm e BC = 35 cm. Uma paralela ao lado BC intercepta os lados AB e AC nos pontos D e E, respectivamente. Calcular os três lados desconhecidos do trapézio BDEC, sabendo que seu perímetro é 74 cm.

87) ABC e A'B'C' são dois triângulos retângulos cujos catetos AB = 10 cm e A'B' = 16 cm têm por suporte uma mesma reta XY; os outros dois catetos são AC = 12 cm e A'C' = 8 cm. Uma paralela à reta XY intercepta os lados AC, BC, A'C' e B'C' respectivamente nos pontos D, E, D', E', tais que DE = D'E'. Calcular AD e DE.

88) AB = 18 cm, AC = 12 cm e BC = 24 cm são os lados de um triângulo ABC. A reta DE, determinada pelo ponto D do prolongamento do lado BC, tal que DC = 4 cm, e pelo ponto E do lado AB, tal que EA = 2 cm, intercepta AC em F. Calcular CF e AF.

89) Sobre os catetos AB e AC de um triângulo retângulo ABC constroem-se externamente os quadrados ADEB e ACFG. A reta CE intercepta AB em N e a reta BF intercepta AC em N. Demonstrar que:
a) AM = AN; b) $AM^2 = BM.CN$.

90) Determinar o lado do quadrado inscrito em um losango ABCD com diagonais AC = a e BD = b.

91) Uma paralela ao lado AB de um triângulo ABC intercepta os lados CA e CB nos pontos M e N, respectivamente. Calcular CM = x, em função dos lados a, b, c do triângulo ABC, sabendo que o perímetro do triângulo CMN é igual ao do trapézio ABNM.

92) AD é a mediana relativa ao lado BC de um triângulo ABC. Por um ponto P do lado BC traça-se a paralela a AD, que intercepta AB em M e AC em N. Demonstrar que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

93) M e N são os pontos médios dos catetos AB e AC de um triângulo retângulo ABC. A paralela à hipotenusa traçada pelo vértice A intercepta as retas BN e CM nos pontos D e E, respectivamente. Demonstrar a relação $BD^2 + CE^2 = 5BC^2$.

94) Provar que quando dois triângulos retângulos são semelhantes, o produto das hipotenusas é igual à soma dos produtos dos outros lados homólogos.

95) Demonstrar que em um triângulo retângulo a projeção do ponto médio de um dos catetos sobre a hipotenusa determina dois segmentos cuja diferença dos quadrados é igual ao quadrado do outro cateto.

96) Em um triângulo retângulo, a diferença das projeções das projeções dos catetos sobre a hipotenusa é igual à altura h relativa à hipotenusa. Achar as expressões dos três lados do triângulo em função de h.

97) Num quadrado ABCD, cujo lado é a, tomam-se respectivamente sobre os lados AB e BC os pontos M e N, tais que o quadrilátero BMDN e os triângulos retângulos ADM e CDN têm o mesmo perímetro. Calcular as distâncias do vértice D aos pontos M e N.

98) Num triângulo eqüilátero ABC, cujo lado é a, tomam-se sobre o lado BC os pontos M e N, tais que os triângulos ABM, AMN e ANC têm o mesmo perímetro. Calcular as distâncias do vértice A aos pontos M e N.

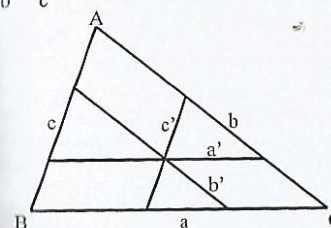
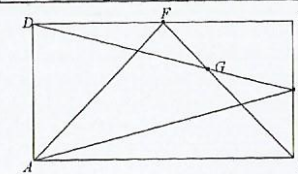
99) Num triângulo eqüilátero ABC, cujo lado é a, inscreve-se um triângulo eqüilátero DEF, cujos lados são respectivamente perpendiculares aos lados do triângulo ABC. Calcular o lado do triângulo eqüilátero DEF.

100) Provar que quando a altura relativa à hipotenusa de um triângulo divide esta em dois segmentos cuja razão é 1/3, um ângulo agudo é o dobro do outro.

101) Num triângulo retângulo ABC, traçam-se:
(1) a altura AD = h relativa à hipotenusa BC = a;
(2) as alturas DE e DF dos triângulos retângulos parciais ABD e ADC, que determinam nas suas hipotenusas respectivas os segmentos BE = p e CF = q. Demonstrar as relações:
(i) $p^2 + q^2 + 3h^2 = a^2$; (ii) $apq = h^3$.

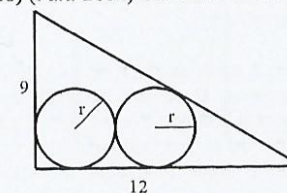
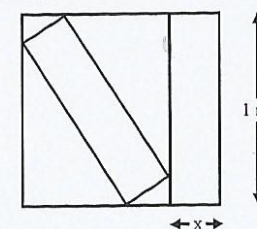
102) Sejam A, B, C três pontos do plano e X, Y, Z os pontos médios de AB, BC e AC, respectivamente. Finalmente, seja P um ponto sobre BC tal que $\angle CPZ = \angle YXZ$. Prove que AP e BC são perpendiculares.

103) Em um triângulo ABC, seja M o ponto médio de BC e sejam P e R pontos sobre AB e AC, respectivamente. Seja Q a interseção de AM e PR. Prove que se Q é o ponto médio de PR, então PR ∥ BC.

104) A partir de um ponto P interior a um triângulo ABC traçam-se paralelas aos seus lados, como se mostra na figura. Demonstre que $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 2$.

105) (OBM-2000) No retângulo *ABCD*, *E* é o ponto médio do lado *BC* e *F* é o ponto médio do lado *CD*. A interseção de *DE* com *FB* é *G*.

O ângulo EÂF mede 20°. Quanto vale o ângulo EĜB ?

106) (OBM-2004) No triângulo *PQR*, a altura *PF* divide o lado *QR* em dois segmentos de medidas *QF* = 9 e *RF* = 5. Se *PR* = 13, qual é a medida de *PQ*?
a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

107) (OBM-2002) No triângulo *ABC*, o ângulo $\hat{A}$ mede 60° e o ângulo $\hat{B}$ mede 50°. Sejam *M* o ponto médio do lado *AB* e *P* o ponto sobre o lado *BC* tal que *AC* + *CP* = *BP*. Qual a medida do ângulo *MPC*?
a) 120° b) 125° c) 130° d) 135° e) 145°

108) (Pará-2002) Calcule o valor de r.

109) (Pará-2003) Em uma caixa quadrada de guardar livros, dois livros idênticos são colocados como mostra a figura abaixo. Suponha que a altura dos livros é de 1 m. Determine a espessura x dos livros.

110) (Clubes Cabri) Dado um triângulo *ABC*, sejam *D*, *E* e *F* os pontos médios dos lados *BC*, *CA* e *AB* respectivamente. Por *D* traçam-se as retas M_1 e M_2 perpendiculares a *AB* e *AC*

respectivamente. Por E traçam-se as retas M_3 e M_4 perpendiculares a BC e AB respectivamente. Por F traçam-se as retas M_5 e M_6 perpendiculares a AC e BC respectivamente. Seja A' a interseção entre M_4 e M_5. Seja B' a interseção entre M_6 e M_1. Seja C' a interseção entre M_2 e M_3. Demonstrar que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes e achar a razão de semelhança.

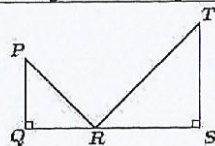
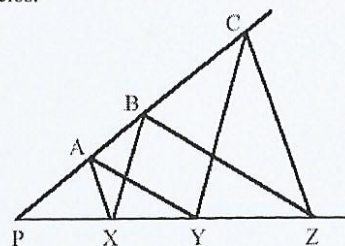
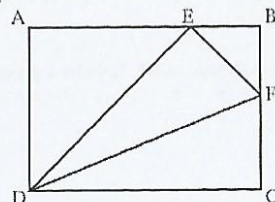
111) (Clubes Cabri) Dado um triângulo ABC equilátero, seja A^+ o simétrico de A com respeito a B, seja A^- o simétrico de A com respeito a C; seja B^+ o simétrico de B com respeito a C, seja B^- o simétrico de B com respeito a A e seja C^+ o simétrico de C com respeito a A, seja C^- o simétrico de C com respeito a B. Traçam-se as retas A^+A^-, B^+B^- e C^+C^- formando-se o triângulo $A'B'C'$ nas interseções de tais retas. Provar que tais triângulos são semelhantes. Determinar a razão de semelhança.

112) (Clubes Cabri) Dado um triângulo ABC traçam-se os pontos médios das medianas. Provar que o triângulo formado é semelhante a ABC e achar a razão de semelhança.

113) (Clubes Cabri) A partir de um triângulo ABC, constroem-se os pontos: D como interseção das retas perpendiculares a AB por B e AC por C; E como interseção das retas perpendiculares a BC por C e BA por A; F como interseção das retas perpendiculares a CA por A e CB por B. Provar que o triângulo DEF é semelhante ao ABC. Qual é sua razão de semelhança?

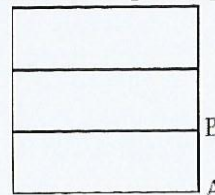
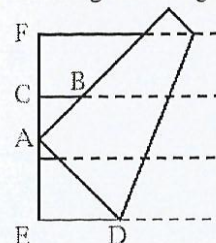
114) (Clubes Cabri) Seja ABC um triângulo. Seja D o simétrico de C com respeito a A, seja E o simétrico de D com respeito a B e seja F o simétrico de E com respeito a C. Demonstrar que ABC e CFD são semelhantes.

115) (Clubes Cabri) Seja ABC um triângulo e sejam P e Q sobre AC e BC respectivamente. Sejam M e N os pontos médios de AP e CQ respectivamente. Sabendo que $\angle QAC = \angle QMN$ demonstrar que os triângulos PQM e MQC são semelhantes.

116) (Blundon Contest-2003) No diagrama, PQ = 8, TS = 12 e QS = 20. Determine QR sabendo que $\angle PRT$ é um ângulo reto.

117) (Wisconsin-2002) Os pontos P, A, B e C são colineares, tal qual os pontos P, X, Y e Z. Se AY e BZ são paralelos e se BX e CY são paralelas, mostre que os segmentos AX e CZ também são paralelos.

118) (São Paulo-2000) Na figura a seguir, ABCD é um retângulo e DAE e EBF são triângulos isósceles.

a) Determine a medida do ângulo $D\hat{E}F$.

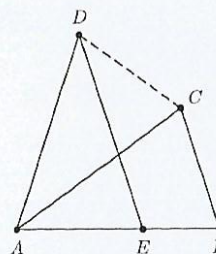
b) Para m($F\hat{D}C$) = 24°, calcule m($D\hat{F}E$).

C) Sendo BF = y e FC = x, calcule o perímetro de ABCD.

119) (São Paulo-2000) O desenho abaixo representa uma folha de papel quadrada, de lado 3 cm, dividida em três partes iguais por duas paralelas, como mostra a figura a seguir:

Podemos fazer uma dobra que leva o ponto A até ao lado esquerdo e o ponto B até a paralela superior, obtendo a seguinte configuração:

(i) Mostre que os triângulos ABC e DAE são semelhantes.

(ii) Mostre que $\frac{AF}{AE} = \frac{a}{b}$.

120) (Rio de Janeiro-2000) O triângulo ABC é equilátero de lado a. Sobre o lado AB, marca-se o ponto P, tal que $AP = b$ (onde $b < a$), e sobre o prolongamento do lado BC, marca-se o ponto Q (mais próximo de C do que de B) tal que $CQ = b$. O segmento PQ corta o lado AC no ponto M. Mostre que M é o ponto médio de PQ.

121) (OBM-2004) Na figura, ABC e DAE são triângulos isósceles ($AB = AC = AD = DE$) e os ângulos BAC e ADE medem 36°.

a) Utilizando propriedades geométricas, calcule a medida do ângulo $E\hat{D}C$.

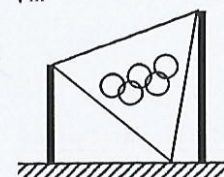
b) Sabendo que $BC = 2$, calcule a medida do segmento DC.

c) Calcule a medida do segmento AC.

122) (OBM-98) No triângulo ABC, D é o ponto médio de AB e E o ponto do lado BC tal que BE = [illegible] EC. Dado que os ângulos $A\hat{D}C$ e $B\hat{A}E$ são iguais, encontre o ângulo $B\hat{A}C$.

123) (OBM-97) Sejam $ABCD$ um quadrado, M o ponto médio de AD e E um ponto sobre o lado AB. P é a interseção de EC e MB. Mostre que a reta DP divide o segmento EB em dois segmentos de mesma medida.

124) (OBM-84 banco) De um ponto D qualquer sobre a hipotenusa BC de um triângulo retângulo ABC baixam-se perpendiculares DE e DF sobre os catetos. Para que ponto D o comprimento do segmento EF que une os pés destas perpendiculares é mínimo?

125) (Pará-2004) Em homenagem às Olimpíadas de Atenas, um grupo de amigos resolveu construir uma grande bandeira em forma de triângulo equilátero, que será suspensa por dois de seus vértices através de postes verticais, um de 4 metros e outro de 3 metros. O terceiro vértice da bandeira apenas toca o solo. Se o comprimento de cada lado da bandeira é d, determine o valor de d na forma $\sqrt{\frac{n}{m}}$, onde n e m são números naturais.

126) (Ceará-2002) Um quadrado é dividido em quatro triângulos retângulos congruentes e um quadrado menor, conforme a figura 1. Esses quatro triângulos retângulos e o quadrado menor são rearranjados da forma indicada na figura 2. O matemático indiano Bhaskara demonstrava o teorema de Pitágoras com a ajuda desses diagramas. Obtenha, a partir das figuras abaixo, uma demonstração do teorema de Pitágoras: o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados dos seus catetos.

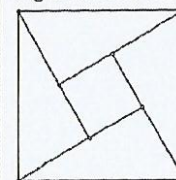



figura1

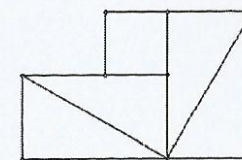
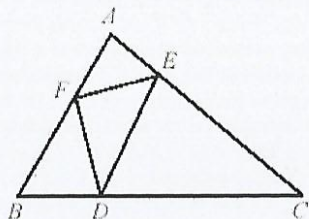
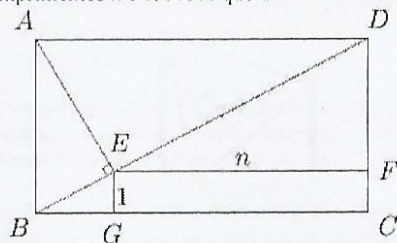



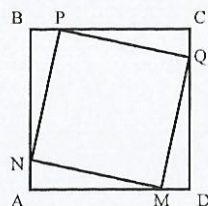
figura2

127) (Canadian Open Challenge-2000) Em um triângulo ABC, os pontos D, E e F estão sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente, tais que ∠AFE = ∠BFD, ∠BDF = ∠CDE e ∠CED = ∠AEF.

a) Prove que ∠BDF = ∠BAC.
b) Se AB = 5, BC = 8 e CA = 7, determine o comprimento de BD.

128) (Canadian Open Challenge-96) Um retângulo ABCD possui diagonal de comprimento d. A reta AE é traçada perpendicularmente à diagonal BD. Os lados do retângulo EFCG possuem comprimentos n e 1. Prove que $d^{2/3} = n^{2/3} + 1$.

129) (Wisconsin-98) Pontos P, Q e R são escolhidos nos lados BC, AC e AB, respectivamente, de ΔABC, de modo que CP = 2BP, BR = 2AR e AQ = 2CQ. Então os pontos X e Y são escolhidos sobre os lados PR e PQ, respectivamente, de modo que RX = 2PX e PY = 2QY. Prove que as retas XY e BC são paralelas.

130) (Argentina-98) No triângulo ABC, sejam D e E nos lados AB e AC, respectivamente. Se ∠ABC = ∠AED, AD = 3, AE = 2, DB = 2, determinar o valor de EC.

131) (Uruguai-2000) Um quadrado ABCD é dado. Traçam-se três retas paralelas por B, C e D tais que as distâncias entre a do meio e as outras duas sejam iguais a 5 e 7 unidades. Qual o lado do quadrado?

132) (Uruguai-98) Temos dois quadrados como indicado na figura seguinte, onde ABCD possui lado 6 e MNPQ possui lado 5. Calcular o perímetro de ΔAMN.

133) (Rio de Janeiro-2000) O triângulo ABC é equilátero de lado a. Sobre o lado AB, marca-se o ponto P, tal que $AP = b$ (onde $b < a$), e sobre o prolongamento do lado BC, marca-se o ponto Q (mais próximo de C do que de B) tal que $CQ = b$. O segmento PQ corta o lado AC no ponto M. Mostre que M é o ponto médio de PQ.

134) (Rioplatense-2003) Seja ABC um triângulo com $AB = 30$, $BC = 50$, $CA = 40$. As retas ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c são paralelas a BC, CA, AB, respectivamente, e intersectam o triângulo. As distâncias entre ℓ_a e BC, ℓ_b e CA, ℓ_c e AB são 1, 2, 3, respectivamente. Encontrar os lados do triângulo determinado por ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c.

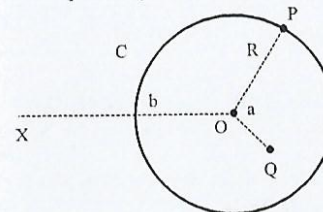
135) (Ahsme-86) Em um triângulo ABC, AB = 8, BC = 7, CA = 6 e o lado BC é prolongado, a partir de C, até um ponto P de modo que ΔPAB seja semelhante a ΔPCA. O comprimento de PC é:
a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

136) (Invitational Challenge-2001) Pontos X e Y são escolhidos nos lados BC e CD, respectivamente, de um quadrado ABCD, de modo que ∠AXY = 90°. Prove que o lado do quadrado é igual a $\dfrac{AX^2}{\sqrt{AX^2 + (AX - XY)^2}}$.

Introdução aos Círculos

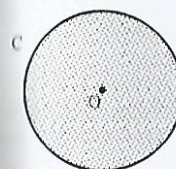
3.1) DEFINIÇÕES INICIAIS:

Circunferência de centro em O e **raio** R é o conjunto dos pontos do plano que estão a uma mesma distância (R) do ponto O.

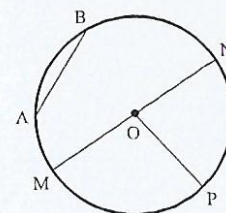
Costuma-se utilizar a denominação LUGAR GEOMÉTRICO (l.g) para designar um conjunto de pontos com determinada propriedade. Nesses termos, diz-se que a circunferencia C de centro em O e raio R é o l.g dos pontos do plano equidistantes R de O.

C = {P∈α: $d_{P,O}$ = R}
(α é o Plano em Estudo)

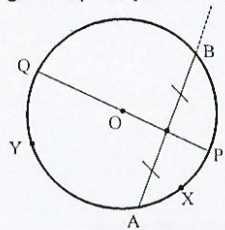
Quando um ponto Q está a uma distância de O menor que R, diz-se que Q pertence ao **interior** de C. Quando a distância de um ponto X a O é maior que R, diz-se que X é **exterior** a C.

P∈C ⇔ $d_{P,C} = R$
P é interior a C ⇔ $d_{P,C} < R$
P é interior a C ⇔ $d_{P,C} > R$

Círculo (ou disco) de Centro O e raio R é a união de C com os seus pontos interiores (ou, simplesmente, interior).

Círculo ou disco = Circunferência ∪ interior = $\{P \in \alpha : d_{P,O} \le R\}$

OBS: É comum que se use o termo círculo querendo se fazer referência a uma circunferência. O significado deve ficar claro no contexto.

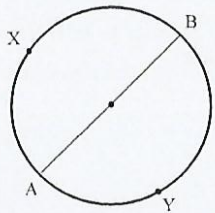
Uma **corda** de uma circunferência (ou de um disco) é qualquer segmento com extremidades sobre a circunferência (que limita o disco). Um **diâmetro** é qualquer corda que contém o centro. **Um raio** é o segmento qualquer com uma extremidade no centro e a outra na circunferência.

$\overline{AB}$ é uma corda
$\overline{MN}$ é um diâmetro (corda especial)
$\overline{OP}$ é um raio

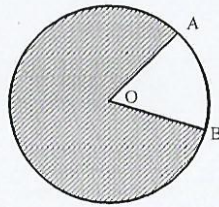
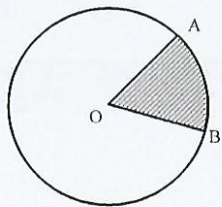
Um **arco** de uma circunferência é um subconjunto da circunferência contido num dos semi-planos determinados por uma corda. Assim, toda corda determina dois arcos. Uma **flecha** de um cerco é o segmento com uma extremidade sobre a corda, outra sobre a circunferência, tal que a reta suporte do segmento passe pelo centro da circunferência e pelo ponto médios da corda.

A corda $\overline{AB}$ determina dois arcos:

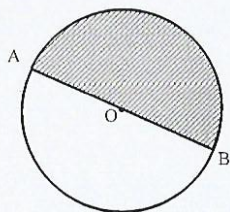
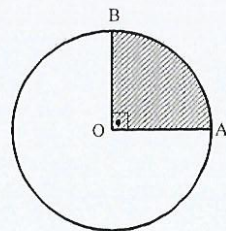
$\widehat{AXB}$ (Arco Menor), cuja flecha é $\overline{MP}$;

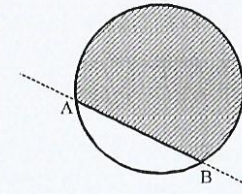
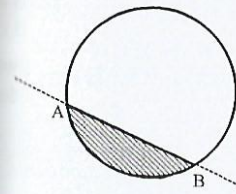
$\widehat{AYB}$ (Arco Maior), cuja flecha é $\overline{MQ}$;

Os pontos P e Q são ditos **pontos médios** dos arcos $\widehat{AXB}$ e $\widehat{AYB}$, respectivamente. Quando não há motivo para confusão, é usual apresentar o menor dos dois arcos supra citados apenas por $\widehat{AB}$.

É possível que não exista o maior dentre os arcos $\widehat{AXB}$ e $\widehat{AYB}$. Neste caso, os arcos são congruentes, $\overline{AB}$ é um diâmetro, e cada um deles é denominado **semicircunferência.**

$\widehat{AXB}$ e $\widehat{AYB}$ são semicircunferências.

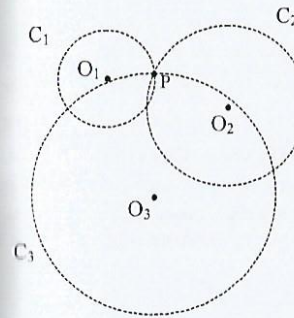
Um ângulo qualquer com vértice em O recebe o nome de **ângulo central**. A interseção do interior (ou do exterior) de um ângulo central com um círculo denomina-se **setor circular.**

Setores Circulares
("Fatias" do círculo)

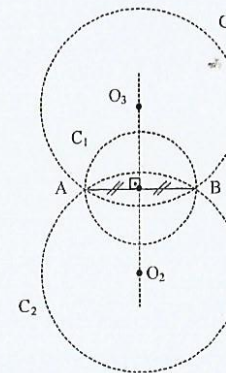
Quando o ângulo central é **raso**, determinam-se dois **semicírculos**. Quando o ângulo central é **reto**, tem-se um **quadrante** do círculo.

Um semicírculo

Um quadrante de círculo

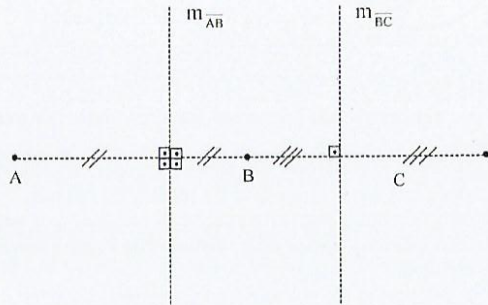
Por último, tem-se um **segmento circular** como interseção de um círculo com um dos semiplanos determinados por uma certa corda.

Segmentos circulares

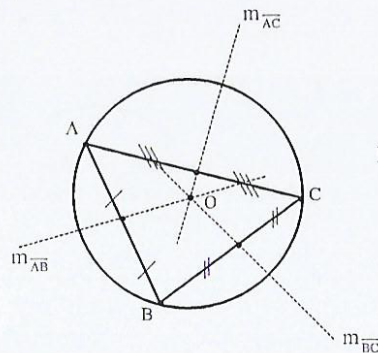
3.2) DETERMINAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

Uma circunferência fica bem determinada por três pontos não colineares. Parafraseando: por três pontos não colineares passa uma única circunferência.

Antes de demonstrar este importante resultado, deve-se esclarecer que para determinar (construir) uma circunferência (de modo único), deve-se saber onde está seu centro e qual é a medida do seu raio. Assim, por exemplo, para responder à pergunta: "como construir uma circunferência passando por um certo ponto P?", basta escolher qualquer um dos outros infinitos pontos de α, distintos de P, para servir de centro. O raio será a distância entre P e o centro escolhido.

Existem infinitas circunferências passando por um ponto dado (P).

Alterando a pergunta para "como construir uma circunferência passando por dois pontos (distintos) dados?", basta lembrar de escolher o centro sobre a mediatriz do segmento de extremidades nos pontos dados. O raio será a distância do centro escolhido até qualquer dos pontos dados.

Há, ainda, infinitas circunferências por dois pontos dados (A e B), mas todas elas devem ter o centro sobre a mediatriz $\overline{AB}$.

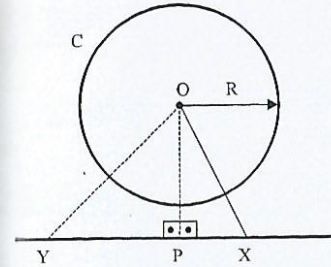
E por três pontos? Quantas circunferências conseguem passar? A resposta é: DEPENDE. Se os três pontos forem **colineares**, não há circunferência pelos três. Em verdade, se houvesse uma circunferência por três pontos colineares, A, B e C, então o seu centro, O, deveria eqüidistar de A, de B e de C. Particularmente, eqüidistando de A e de B, O deveria localizar-se sobre $m_{\overline{AB}}$. Eqüidistando de B e de C, O também deveria estar sobre $m_{\overline{BC}}$ (por serem ambas perpendiculares a uma mesma reta: a que passa pelos três pontos). Mas, aí, não poderia haver ponto O e, muito menos, circunferência passando por A, B e C, já que $m_{\overline{AB}} \cap m_{\overline{BC}} = \varnothing$.

Não há circunferência por 3 pontos colineares, pois $m_{\overline{AB}} \cap m_{\overline{BC}} = \varnothing$.

Contudo, se A, B e C não forem colineares, então $m_{\overline{AB}}$ não poderiam ser paralelas. Como são distintas, tais mediatriz encontrar-se-iam num **único ponto**, O. Como $O \in m_{\overline{BC}}$, OB = OC. Por transitividade, AO = OC, ou seja, $O \in m_{\overline{AC}}$. Logo, haveria um único ponto, O, eqüidistante de A, de B e de C, e, conseqüentemente, uma única circunferência passando por três pontos não colineares dados. (c.q.d.)

Por 3 pontos não colineares, há uma única circunferência.

3.2.1) Corolário: Uma reta tem, no máximo, dois pontos distintos em comum com uma circunferência. De fato, se houvesse 3 pontos (distintos dois a dois) comuns à circunferência e à reta, então os 3 pontos seriam colineares, o que seria um absurdo.

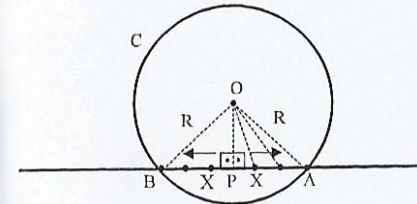
3.3) POSIÇÕES RELATIVAS DE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

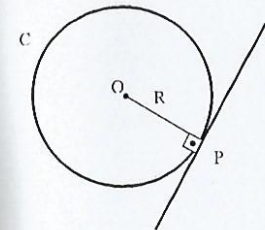
Uma reta pode ter ou exatamente dois ou exatamente um ou exatamente nenhum ponto em comum com uma circunferência C. Conseqüentemente, uma circunferência (bem como o círculo que ela delimita) é uma região convexa.

Com efeito, tomando uma distância **maior** que o raio de C como a distância entre o centro de C e A reta r, é fácil concluir que todos os pontos de r serão exteriores a C.

$d_{O,r} = OP > R \Leftrightarrow OX \geq OP > R, \forall X \in r \Leftrightarrow$

$X \notin C$ (X é exterior a C), $\forall X \in r \Leftrightarrow r \cap C = \varnothing$

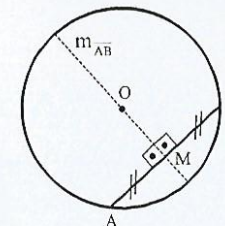
Diz-se que r é **exterior** a C.

Fazendo a distância de r a C ser **inferior** a R, à medida que X afastas-se de P, é possível provar que as distâncias de O a X aumentam até que alcancem o tamanho do raio. Isso ocorre para exatamente dois pontos, um em cada semi-reta determinada por P em r, A e B.

Diz-se que r e C são **secantes** quando $r \cap C = \{A,B\}$ $(A \neq B)$, ou, equivalente, quando do, r < R.

Comparando a distância do centro de uma circunferência a uma reta qualquer, percebe-se que ainda resta uma última possibilidade: do, r = R. Neste caso, prova-se (a seguir) que a reta r tem um único ponto em comum com a circunferência, denominado **ponto de tangência.** Em tempo: a circunferência e a reta são ditas **tangentes.**

R é tangente A C $\Leftrightarrow d_{r,O} = R \Leftrightarrow r \cap C = \{P\}$

Seguem alguns teoremas importantes.

3.4) TEOREMA DAS CORDAS (RETA SECANTE)

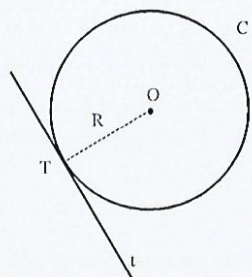
Se $\overline{AB}$ é uma corda de uma circunferência, então a mediatriz de $\overline{AB}$ passa pelo centro.

$AM = MB \Leftrightarrow \overline{OM} \perp \overline{AB}$

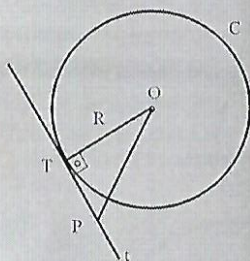
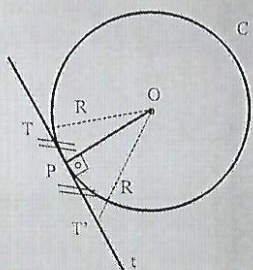
Demonstração

Basta notar que OA = OB = R, isto é, que O eqüidista de A e de B, portanto $O \in m_{\overline{AB}}$.

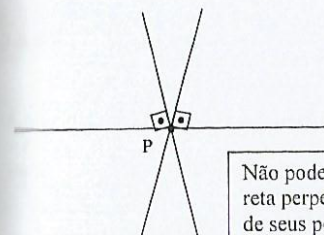
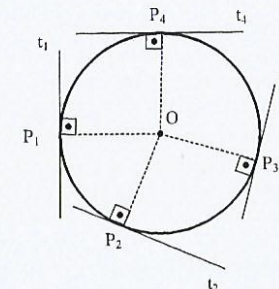
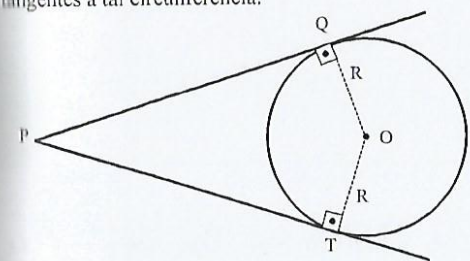
Na realidade, note-se que qualquer linha que ligue o ponto médio de uma corda genérica ao centro será perpendicular à corda.

3.5) TEOREMA DA RETA TANGENTE

Uma reta é tangente a uma circunferência se, e somente se, for perpendicular a um raio (no ponto de tangência).

$$t \cap C = \{T\} \Leftrightarrow \overline{OT} \perp (d_{O,t} = R)$$

Demonstração:

($\Leftarrow$) Suponha-se que $\overline{OT} \perp t$ e que P seja um ponto de t, distinto de T. então, no triângulo OPT, retângulo em T, $\overline{OP}$ é hipotenusa e, portanto, maior que o cateto OT. Daí, OP > OT = R, o que significa que P é exterior a C, sendo T o único ponto comum a t e a C. Logo, t é tangente a C.

($\Rightarrow$) Suponha-se, agora, que C e T sejam tangentes, isto é, que T seja o único ponto comum a C e a t. Deseja-se provar que $\overline{OT} \perp t$. Utilizar-se-á o método indireto de demonstração. Se $\overline{OT}$ não fosse perpendicular a t, então a perpendicular a t passando por O intersectaria t em um ponto P≠T. Assim, haveria outro ponto (único) em t, tal que um ponto PT'=PT, isto é, tal que P seria médio de TT'. Dessa forma, $\overleftrightarrow{OP}$ seria mediatriz de TT' e, conseqüentemente, OT'=OT=R. Daí, T' pertenceria a C, o que é um absurdo, pois $t \cap C = \{T\}$. Logo, $\overline{OT} \perp t$ ($d_{O,T} = R$), necessariamente. (c.q.d.)

3.5.1) Corolário: Em cada ponto de uma circunferência há uma única reta tangente à circunferência.

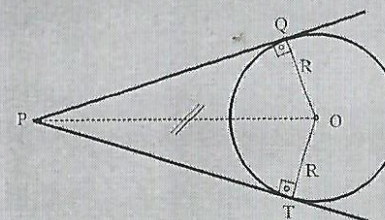
Isso é conseqüência do fato de haver uma única reta perpendicular a uma reta dada por um de seus pontos.

OBS.: É possível provar que, por um ponto fora de uma circunferência, há, exatamente, duas retas tangentes a tal circunferência.

$\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{PT}$ são tangentes à C

Note-se que O é um ponto da bissetriz do ângulo $Q\hat{P}T$, pois O eqüidista dos lados desse ângulo (item 3).

3.6) SEGMENTOS TANGENTES

Segmentos com extremidade num mesmo ponto fora da circunferência e tangentes a ela são congruentes. Na figura anterior: PQ = PT

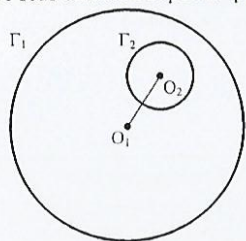
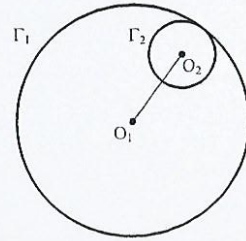
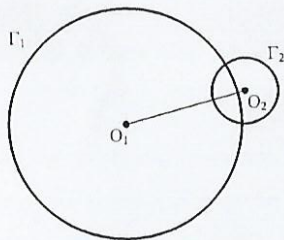
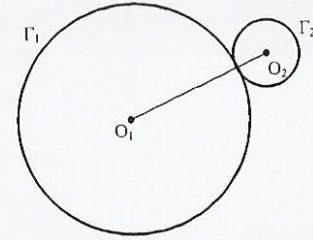
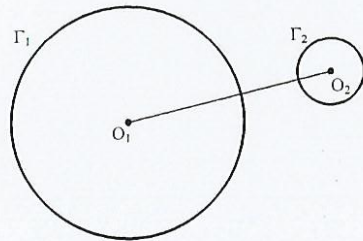
Demonstração:

Basta notar que os triângulos POQ e POT são congruentes, por serem retângulos e terem hipotenusa e um cateto congruentes. Logo, PQ = PT (c.q.d.).

3.7) POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

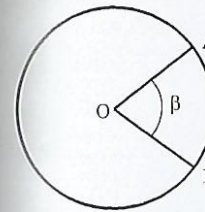
3.7.1) Definições:

- Uma circunferência é interna a outra se todos os seus pontos são pontos internos da outra.
- Duas circunferências são ditas externas se os pontos de uma delas são externos à outra.
- Duas circunferências são tangentes internamente (ou tangentes internas) se uma delas é interna à outra e têm um único ponto comum.
- Duas circunferências são tangentes externamente (ou tangentes externas) se são externas e têm um único ponto comum.
- Duas circunferências são secantes se têm em comum somente dois pontos distintos.

3.7.2) Posições Relativas

Considere duas circunferências Γ_1, de centro O_1 e raio r_2, e Γ_2, de centro O_2 e raio r_2. Seja d a distância entre seus centros e suponha que $r_1 > r_2$.

Circunferência Γ_2 é interna a Γ_1
$d < r_1 - r_2$

Circunferência Γ_2 é tangente interna a Γ_1
$d = r_1 - r_2$

Circunferências Γ_1 e Γ_2 são secantes
$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$

As circunferências Γ_1 e Γ_2 são tangentes externas
$d = r_1 + r_2$

As circunferências Γ_1 e Γ_2 são externas
$d > r_1 + r_2$

3.8) ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

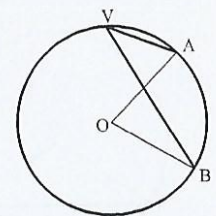
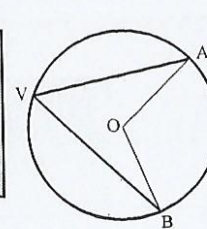
3.8.1) Ângulo Central: É o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência.

Na figura ao lado, $\angle AOB$ é um ângulo central.

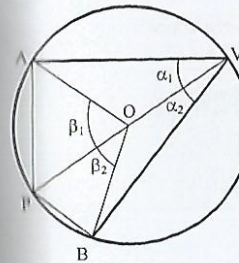
$\overset{\frown}{AB}$ é denominado de arco correspondente ao ângulo central $\angle AOB$.

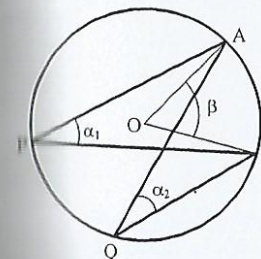
Por definição: $\beta = \text{med}(\overset{\frown}{AB})$

3.8.2) Ângulo Inscrito: É o ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados secantes à circunferência.

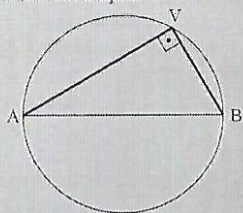
Nas duas figuras temos que $\angle AVB$ é um ângulo inscrito. Temos também que $\angle AOB$ é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito $\angle AVB$.

$\overset{\frown}{AB}$ é o arco correspondente ou subtendido pelo ângulo inscrito $\angle AVB$.

3.8.2.1) Teorema: Um ângulo inscrito é igual à metade do ângulo central correspondente.

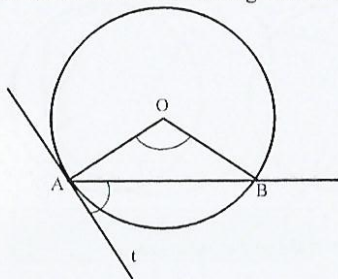
Demonstração:

Na figura $\alpha = A\hat{V}B$ é o ângulo inscrito, correspondente ao arco $\overset{\frown}{AB}$ B.
$\beta = A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito $\alpha = A\hat{V}B$.
Trace e prolongue VO até encontrar a circunferência em P.
Como ΔAOV é isósceles então $\angle AOV = 180° - 2\alpha_1 \Rightarrow$
$180° - 2\alpha_1 = 180° - \beta_1 \Rightarrow \beta_1 = 2\alpha_1$.
Analogamente $\beta_2 = 2\alpha_2$. Assim: $\beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) \Rightarrow$
$\beta = 2\alpha$.
A demonstração do caso em que o centro da circunferência é exterior ao ângulo é análoga.

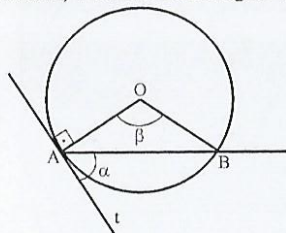
3.8.2.2) Teorema: Dois ângulos inscritos que correspondam à mesma corda (ou arco) na circunferência são iguais.

De fato, como α_1 e α_2 são ângulos inscritos relativos ao ângulo central β, então $\beta = 2\alpha_1$ e $\beta = 2\alpha_2$, ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2$.
Perceba que, mantendo fixos os pontos A e B, por mais que os pontos P e Q andem pela circunferência, os ângulos $\angle APB$ e $\angle AQB$ são sempre iguais.

3.8.2.3) Teorema: Todo ângulo reto pode ser inscrito em uma semi-circunferência.

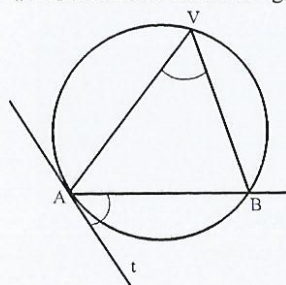
Demonstração:

Considere o ângulo reto ∠AVB. Trace a circunferência que passa pelos pontos A, V e B. Suponha que O é o centro desta circunferência.
Uma vez que o ângulo inscrito ∠AVB vale 90°, então o ângulo central ∠AOB correspondente a este ângulo inscrito vale 180°. Assim, concluímos que o ponto O pertence ao segmento de reta AB, fazendo com que AB seja o diâmetro da circunferência e que ∠AVB seja um ângulo inscrito na circunferência de diâmetro AB.

Como conseqüência deste teorema temos que todo triângulo retângulo pode ser inscrito em uma semi-circunferência, com o diâmetro coincidindo com a hipotenusa deste triângulo retângulo.

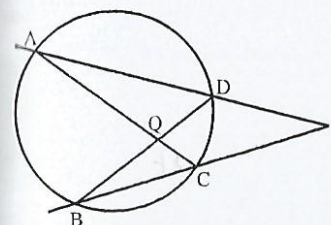
3.8.3) Ângulo de Segmento ou Ângulo Semi-Inscrito: É o ângulo que possui um vértice na circunferência e o outro tangente à circunferência.

Na figura:
tÂB (ou ∠tAB) é o ângulo de segmento
$\overset{\frown}{AB}$ é o arco correspondente ao ângulo de segmento ∠tAB
∠AOB é o ângulo central correspondente

3.8.3.1) Teorema: Um ângulo semi-inscrito é igual à metade do ângulo central correspondente.

Seja O o centro da circunferência.
Como ΔOAB é isósceles e AO ⊥ At ⇒ ∠OÂB = 90° − ∠tÂB ⇒ 90° − β/2 = 90° − α ⇒ α = β/2.

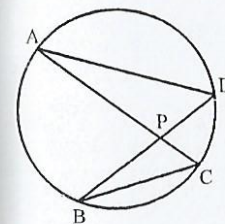
Portanto, a medida do ângulo de segmento é tal que $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$

3.8.3.2) Teorema: Um ângulo inscrito e outro semi-inscrito que correspondam à mesma corda (ou arco) na mesma circunferência são iguais.

Demonstração:
Seja O o centro da circunferência onde os ângulos inscrito e semi-inscrito são traçados.
De fato, tanto o ângulo inscrito ∠AVB e o ângulo semi-inscrito ∠tAB são iguais à metade do ângulo central ∠AOB correspondente.

Logo ∠AVB = ∠tAB.

3.8.4) Ângulo entre secantes a uma circunferência (Ângulos Excêntricos)
Vértice externo ao círculo (Excêntrico Exterior)

Perceba que:
∠APB = (180° − ∠ACP) − ∠CAP = ∠ACB − ∠CAP ⇒

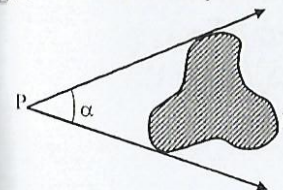
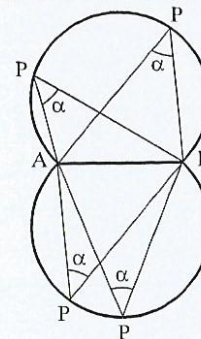
$$\angle APB = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

Vértice interno ao círculo (Excêntrico Interior)

∠APB = 180° − ∠APD = ∠PDA + ∠PAD ⇒

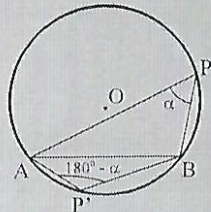
$$\angle APB = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

3.9) ARCO-CAPAZ

3.9.1) Definição: Dados um segmento $\overline{AB}$ e um ângulo α, denominam-se arcos-capazes de $\overline{AB}$, segundo α, o lugar geométrico dos pontos P de um plano (que contém $\overline{AB}$) tais que $A\hat{P}B$ meça α.

De um modo geral, diz-se que P enxerga uma figura plana F sob um ângulo α. Quando o menor ângulo de vértice em P e que contém F mede α.

Desse modo, cada um dos (dois) arcos de circunferência formados por pontos de um plano que visam um segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo α é um arco-capaz de $\overline{AB}$, segundo α.

3.9.2) Teorema

O l. g. dos pontos de um plano que contém $\overline{AB}$ que o enxergam sob um angulo α é a união de dois arcos de circunferência que tem $\overline{AB}$ por corda comum e que estão situados em semi-planos distintos em relação a $\overline{AB}$.

Demonstração:

Inicialmente, seja P um ponto sobre uma circunferência que possui $\overline{AB}$ por corda e que fique dividida, por $\overline{AB}$, em dois arcos de medidas 2α e $360° - 2\alpha$ (arcos AP'B e BPA, respectivamente)

Então, $m(A\hat{P}B) = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha$ (ou $180° - \alpha$, no outro arco).

É fácil provar que o arco contido no outro semi-plano relativo a $\overline{AB}$, distinto do arco considerado, também possui seus pontos visando $\overline{AB}$ sob α (ou $180° - \alpha$).

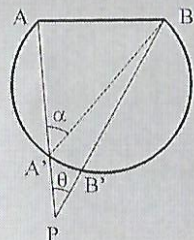
Resta provar que um ponto qualquer sobre fora dos arcos supra-citados não enxerga $\overline{AB}$ sob o ângulo α. Suponha-se que X seja um ponto exterior a uma das circunferências (por exemplo, a inferior), descritas anteriormente. Ligando-se P aos pontos A e B, obtêm-se os pontos A' e B', sobre tal circunferência, tais que:

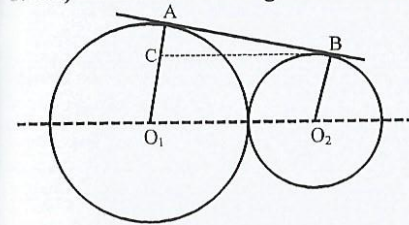
$\overline{PA} \cap$ circunferência = A'
$\overline{PB} \cap$ circunferência = B'

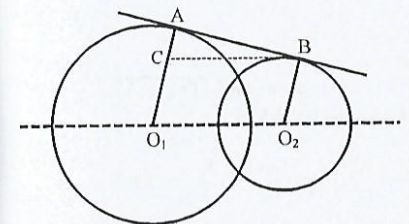
Portanto, pelo que já foi demonstrado:

$A\hat{A}'B > A\hat{P}B$, pelo teorema do ângulo externo, aplicado ao triangulo PBA'. Logo:

$\alpha > \theta \Rightarrow \theta \neq \alpha \Rightarrow P \notin$ l. g.

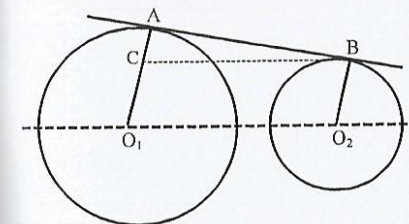
Analogamente, quando P está no interior de uma das circunferências que geram os arcos-capazes, é imediato provar que $\alpha < \theta$. Dessa forma, o l. g. é uma união dos dois arcos-capazes descritos.

3.10) SEGMENTOS TANGENTES COMUNS A DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

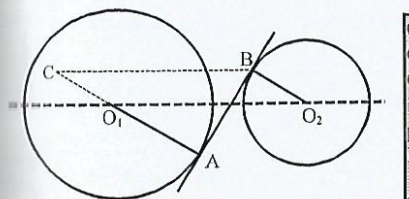
3.10.1) Circunferências tangentes externamente

Considere duas circunferências tangentes, de centros O_1 e O_2 e raios R e r, respectivamente.
A partir de B trace uma reta paralela a O_1O_2, que intersecta O_1A em C. Devido aos paralelismos, temos que $BC = R + r$ e $AC = R - r$.
Pelo Teorema de Pitágoras:
$AB^2 = BC^2 - AC^2 \Rightarrow AB^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 \Rightarrow$
$AB^2 = R^2 + 2Rr + r^2 - R^2 + 2Rr - r^2 = 4Rr \Rightarrow$
$AB = 2\sqrt{Rr}$

3.10.2) Circunferências secantes

Considere duas circunferências secantes, de centros O_1 e O_2 e raios R e r, respectivamente, sendo d a distância entre O_1 e O_2.
A partir de B trace uma reta paralela a O_1O_2, que intersecta O_1A em C. Devido aos paralelismos, temos que $BC = d$ e $AC = R - r$.
Pelo Teorema de Pitágoras:
$AB^2 = BC^2 - AC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{d^2 - (R - r)^2}$

3.10.3) Circunferências exteriores

Existem duas formas de traçarmos tangentes comuns a duas circunferências exteriores.

1° Caso (Tangente Externa):

Considere duas circunferências exteriores, de centros O_1 e O_2 e raios R e r, respectivamente, sendo d a distância entre O_1 e O_2. A partir de B trace uma reta paralela a O_1O_2, que intersecta O_1A em C. Devido aos paralelismos, temos que $BC = d$ e $AC = R - r$.
Pelo Teorema de Pitágoras:
$AB^2 = BC^2 - AC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{d^2 - (R - r)^2}$

2° Caso (Tangente Interna)

Considere duas circunferências exteriores, de centros O_1 e O_2 e raios R e r, respectivamente, sendo d a distância entre O_1 e O_2. A partir de B trace uma reta paralela a O_1O_2, que intersecta o prolongamento de O_1A em C. Devido aos paralelismos, temos que $BC = d$ e $AC = R + r$.
Pelo Teorema de Pitágoras:
$AB^2 = BC^2 - AC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{d^2 - (R + r)^2}$

Exemplos:

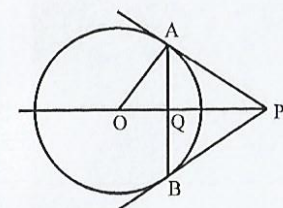
1) (Colégio Naval-98) A distância entre os centros de dois círculos de raios iguais a 5 e 4 é 41. Assinale a opção que apresenta a medida de um dos seguimentos tangentes aos dois círculos.
a) 38,5 b) 39 c) 39,5 d) 40 e) 40,5

Solução:
As duas diagonais medem:

i) $d_1 = \sqrt{d^2 - (R - r)^2} = \sqrt{41^2 - 1^2} \Rightarrow d_1 \cong 40,98$

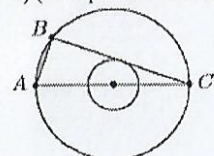
ii) $d_1 = \sqrt{d^2 - (R + r)^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} \Rightarrow d_1 \cong 40$

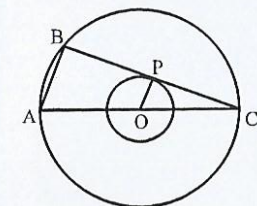
2) (Mackenzie-2002) Por um ponto P que dista 10 do centro de uma circunferência de raio 6 traçam-se as tangentes à circunferência. Se os pontos de tangência são A e B, então a medida do segmento AB é igual a:
a) 9,6 b) 9,8 c) 8,6 d) 8,8 e) 10,5

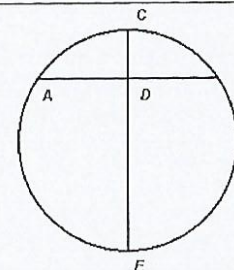
Solução:

Como OA é um raio e AP é uma tangente, então OA ⊥ AP.
Aplicando o Teorema de Pitágoras em ΔAOP:
$OP^2 = OA^2 + AP^2 \Rightarrow 100 = 36 + AP^2 \Rightarrow AP = 8$

$\Delta AOP \sim \Delta QAP \Rightarrow \frac{AQ}{OA} = \frac{AP}{OP} \Rightarrow \frac{AQ}{6} = \frac{8}{10} \Rightarrow AQ = 4,8$

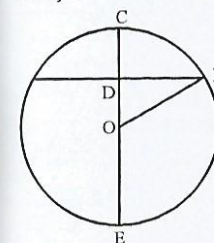
Como $AB = 2AQ \Rightarrow AB = 9,6$

3) (Olimpíada de Portugal-2001) Na figura

estão desenhadas duas circunferências concêntricas de raios r e 3r. Sejam [AC] um diâmetro e [BC] uma corda da circunferência maior tangente à circunferência menor. Se AB = 12, quanto vale r?

Solução:

Perceba que $\Delta COP \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{CO}{CA} = \frac{OP}{AB} \Rightarrow \frac{3r}{6r} = \frac{r}{12} \Rightarrow r = 6$

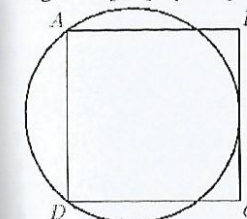
4) (Unifei-2005) A figura abaixo mostra uma circunferência, onde $\overline{AB}$ é uma corda perpendicular ao diâmetro $\overline{CE}$. Sabe-se que a corda $\overline{AB}$ mede a e que a flecha $\overline{CD}$ mede b. Esse é um exemplo típico de seção transversal de uma tubulação pluvial, onde a corda $\overline{AB}$ representa o nível d'água , num certo instante.

Nessas condições, pode-se afirmar que o raio R da circunferência mede:

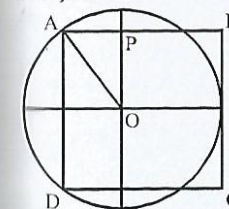
a) $R = \frac{b^2 - 4a^2}{8a}$ b) $R = \frac{a^2 + 4b^2}{8b}$ c) $R = \frac{a^2 - 4b^2}{8b}$ d) $R = \frac{b^2 + 4a^2}{8a}$.

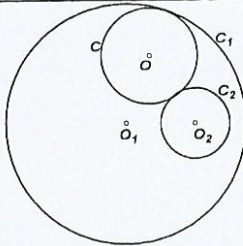
Solução:

Seja O o centro da circunferência. Note que OD = OC – CD = R – b.
Uma vez que o triângulo ODB é retângulo:

$OB^2 = OD^2 + BD^2 \Rightarrow R^2 = (R - b)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$R^2 = R^2 - 2Rb + b^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow R = \frac{a^2 + 4b^2}{8b}$.

5) (Olimpíada de Portugal-98) Na figura, [ABCD] é um quadrado de lado 16 cm. A circunferência é tangente a [BC] e passa pelos vértices A e D.

Quanto mede o raio da circunferência?

Solução:

A partir do centro O da circunferência trace uma perpendicular a AB, que corta esta em P. Note que AP = 16 – R, OP = 8 e AO = R.
Aplicando o Teorema de Pitágoras em ΔAOP:
$AO^2 = AP^2 + OP^2 \Rightarrow R^2 = (16 - R)^2 + 64 \Rightarrow$
$R^2 = 256 - 32R + R^2 + 64 \Rightarrow 32R = 320 \Rightarrow R = 10$ cm

6) (UFRR-2004) Considere o círculo C_1, de centro O_1 e raio 14 cm e o círculo C_2, de centro O_2 e raio 2 cm, totalmente contido no interior de C_1, como ilustrado na figura abaixo.

Construímos um círculo C, de centro O, simultaneamente tangente a C_2 exteriormente e tangente a C_1 interiormente. O valor da soma das distâncias entre o centro deste novo círculo aos centros dos círculos C_1 e C_2 (isto é: $\overline{OO_1} + \overline{OO_2}$), em centímetros, é igual a:

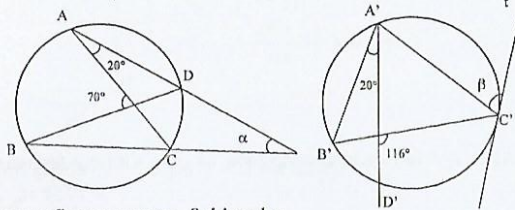
a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16

Solução:

Como C_1 e C são tangentes interiores: $OO_1 = R_1 - R$.

Como C_2 e C são tangentes exteriores: $OO_2 = R_2 + R$.

Logo: $OO_1 + OO_2 = R_1 - R + R_2 + R = R_1 + R_2 = 16$ cm.

7) (EPCAr-2002) Observe as figuras abaixo onde a reta t é tangente à circunferência em C'.

Pode-se afirmar que $\alpha + \beta$ é igual a

a) 60° b) 66° c) 70° d) 74°

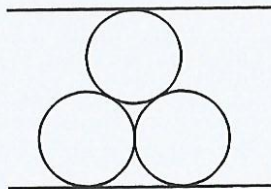
Solução:

Na figura I temos que: i) $\widehat{CD} = 2\hat{A} = 40°$; ii) $\alpha = \dfrac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$; iii) $70° = \dfrac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$.

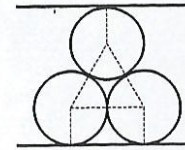
Subtraindo ii e iii temos que $70° - \alpha = \widehat{CD} = 40° \Rightarrow \alpha = 30°$

Na figura II temos que: i) $116° = \dfrac{\widehat{A'B'} + \widehat{D'C'}}{2}$; ii) $\widehat{B'D'} = 2.\hat{A}' = 40°$; iii) $\widehat{A'C'} = 2\beta$

Como $\widehat{A'B'} + \widehat{D'C'} + \widehat{B'D'} + \widehat{A'C'} = 360° \Rightarrow 232° + 40° + 2\beta = 360° \Rightarrow \beta = 44°$

8) (UFRGS-2003) Na figura abaixo, os três círculos têm o mesmo raio r, as retas são paralelas, os círculos são tangentes entre si e cada um deles é tangente a uma das duas retas.

Dentre as afirmativas abaixo, a melhor aproximação para a distância entre as retas é:

a) 3r b) 3,25r c) 3,5r d) 3,75r e) 4r

Solução:

A distância entre as retas é igual 2r + h, onde h é a altura de um triângulo equilátero de lado 2r. Logo: $d = 2r + r\sqrt{3} \cong 2r + 1{,}73r = 3{,}73r$

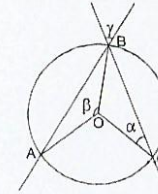
Dentre as alternativas, a melhor aproximação é 3,75r.

9) (EPCAr-2000) Na figura abaixo, os pontos A, B e C pertencem à circunferência de centro O. Se $\beta = 150°$ e $\gamma = 50°$, então α é:

a) 15°

b) 30°

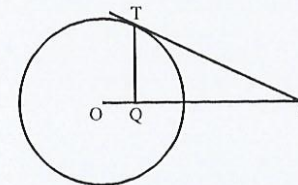
c) 35°

d) 45°

Solução:

Como OB = OC então ΔABC é isósceles e $\angle OBC = \angle OCB = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 180° - 2\alpha$.

Desde que $\angle AOB = \beta = 150°$, então o ângulo agudo $\angle AOC$ vale $180° - \beta + 2\alpha = 2\alpha + 30°$.

Portanto, $\gamma = \dfrac{\widehat{AC}}{2} = \dfrac{2\alpha + 30°}{2} \Rightarrow 2\alpha + 30° = 100° \Rightarrow \alpha = 35°$.

10) (UFMG-2001) Observe esta figura:

Nessa figura, o círculo tem centro O e raio 6 e OP = 16. A reta PT é tangente ao círculo em T e o segmento TQ é perpendicular à reta OP. Assim sendo, o comprimento do segmento QP é

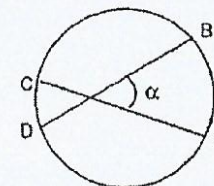
a) 13,75 b) 13,85 c) 14,25 d) 14,5

Solução:

Como PT é tangente ao círculo em T então o triângulo OTP é retângulo com ângulo reto em T.

Pelas relações métricas no triângulo retângulo: $OT^2 = OQ.OP \Rightarrow 36 = OQ.16 \Rightarrow OQ = 2{,}25$.

Assim: $QP = OP - OQ = 16 - 2{,}25 = 13{,}75$.

11) (UFPE-96) Na figura abaixo, o círculo tem raio 1, os arcos AB e CD medem $\pi/6$ e $\pi/9$ respectivamente (ambos orientados no sentido anti-horário). Calcule o valor de $\dfrac{144}{\pi}\alpha$

Solução:

$\alpha = \dfrac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 2\alpha R = AB.R + CD.R \Rightarrow 2\alpha = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{9} = \dfrac{5\pi}{18} \Rightarrow \dfrac{144}{\pi}\alpha = 20.$

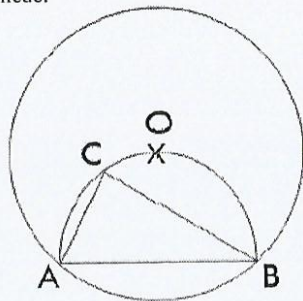
12) (Cefet/PR-2003) AB é um arco capaz de 90° da circunferência menor, isto é, de qualquer ponto C sobre AB *"vemos"* a corda AB = 8cm sob um ângulo de 90° como mostra a figura. O raio da circunferência de centro O mede:

a) 2 cm

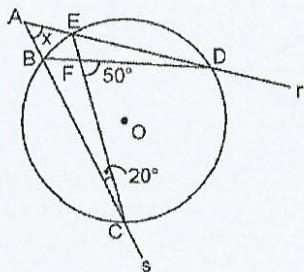
b) $2\sqrt{2}$ cm

c) 4 cm

d) $4\sqrt{2}$ cm

e) $8\sqrt{2}$ cm

Solução:

O triângulo AOC é retângulo isósceles com ângulo reto em O: $R = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = 4\sqrt{2}$ cm.

13) (Unifor-2000) Na figura abaixo têm-se duas retas, r e s, traçadas pelo ponto A e secantes à circunferência de centro O.

Se $B\hat{C}E = 20°$ e $C\hat{F}D = 50°$, então a medida x do ângulo assinalado é:

a) 30° b) 20° c) 15° d)10° e) 5°

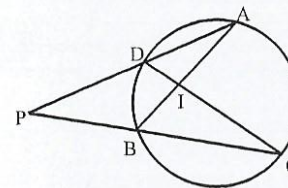
Solução:

Se $\angle CFD = 50°$ então $\angle BFC = 130°$. Pela soma dos ângulos internos de ΔBFC: $\angle FBC = 30°$.
Como $\angle BCE = 50°$ então o arco BE equivale a um ângulo central de 40°.
Analogamente, como $\angle CBD = 30°$ então o arco CD é igual a 60°.

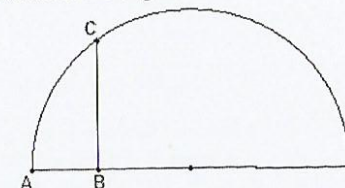
Logo: $x = \dfrac{\widehat{BE} + \widehat{CD}}{2} = \dfrac{40° + 60°}{2} = 50°$.

14) (Colégio Naval-99) Num círculo, duas cordas AB e CD se interceptam no ponto I interno ao círculo. O ângulo **$D\hat{A}I$** mede 40° e o ângulo **$C\hat{B}I$** mede 60°. Os prolongamentos de AD e CB encontram-se num ponto P externo ao círculo. O ângulo **$A\hat{P}C$** mede:

a) 10° b) 20° c) 30° d) 40° e) 50°

Solução:

$\angle APC = \dfrac{\widehat{AC}}{2} - \dfrac{\widehat{BD}}{2} = \angle CBA - \angle DAB = 60° - 40° = 20°$

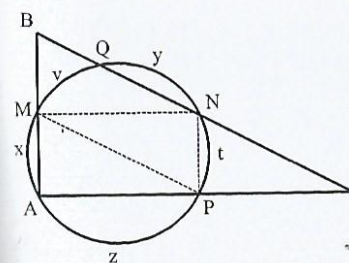
15) (IBMEC-2004) Se o diâmetro da semi-circunferência abaixo mede 5cm, AB mede 1 cm e o $\angle ABC$ mede 90°, então a medida de BC é igual a

a) 1 cm
b) $\sqrt{2}$ cm
c) 2 cm
d) $2\sqrt{2}$ cm
e) $2\sqrt{3}$ cm

Solução:

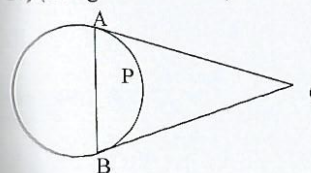
Como ΔACD é um triângulo inscrito em uma semi-circunferência então é um triângulo retângulo com ângulo reto em C e a hipotenusa AD coincidindo com o diâmetro AD da circunferência. Pelas relações métricas nos triângulos retângulos: $AC^2 = AB.AD = 5$.
Aplicando o Teorema de Pitágoras em ΔABC: $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 5 = 1 + BC^2 \Rightarrow BC = 2$ cm.

16) (Colégio Naval-2003) Considere um triângulo retângulo e uma circunferência que passa pelos pontos médios dos seus três lados. Se **x, y** e **z**, **(x < y < z)** são as medidas dos arcos dessa circunferência, em graus, exteriores ao triângulo, então.

a) $z = 360° - y$ b) $z = x + y$ c) $x + y + z = 180°$ d) $x + y = 108°$ e) $z = 2x + y$

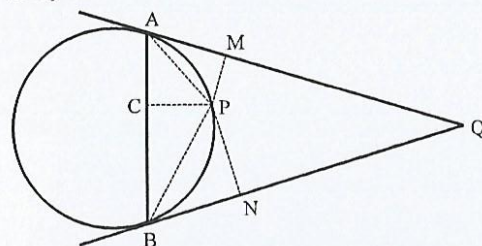
Solução:

Sejam M, N e P os pontos médio dos lados AB, BC e AC, respectivamente, seja Q o outro ponto de interseção da circunferência com o lado BC e sejam t e v, respectivamente, os menores arcos NP e MQ.
É fácil ver que $x = AM$, $y = QN$ e $z = PA$.
Repare que MN é paralelo a AC e NP é paralelo a AB.
Como $\angle BAC = 90°$ concluímos que:
i) MNPA é um retângulo $\Rightarrow \overline{MN} = \overline{PA}$ e $\overline{NP} = \overline{AM} \Rightarrow t = x$ e $z = v + y$.
ii) MP é diâmetro da circunferência $\Rightarrow x + z = 180°$

Uma vez que $\angle MNB = \angle APM$ então $v = x$. Assim, $z = v + y \Leftrightarrow z = x + y$.

17) (Colégio Naval-2002)

Observe a figura acima:

O ponto P do menor arco AB dista 6cm e 10cm, respectivamente, das tangentes AQ e BQ. A distância, em cm, do ponto P á corda AB é igual a:

a) $\sqrt{30}$ b) $2\sqrt{15}$ c) 16 d) 18 e) $6\sqrt{10}$

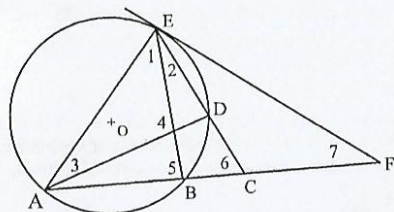
Solução:

Inicialmente perceba que $\angle PAM = \angle PBA$.
Como $\angle AMP = \angle BNP = 90°$, então

$\Delta AMP \sim \Delta BCP \Rightarrow \dfrac{AP}{BP} = \dfrac{MP}{CP}$ (1)

Como $\Delta ACP \sim \Delta BNP \Rightarrow \dfrac{CP}{NP} = \dfrac{AP}{BP}$ (2)

Comparando (1) e (2): $\dfrac{CP}{NP} = \dfrac{MP}{CP} \Rightarrow$

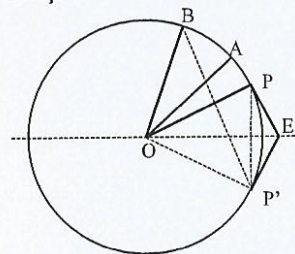
$CP = \sqrt{MP.NP} = \sqrt{6.10} = 2\sqrt{15}$

18) (ITA-90) Na figura abaixo O é o centro de uma circunferência. Sabendo-se que a reta que passa por E e F é tangente a esta circunferência e que a medida dos ângulos 1, 2 e 3 são dadas, respectivamente, por 49°, 18°, 34°, determinar a medida dos ângulos 4, 5, 6 e 7. Nas alternativas abaixo considere os valores dados iguais às medidas de 4, 5, 6 e 7, respectivamente.

a) 97°, 78°, 61°, 26°
b) 102°, 79°, 58°, 23°
c) 92°, 79°, 61°, 30°
d) 97°, 79°, 61°, 27°
e) 97°, 80°, 62°, 29°

Solução:

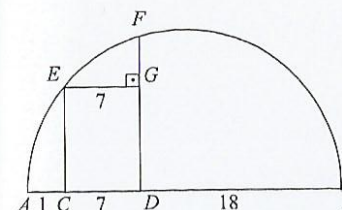
$\underline{4} = 180° - (\underline{1} + \underline{3}) = 180° - (49° + 34°) = 97°$
$\angle ADE = 180° - (\underline{1} + \underline{2} + \underline{3}) = 180° - (49° + 18° + 34°) = 79°$
$\underline{5} = \angle ADE \Rightarrow \underline{5} = 79°$
$\angle DAB = \underline{2} \Rightarrow \angle DAB = 18°$
$\angle ADC = 180° - \angle ADE = 180° - 79° = 101°$
$\underline{6} = 180 - (\angle DAC + \angle ADC) = 180° - (18° + 101°) = 61°$
$\underline{7} = \underline{5} - (\underline{3} + \angle DAB) = 79° - (34° + 18°) = 27°$

19) (IME-76/77) De um ponto exterior E a um círculo (O) qualquer traçam-se duas tangentes T e T' a esse círculo, sendo os pontos de tangência P e P'. O ângulo PEP' mede 140°. De P traça-se a corda PA cujo arco mede 10° no sentido do maior arco PP' sobre o círculo. De A traça-se a corda AB cujo arco mede 30°, no mesmo sentido do arco PA. Pede-se: a) o ângulo EPP'; b) o ângulo BP'E.

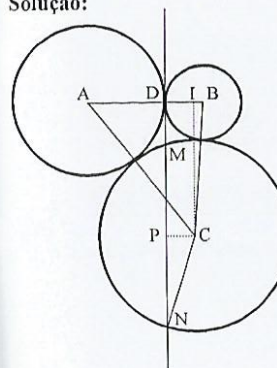
Solução:

Como $\overline{EP} = \overline{EP'} \Rightarrow \angle EPP' = \angle EP'P \Rightarrow$
$\angle EPP' = (180° - 140°)/2 = 20°$
$\angle BP'E = \angle BP'P + \angle PP'E = (\angle POA + \angle AOB)/2 + \angle PP'E \Rightarrow$
$\angle BP'E = (10° + 30°)/2 + 20° \Rightarrow \angle BP'E = 40°$

20) (OBM-2004) Seja AB um segmento de comprimento 26, e sejam C e D pontos sobre o segmento AB tais que $AC = 1$ e $AD = 8$. Sejam E e F pontos sobre uma semicircunferência de diâmetro AB, sendo EC e FD perpendiculares a AB. Quanto mede o segmento EF?

a) 5 b) $5\sqrt{2}$ c) 7 d) $7\sqrt{2}$ e) 12

Solução:

Como AB = 26, AC = 1 e CD = 7 então DB = 18.
Seja G o ponto onde a paralela a AB passando por E encontra o segmento de reta FD.
Assim, como CDGE é um retângulo temos que EG = 7.
AEB é um triângulo retângulo pois está inscrito em uma semicircunferência. Pelas relações métricas nos triângulos retângulos: $EC^2 = AC.BC = 1.25 \Rightarrow EC = 5$.
Como AFB é um triângulo retângulo:
$FD^2 = AD.BD = 8.18 \Rightarrow FD = 12$.
Logo: $FG = FD - GD = FD - EC = 12 - 5 = 7$.
Aplicando o Teorema de Pitágoras em ΔEGF: $EF^2 = EG^2 + FG^2 = 49 + 49 \Rightarrow EF = 7\sqrt{2}$.

21) Três círculos de centros em A, B e C e de raios respectivamente iguais a r, s e t se tangenciam exteriormente dois a dois. A tangente comum interior aos dois primeiros círculos intersecta o terceiro determinando uma corda MN. Provar que: $MN = \dfrac{4\sqrt{rs}}{r+s}t$.

Solução:

Seja D o ponto de tangência entre as circunferências de centros A e B.
Sejam P e I as projeções de C sobre MN e AB, respectivamente.
Suponha que BI = x, CI = h e que DI = PC = y. Note que x + y = s.
Pelo Teorema de Pitágoras em ΔCIA e ΔCIB:

$(r + t)^2 = h^2 + (r + s - x)^2$
$(s + t)^2 = h^2 + x^2$

Subtraindo estas equações:

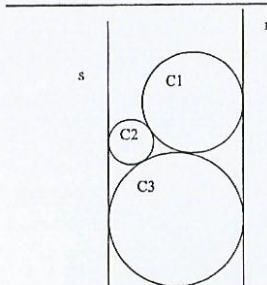
$(r + t)^2 - (s + t)^2 = (r + s - x)^2 - x^2 \Rightarrow$
$(r + s + 2t)(r - s) = (r + s)(r + s - 2x) \Rightarrow$
$(r + s + 2t)(r - s) = (r + s)(r - s + 2y) \Rightarrow$

$r - s + 2y = \dfrac{(r+s+2t)(r-s)}{r+s} \Rightarrow 2y = \dfrac{(r+s+2t)(r-s)}{r+s} - (r-s) \Rightarrow$

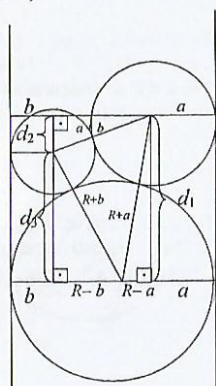
$2y = (r-s)\left(\dfrac{r+s+2t}{r+s} - 1\right) = (r-s)\dfrac{2t}{r+s} \Rightarrow y = \dfrac{t(r-s)}{r+s}$

Aplicando o teorema de Pitágoras em ΔPCN:

$$t^2 = y^2 + \left(\frac{MN}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{MN}{2}\right)^2 = t^2 - \frac{t^2(r-s)^2}{(r+s)^2} = t^2\frac{4rs}{(r+s)^2} \Rightarrow MN = \frac{4\sqrt{rs}}{r+s}t$$

22) (OBM-2003) A figura abaixo mostra duas retas paralelas r e s. A reta r é tangente às circunferências $C1$ e $C3$, a reta s é tangente às circunferências $C2$ e $C3$ e as circunferências tocam-se como também mostra a figura.

As circunferências $C1$ e $C2$ têm raios a e b, respectivamente. Qual é o raio da circunferência $C3$?

A) $2\sqrt{a^2+b^2}$ B) $a+b$ C) $2\sqrt{ab}$ D) $\frac{4ab}{a+b}$ E) $2b-a$

Solução:

Seja R o raio de C. Então, utilizando o teorema de Pitágoras:

$$d_1 = d_2 + d_3 \Rightarrow$$

$$\sqrt{(R+a)^2-(R-a)^2} = \sqrt{(a+b)^2-(2R-(a+b))^2} + \sqrt{(R+b)^2-(R-b)^2} \Rightarrow$$

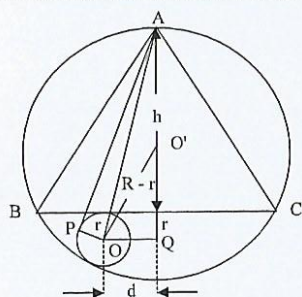
$$\sqrt{4Ra} = \sqrt{4R(a+b)-4R^2} + \sqrt{4Rb} \Rightarrow$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{a+b-R} + \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a+b-R} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \Rightarrow$$

$$a + b - R = a - 2\sqrt{ab} + b \Rightarrow R = 2\sqrt{ab}$$

23) (OBM Jr.-96) Seja ABC um triângulo eqüilátero inscrito em uma circunferência $\&_1$; $\&_2$ é uma circunferência tangente ao lado BC e ao menor arco BC de $\&_1$. Uma reta através de A tangencia $\&_2$ em P. Prove que AP = BC.

Solução:

Inicialmente, vamos construir a figura proposta no enunciado.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo APO, temos:

$AO^2 = AP^2 + r^2 \Rightarrow AP^2 = AO^2 - r^2$ (1)

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AOQ, temos:

$AO^2 = d^2 + (h + r)^2$ (2)

Assim, substituindo (2) em (1): $AP^2 = d^2 + (h + r)^2 - r^2 \Rightarrow$

$AP^2 = d^2 + h^2 + 2hr$ (3)

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo O'OQ, temos:

$(R - r)^2 = d^2 + (h/3 + r)^2 \Rightarrow d^2 = (2h/3 - r)^2 - (h/3 + r)^2 \Rightarrow$

$d^2 = 4h^2/9 - 4hr/3 + r^2 - h^2/9 - 2hr/3 - r^2 \Rightarrow$

$d^2 = h^2/3 - 2hr$ (4)

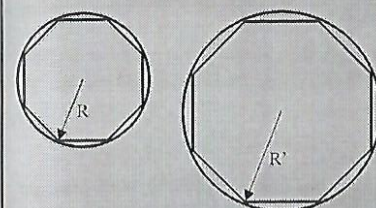
Portanto, substituindo (4) em (3):

$AP^2 = h^2/3 - 2hr + h^2 + 2hr \Rightarrow AP^2 = 4h^2/3 = BC^2 \Rightarrow$

$AP = BC$

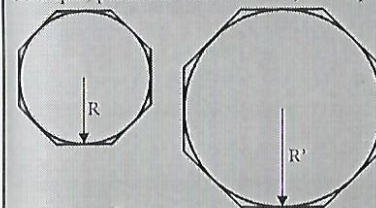
3.11) O NÚMERO π E O COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

3.11.1) Teorema: Os comprimentos de duas circunferências são proporcionais aos seus diâmetros.

Demonstração:

Considere duas circunferências de raio R e R' e comprimentos C e C'. Define-se x como $x = \frac{R'}{R}.C$.

Inscrevem-se dois polígonos regulares, um em cada circunferência, de mesmo número de lados. Se ℓ_n e ℓ_n' são os lados destes polígonos pode-se escrever $\frac{\ell_n}{\ell_n'} = \frac{R}{R'}$.

Se $2p_n$ e $2p_n'$ são os perímetros dos dois polígonos é verdade que $2p_n = n.\ell_n$ e $2p_n' = n.\ell_n'$, implicando que $\frac{2p_n}{2p_n'} = \frac{R}{R'}$. Pela definição de x tem-se $x = \frac{C}{2p_n}2p_n'$.

Desde que o polígono de perímetro $2p_n$ está inscrito na circunferência de raio R, tem-se $C > 2p_n$, fazendo com que, para todo inteiro $n \geq 3$, verifique-se $x > 2p_n'$.

Tomando agora as mesmas circunferências de raios R e R', circunscreve-se dois polígonos, cada um de n lados, de perímetros $2P_n$ e $2P_n'$. Realizando cálculos análogos aos anteriores chega-se à conclusão que $x = \frac{C}{2P_n}.2P_n'$.

Como o polígono de perímetro $2P_n$ está circunscrito à circunferência de raio R tem-se $C < 2P_n$, ou seja, $x > 2P_n'$.

Observe que, independentemente de n e de R, tem-se que x está sempre entre $2p_n'$ e $2P_n'$, sendo que quando n cresce $2p_n'$ cresce e $2P_n'$ decresce. Além disso, as seqüências definidas pelos valores de $2p_n'$ e $2P_n'$ são limitadas e convergem para um mesmo número real. Logo, quando n tende ao infinito, tem-se $x = C'$, implicando que $\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'} =$ constante.

3.11.2) Teorema: O comprimento de uma circunferência de raio R é igual a $2\pi R$.

Demonstração:

De fato, pelo teorema anterior conclui-se que a relação $\frac{C}{R}$ é constante. Chamando esta constante de π, obtém-se $C = 2\pi R$. Para se ter uma idéia do valor de π, observe a tabela abaixo.

n	2p/2R	2P/2R
6	3,00000	3,46411
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14156	3,14188
384	3,14156	3,14167

Repare que, com o crescimento de n, os valores de 2p/2R crescem enquanto que os valores de 2P/2R decrescem, tendendo para o número π que, escrito com precisão até a décima casa decimal depois da vírgula, vale 3,1415926535...

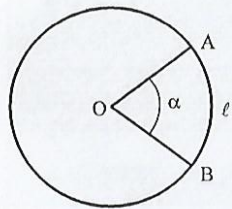
Desde há muito (cerca de 4000 anos) notou-se que o número de vezes em que o diâmetro está contido na circunferência é sempre o mesmo, seja qual for o tamanho desta circunferência. Os

babilônios já tinham observado que o valor de π se situa entre $3\frac{1}{8}$ e $3\frac{1}{7}$, ou seja, $\frac{25}{8} < \pi < \frac{22}{7}$. Em frações decimais, isto dá $3{,}125 < \pi < 3{,}142$.

O Velho Testamento, que foi escrito cerca de 500 anos AC (embora baseado em tradições judaicas bem mais antigas) contém um trecho segundo o qual $\pi = 3$ (Primeiro Livro dos Reis, VII: 23). Desde Arquimedes, que obteve o valor $\pi = 3{,}1416$, matemáticos se têm ocupado em calcular π com precisão cada vez maior. O inglês William Shanks calculou π com 707 algarismos decimais exatos em 1873. Em 1947 descobriu-se que o cálculo de Shanks errava no 527º algarismo (e portanto nos seguintes). Com o auxílio de uma maquininha manual, o valor de π foi, então, calculado com 808 algarismos decimais exatos. Depois vieram os computadores. Com seu auxílio, em 1967, na França, calculou-se π com 500.000 algarismos decimais exatos e, em 1984, nos Estados Unidos, com mais de dez milhões (precisamente 10.013.395) de algarismos exatos!

O primeiro a usar a notação π para o valor de C/2R foi o matemático inglês W. Jones (1675-1749). Entretanto, somente depois que L. Euler (1707-1783) passou a utilizar o símbolo π que isto tornou-se padrão entre os outros matemáticos. Porém, até então, não era sabido se π era racional ou irracional. Tentava-se calcular π com cada vez mais casas decimais na expectativa de surgir alguma periodicidade. Somente em 1767 que o matemático J. H. Lambert (1728-1777) demonstrou que π era um número irracional.

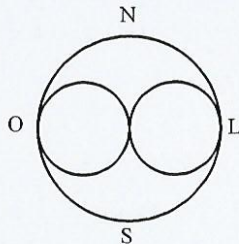
3.11.3) Comprimento do Arco de Circunferência

Podemos observar que o comprimento de um arco de circunferência é proporcional ao ângulo central que compreende este arco.

Assim, de acordo com a proporção, onde ℓ é o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$:

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\ell}{2\pi R} \Rightarrow \ell = \alpha R$$

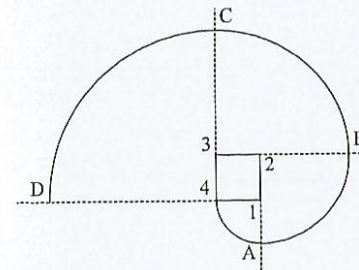
Obs: α em radianos $(0 < \alpha < 2\pi)$

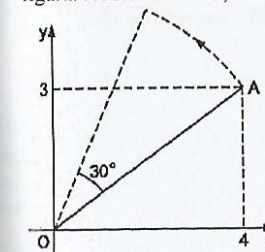
Exemplos:

1) (Ufop-2002) Num jardim de forma circular, em que a distribuição das passarelas acompanha a figura abaixo, quero ir do leste ao norte, passando pelo oeste.

Sabendo que o raio do círculo maior é o dobro dos raios dos círculos menores e que não quero passar duas vezes pelo mesmo local, então:

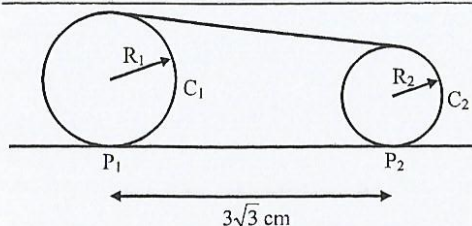
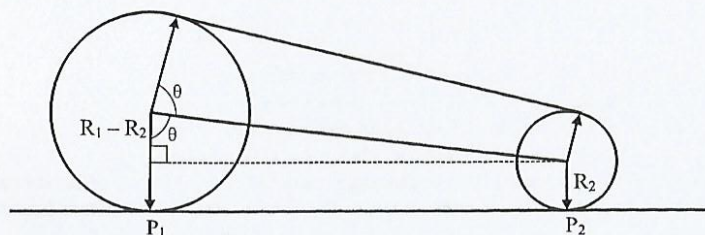
A) passando pelos círculos menores, o caminho é mais curto que indo pelo sul.
B) passando pelo sul, o caminho é mais curto que indo pelos círculos menores.
C) passando pelos círculos menores ou pelo sul, a distância percorrida é a mesma.
D) não conhecendo os valores dos raios, não é possível saber qual o caminho mais curto.

Solução:
Seja R o raio das circunferências menores.
Comprimento do caminho L → O → N: $d_1 = 2(\pi)(R) + (\pi/2)(2R) \Rightarrow d_1 = 3\pi R$
Comprimento do caminho L → S → N: $d_2 = 2(\pi)(2R) \Rightarrow d_2 = 4\pi R$
Assim, passando pelos círculos menores, o caminho é mais curto que indo pelo sul.

2) (UFMT-2000) A figura mostra uma volta completa da Falsa Espiral de Quatro Centros, localizados nos vértices 1, 2, 3 e 4 do quadrado cujo lado mede 1 cm. Essa Falsa Espiral é construída a partir da concordância de arcos de circunferências ($\overset{\frown}{4A}$, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, ...) cujos raios podem ser determinados observando-se a figura. Assim sendo, o comprimento das quatro primeiras voltas completas desta espiral mede $k\pi$ cm. Qual é o valor de k?

Solução:
Nota-se que esta espiral é composta de quatro arcos de circunferências (ângulo central de 90°), de raios 1 cm, 2 cm, 3 cm e 4 cm. Assim, o comprimento total desta espiral é:
$C = (\pi/2)(1) + (\pi/2)(2) + (\pi/2)(3) + (\pi/2)(4) \Rightarrow C = 5\pi \text{ cm} \Rightarrow k = 5$

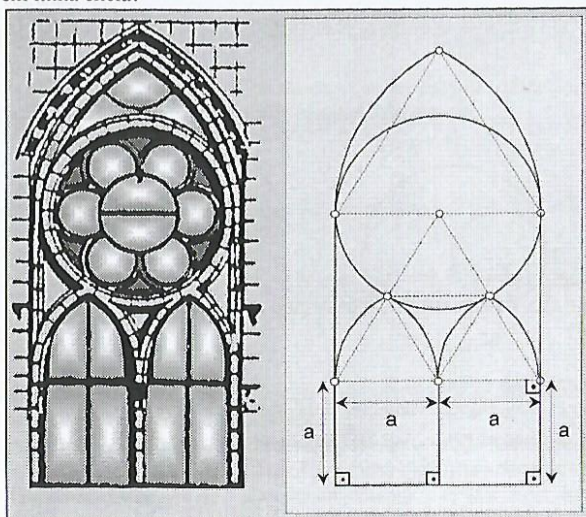
3) (Mackenzie-2004) O segmento AO descreve um ângulo de 30° em torno da origem, como indica a figura. Adotando $\pi = 3$, a distância percorrida pelo ponto A é:

a) 2,5 b) 5,5 c) 1,7 d) 3,4 e) 4,5

Solução:
Pelo Teorema de Pitágoras concluímos que: $OA^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow AO = 5$
Como a trajetória realizada pelo ponto A é arco de circunferência de ângulo central de 30°:
$D = (\pi/6)(AO) = 5\pi/6 \cong (5)(3)/(6) = 2{,}5$

4) (Fuvest-2004) A figura abaixo representa duas polias circulares C_1 e C_2 de raios $R_1 = 4$ cm e $R_2 = 1$ cm, apoiadas em uma superfície plana em P_1 e P_2, respectivamente. Uma correia envolve as polias, sem folga. Sabendo-se que a distância entre os pontos P_1 e P_2 é $3\sqrt{3}$ cm, determinar o comprimento da correia.

Solução:

No triângulo retângulo destacado na figura temos: $\text{tg}\theta = \dfrac{\overline{P_1P_2}}{R_1 - R_2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \pi/3$

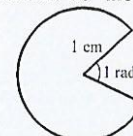
Deste modo, a parte da correia que está enrolada em C_1 compreende um ângulo central de $4\pi/3$, enquanto que em C_2 compreende um ângulo central de $2\pi/3$.
Portanto, o comprimento total da correia vale:

$$C = 2\overline{P_1P_2} + \left(\frac{4\pi}{3}\right)R_1 + \left(\frac{2\pi}{3}\right)R_2 = 6\sqrt{3} + \frac{16\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow C = 6\sqrt{3} + 6\pi$$

5) (UFPE-2002) A janela ilustrada abaixo é de uma igreja gótica. Os arcos são de circunferências de raios medindo **0,5m** ou **1,0m** e **a = 0,5m**. Qual o comprimento total, em metros, dos arcos e segmentos em linha cheia?

Solução:

Os segmentos têm comprimentos que somam $[5 \times 0{,}5] + [2\sqrt{3}/2] \cong 4{,}23$ m.
Notemos que a circunferência central e os quatro arcos de 60° inferiores possuem mesmo raio de 0,5.
Notemos também que os dois arcos de circunferência de 60° superiores possuem raio 1,0.
Como um arco de 60° equivale a 1/6 do comprimento total da circunferência, então os arcos de circunferências da figura somam $[(1 + 4/6)2\pi \times 0{,}5] + [(2/6)2\pi \times 1] = 7/3\pi \cong 7{,}33$ m.
O comprimento total é 11,56 m.

6) (Unesp-2005) Em um jogo eletrônico, o "monstro" tem a forma de um setor circular de raio 1 cm, como mostra a figura. A parte que falta no círculo é a boca do "monstro", e o ângulo de abertura mede 1 radiano. O perímetro do "monstro", em cm, é:

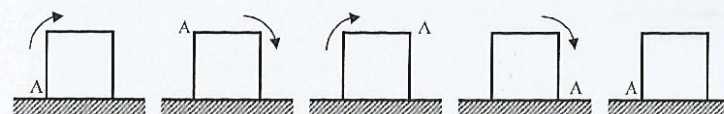
a) $\pi - 1$
b) $\pi + 1$
c) $2\pi - 1$
d) 2π
e) $2\pi + 1$

Solução:

O ângulo central correspondente ao arco de círculo é igual a $2\pi - 1$ radianos.
O perímetro do monstro corresponde ao comprimento da parte circular mais dos dois raios que compõe a sua boca. Assim, o perímetro do monstro é $2P = (2\pi - 1)1 + 2 = 2\pi + 1$.

7) (PUC/RJ-92) Operários rolam um cubo de granito de **1 m** de aresta até ele dar uma volta completa. A distância, em metros, percorrida por um vértice de:

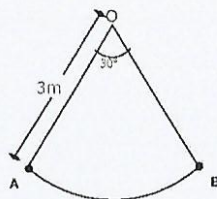
a) $\dfrac{(2+\sqrt{2})\pi}{2}$ b) $\dfrac{(2\sqrt{2}+1)\pi}{2}$ c) $\dfrac{3\pi}{2}$ d) $\dfrac{3\sqrt{2}\pi}{2}$ e) 2π

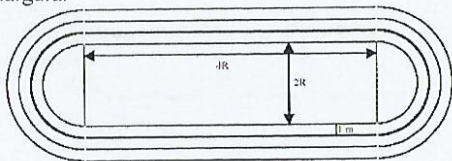
Solução:

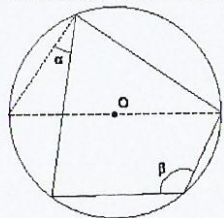
Observe as figuras abaixo que caracterizam o movimento de um vértice de um cubo que dá uma volta completa.

Da 1ª para a 2ª figura o ponto A percorreu, com raio de 1 m, um arco de 90°: $d_1 = (\pi/2)(1)/2 = \pi/2$.
Da 2ª para a 3ª figura o ponto A percorreu, com raio de $\sqrt{2}$ m, um arco de 90°: $d_2 = \sqrt{2}\pi/2$.
Da 3ª para a 4ª figura o ponto A percorreu, com raio de 1 m, um arco de 90°: $d_3 = (\pi/2)(1) = \pi/2$.
Da 4ª para a 5ª figura o ponto A mantém-se fixo: $d_4 = 0$.

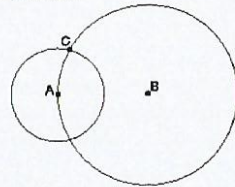
Logo, a distância total é $d = \pi + \dfrac{\sqrt{2}\pi}{2} = \dfrac{(2+\sqrt{2})\pi}{2}$.

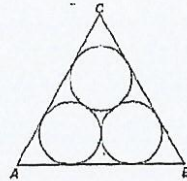
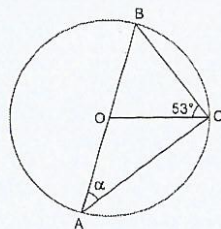
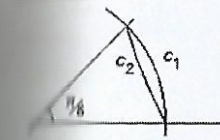
Exercícios

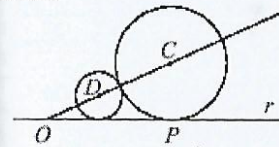
1) (Uepa/Prise-2004) Em Belém, George costuma levar Thales, seu filho, à praça Batista Campos. Certo dia, observando Thales brincar no balanço da praça, George, que é professor de Matemática, resolveu calcular a medida do arco AB formado pela trajetória do balanço no momento em que descrevia um movimento pendular, como mostra a figura ao lado. Considerando que o ângulo (**AÔB**), observado por George, tenha sido de **30°**, que a medida da corrente que sustenta o balanço era de **3m** e que o valor atribuído à π foi de **3,14**, então, a medida do arco AB calculada foi:

a) 1,35 m b) 1,57 m c) 1,89 m
d) 2,15 m e) 2,31 m

2) (UFU-2002) Uma escola resolveu construir uma pista de atletismo em suas dependências. Essa pista deverá ser construída a partir de um retângulo de lados 4R por 2R com uma semi-circunferência em cada extremidade, conforme mostra a figura abaixo. As raias terão 1 metro de largura.

Em qual intervalo R (em metros) deverá ser escolhido para que o circuito, em negrito na figura, tenha 600 metros de comprimento? (π = **3,14**)
a) (41,42) b) (40,41) c) (42,43) d) (39,40)

3) (Mackenzie-2000) Na figura, O é o centro da circunferência e α mede 15°. A medida de β é:

a) 95° b) 105° c) 110° d) 115° e) 120°

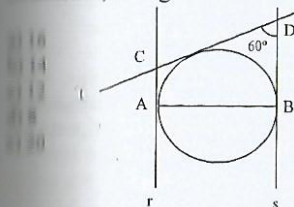
4) (Mackenzie-2003) Na figura, o raio da circunferência de centro B é o dobro do raio da circunferência de centro A. Se x é a medida do ângulo ACB, então:

a) 0 < x ≤ 30° b) 45° < x ≤ 60° c) 30° < x ≤ 45°
d) 60° < x ≤ 90° e) x > 90°

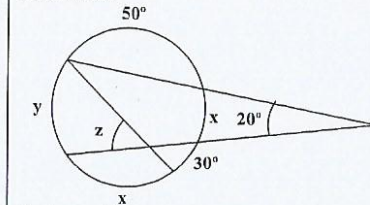
5) (Covest-97) Na ilustração abaixo, todos os círculos tem mesmo raio, o triângulo ABC é equilátero e seus lados medem $28(1 + \sqrt{3})$ unidades de comprimento. Determine o raio dos círculos.

6) (Covest-2003) Na figura abaixo, o triângulo ABC está inscrito na circunferência de centro em O, e AB é um diâmetro. Indique o valor do ângulo α, em graus.

7) (Fuvest-2001) Numa circunferência, c_1 é o comprimento do arco de $\frac{\pi}{6}$ radianos e c_2 é o comprimento da secante determinada por este arco, como ilustrado na figura abaixo. Então, a razão $\frac{c_1}{c_2}$ é igual a $\frac{\pi}{6}$ multiplicado por:

a) 2 c) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ e) $\sqrt{3+\sqrt{3}}$
b) $\sqrt{1+2\sqrt{3}}$ d) $\sqrt{2+2\sqrt{3}}$

8) (Unesp-2004) A figura mostra duas circunferências de raios 8 cm e 3 cm, tangentes entre si e tangentes à reta r. C e D são os centros das circunferências.

Se α é a medida do ângulo CÔP, o valor de sen α é:
a) 1/6 b) 5/11 c) ½ d) 8/23 e) 3/8

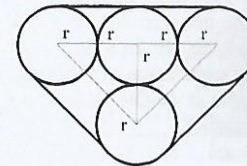
9) (Colégio Naval-83) Um triângulo ABC está inscrito em um circulo e o arco BC mede 100°. Calcular a medida do ângulo BÊC, sendo **E** o ponto de intersecção da bissetriz externa relativa a B com o prolongamento do segmento $\overline{CM}$, onde M é o ponto médio do arco menor AB.
a) 15° b) 25° c) 20° d) 40° e) 50°

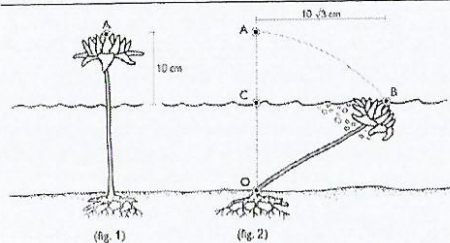
10) (Colégio Naval-86) Na figura abaixo, as retas r e s são tangentes à circunferência de diâmetro AB. O segmento $\overline{AC}$ mede 4 cm. A medida, em centímetros, do segmento $\overline{CD}$ é:

a) 16
b) 14
c) 12
d) 8
e) 20

11) (Colégio Naval-87) Por um ponto P exterior a um círculo de centro O e raio R = 1 cm, traça-se uma secante que intercepta a circunferência do círculo dado nos pontos A e B, nesta ordem. Traça-se pelo ponto A uma paralela à reta $\overline{PO}$ que intercepta a mesma circunferência no ponto C. Sabendo que o ângulo OPA mede 15°, o comprimento do menor arco BC, em cm, é:
a) $\pi/12$ b) $\pi/6$ c) $\pi/4$ d) $\pi/3$ e) $5\pi/12$

12) (Colégio Naval-88) Considere a figura onde x e y são medidas de arco z é a medida do ângulo assinalado.

Pode-se afirmar que x + y + z é igual a:
a) 255° b) 265° c) 275° d) 285° e) 295°

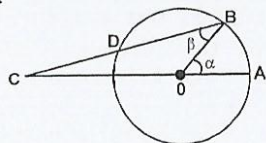
13) (Colégio Naval-96) As quatro circunferências da figura abaixo têm raios r = 0,5. O comprimento da linha que as envolve é aproximadamente igual a:

a) 6,96
b) 7,96
c) 8,96
d) 9,96
e) 10,96

14) (Colégio Naval-2000) Num círculo, duas cordas AB e CD se interceptam no ponto I interno ao círculo. O ângulo **DÂI** mede 40° e o ângulo **CBI** mede 60°. Os prolongamentos de AD e CB encontram-se num ponto P externo ao círculo. O ângulo **APC** mede:
a) 10° b) 20° c) 30° d) 40° e) 50°

15) (UERJ-2002) A extremidade A de uma planta aquática encontra-se 10 cm acima da superfície da água de um lago (fig.1). Quando a brisa a faz balançar, essa extremidade toca a superfície da água no ponto B, situado a $10\sqrt{3}$ cm do local em que sua projeção ortogonal C, sobre a água, se encontrava inicialmente (fig. 2). Considere OA, OB e BC segmentos de retas e o arco uma trajetória do movimento da planta.

Determine:
(A) a profundidade do lago no ponto O em que se encontra a raiz da planta;
(B) o comprimento, em cm, do arco AB.

16) (EPCAr-98) Uma corda de 12 cm de comprimento forma com o diâmetro um ângulo inscrito. Sabendo-se que a projeção da corda sobre esse diâmetro mede 8 cm, o raio da circunferência é, em cm, igual a
a) 8 b) 9 c) 10 d) 11

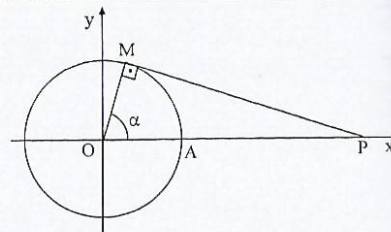
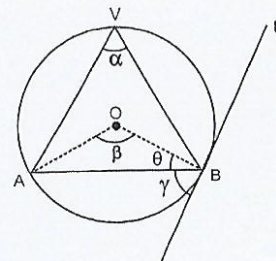
17) (EPCAr-99) Numa circunferência de raio 4,5 cm é marcado um arco AB cujo ângulo central é 40^0. Marcando-se um arco da mesma medida de AB, em cm, numa outra circunferência de raio 6 cm, temos que o ângulo central correspondente mede, em radianos,
a) $2\pi/9$ b) $\pi/6$ c) $3\pi/4$ d) π

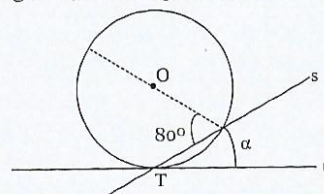
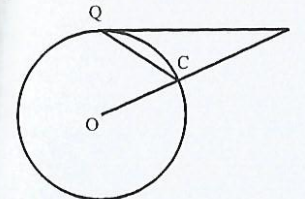
18) (EPCAr-99) Na figura abaixo, $\overline{CD} = \overline{OB}$. Então β é igual a

a) $2\alpha/3$ b) α c) $3\alpha/2$ d) $\alpha/2$

19) (EPCAr-2002) Considere um triângulo ABC inscrito numa semicircunferência de centro O e raio r onde $\overline{AC}$ é o diâmetro, $\overline{BM}$ é perpendicular a $\overline{AC}$ e BAC = α. A afirmativa **ERRADA** é
a) $AB = 2r\cos\alpha$
b) $BC = 2r\,\text{sen}\alpha$
c) $AM = 2r\cos^2\alpha$
d) $BM = 4r\,\text{sen}\alpha\cos\alpha$

20) (AFA-2001) Na figura abaixo, a circunferência de centro O é trigonométrica, o arco AM tem medida α, $0 < \alpha < \pi/2$, e OMP é um triângulo retângulo em M. Esse triângulo tem por perímetro

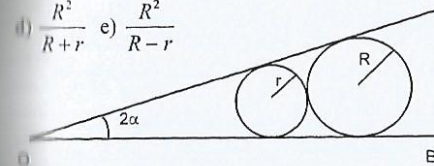
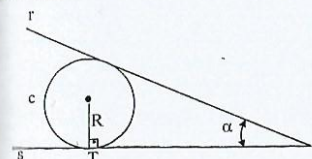
a) $\dfrac{1+\text{sen}\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}$ b) $\dfrac{1+\text{sen}\alpha+\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$

c) $\dfrac{1+2\text{sen}\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}$ d) $\dfrac{1+\text{sen}2\alpha+\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$

21) (Epcar-2004) Considere o triângulo equilátero **VAB** inscrito numa circunferência de centro **O**. Seja t uma reta tangente à circunferência no ponto **B**, conforme figura abaixo.
Analise as proposições:
I) OB é perpendicular a t em B
II) $\alpha = \gamma$
III) θ é a metade do suplemento de β

Pode-se afirmar que **SOMENTE**
a) I é correta.
b) I, II e III são corretas.
c) II é falsa.
d) II e III são falsas.

22) (AFA-2001) Conforme a figura abaixo, s e t são, respectivamente, retas secante e tangente à circunferência de centro O. Se T é um ponto da circunferência comum às retas tangente e secante, então o ângulo α, formado por t e s, é
a) 10^0
b) 20^0
c) 30^0
d) 40^0

23) (AFA-2004) Seja PQ tangente à circunferência de centro O e raio r. Se $\overline{CQ} = r$, pode-se afirmar que $\overline{PQ} + \overline{PC}$ é igual a:

a) $r+\sqrt{3}$ b) $2r+r\sqrt{3}$ c) $r\sqrt{3}$ d) $r+r\sqrt{3}$

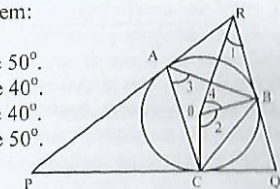
24) (EsPCEx-97) De posse dos dados da figura abaixo e sabendo que as circunferências são tangentes entre si e que ambas tangenciam os lados do ângulo AOB, pode-se concluir que o valor de sen α é igual a:

a) $\dfrac{R+r}{R-r}$ b) $\dfrac{R-r}{R+r}$ c) $\dfrac{R}{R+r}$

d) $\dfrac{R^2}{R+r}$ e) $\dfrac{R^2}{R-r}$

25) (ITA-75) Se, na figura ao lado, **c** é uma circunferência de raio **R**, **r** e **s** são retas tangentes à circunferência e $\overline{OT} = 2R$ então o ângulo α das retas **r** e **s** deve verificar uma das alternativas seguintes:

a) $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$ e $\cos\alpha = \frac{3}{5}$;
b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ e $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$;
c) $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;
d) $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;
e) N.D.R.A.

26) (ITA-89) Considere uma circunferência de centro O e diâmetro AB. Tome um segmento BC tangente à circunferência, de modo que o ângulo BCA meça 30°. Seja D o ângulo de encontro da circunferência com o segmento AC e DE o segmento paralelo a AB, com extremidades sobre a circunferência. A medida do segmento DE será igual a:
a) à metade da medida de AB
b) dois terços da medida de AB
c) um terço da medida de AB
d) à metade da medida de AE
e) à metade da medida de AD

27) (ITA-92) Considere o triângulo PQR ao lado, circunscrito a uma circunferência de centro O, cujos pontos de tangência são A, B e C. Sabe-se que os ângulos $\hat{P}$, $\hat{Q}$ e $\hat{R}$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética de razão 20^o. Os ângulos 1, 2, 3, 4 conforme mostrado na figura abaixo medem, nesta ordem:

a) 40°, 120°, 60° e 50°.
b) 40°, 100°, 50° e 40°.
c) 60°, 140°, 60° e 40°.
d) 60°, 120°, 40° e 50°.
e) n.d.a.

28) (ITA-2004) Sejam **r** e **s** duas retas que se interceptam segundo um ângulo de **60°**. Seja $\mathbf{C_1}$ uma circunferência de **3 cm** de raio, cujo centro **O** se situa em **s**, a **5 cm** de **r**. Determine o raio da menor circunferência tangente à $\mathbf{C_1}$ e à reta **r**, cujo centro também se situa na reta **s**.

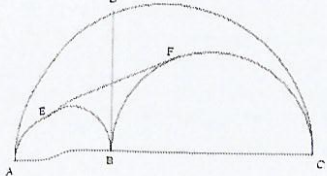
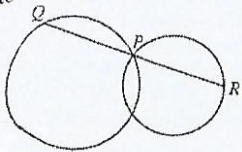
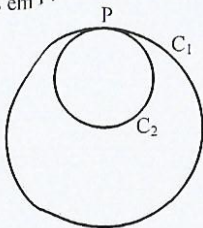
29) (UFRJ-92) Três goiabas perfeitamente esféricas de centros C_1, C_2 e C_3 e raios 2 cm, 8 cm e 2cm estão sobre uma mesa tangenciando-se como sugere a figura abaixo.

Um bichinho que está no centro da primeira goiaba quer se dirigir para o centro da terceira pelo caminho mais curto. Quantos centímetros percorrerá?

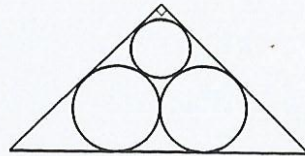
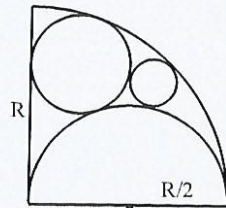
30) (IME-64) Prolonga-se o raio AO de um círculo, de um comprimento AB = AO; traça-se uma tangente ao círculo, sobre a qual se levantam

as perpendiculares NA e BC. Supondo que o ângulo OÂC = 126°, qual o valor do ângulo AĈB?

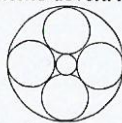
31) Seja K o ponto médio de uma corda AB de um dado círculo. Sejam CD e EF duas cordas passando pelo ponto K. Suponha que CF e ED intercepta AB em M e N, respectivamente. Prove que KM = KN.

32) Sejam A, B e C três pontos colineares. Constrói-se as semi-circunferências com diâmetros AB, BC e AC. Seja D o ponto no arco AC tal que AC ⊥ BD, e seja EF a tangente externa dos arcos AB e BC. Mostre que BEDF é um retângulo.

33) Na figura, duas circunferências possuem raios 8 cm e 6 cm e seus centros estão a 12 cm de distância. Por um de seus pontos de interseção P, e reta QR é traçada de modo que as cordas QP e PR possuem igual comprimento. Determine o comprimento de QP.

34) Na figura, C_1 e C_2 são circunferências tangentes em P.

a) Se uma reta corta C_1 e C_2 nos pontos A, B e C, D, respectivamente, mostre que ∠APC e ∠BPD são ângulos congruentes.

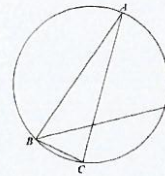
b) Se uma reta tangencia C_2 num ponto C e corta C_1 nos pontos A e B, mostre que PC é bissetriz do ângulo ∠APB.

35) No interior de um triângulo retângulo ABC temos três círculos, cada um deles tangente a dois lados do triângulo e aos outros dois círculos. Sabendo-se que os dois círculos tangentes à hipotenusa têm o mesmo raio R, determine o raio do terceiro círculo.

36) Na figura, determine o raio da circunferência menor em função do raio R do quadrante.

37) (OBM-99) Os pontos S, T e U são os pontos de tangência do círculo inscrito no triângulo PQR sobre os lados RQ, RP e PQ respectivamente. Sabendo que os comprimentos dos arcos TU, ST e US estão na razão $TU : ST : US = 5 : 8 : 11$, a razão $\angle TPU : \angle SRT : \angle UQS$ é igual a :

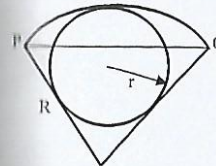
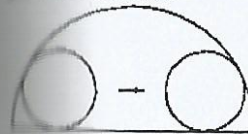
a) 7 : 4 : 1 b) 8 : 5 : 2 c) 7 : 3 : 2
d) 11 : 8 : 5 e) 9 : 5 : 1

38) (OBM-2000) A figura abaixo mostra o logotipo de uma empresa, formado por dois círculos concêntricos e por quatro círculos de mesmo raio, cada um deles tangente a dois dos outros e aos dois círculos concêntricos. O raio do círculo interno mede 1 cm. Então o raio do círculo externo deverá medir, em cm:

a) $2\sqrt{2}+3$ b) $\sqrt{2}+2$ c) $4\sqrt{2}+1$

d) $3\sqrt{2}$ e) $\sqrt{2}+1$

39) (OBM-2002) Na circunferência abaixo, temos que $AB = 4$, $BC = 2$, AC é diâmetro e os ângulos $A\hat{B}D$ e $C\hat{B}D$ são iguais. Qual é o valor de BD?

a) $2\sqrt{3}+1$ b) $\frac{9}{\sqrt{5}}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $2+\sqrt{5}$ e) 4

40) (Seletiva Brasil Cone Sul-95) Seja α um círculo de centro O e P um ponto exterior. Por P trace uma tangente à circunferência de α, que a encontra em D. Seja AB o diâmetro de α perpendicular a PO e M, N as interseções de DA e DB com PO. Prove que P é o ponto médio de MN.

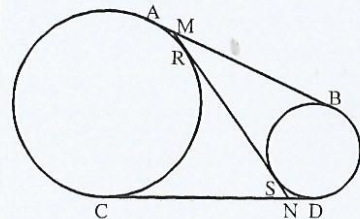
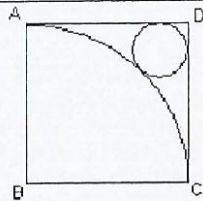
41) (Canadá) Um círculo de raio r está inscrito em um setor de circular de raio R. O comprimento da corda PQ do setor é igual a $2a$.
Demonstre que: $1/r = 1/R + 1/a$.

42) (Portugal-99) Uma roda com 8 cm de raio, encostada a uma semi-circunferência com 25 cm de raio, como se mostra na figura, desloca-se apoiada no diâmetro da semi-circunferência até que choca com esta.

Qual é o comprimento da porção daquele diâmetro que não é tocada pela roda?

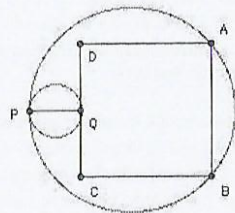
43) (Inglaterra-2000) Duas circunferências secantes C_1 e C_2 possuem uma tangente comum que tangencia C_1 em P e C_2 em Q. As duas circunferências intersectam-se em M e N, onde N é mais próximo de PQ do que M. A reta PN encontra a circunferência C_2 novamente em R. Prove que MQ é a bissetriz do ângulo PMR.

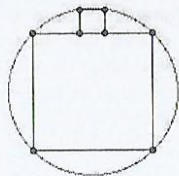
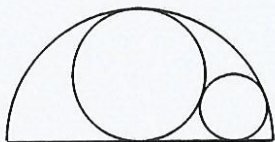
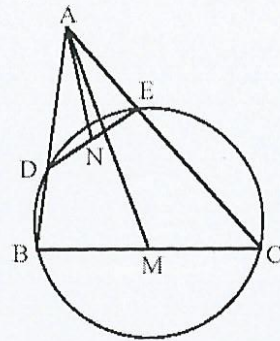
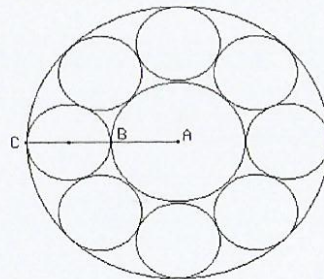
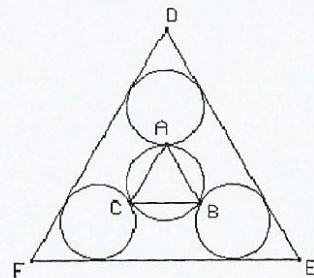
44) (Inglaterra-2001) Um círculo S é interior a um círculo T e o tangencia no ponto A. De um ponto P ≠ A sobre T, traçam-se as cordas PQ e PT de T que tangenciam S em X e Y, respectivamente. Mostre que ∠QAR = 2∠XAY.

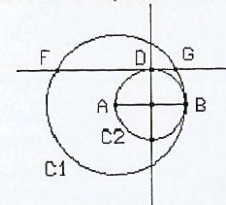
45) (Maio-2000) Sejam S uma circunferência de raio 2; S_1 uma circunferência de raio 1 tangente interiormente a S em B e S_2 uma circunferência de raio 1 tangente a S_1 no ponto A, mas que não é tangente a S. Se K é o ponto de interseção da reta AB com a circunferência S, demonstre que K pertence a circunferência S_2.

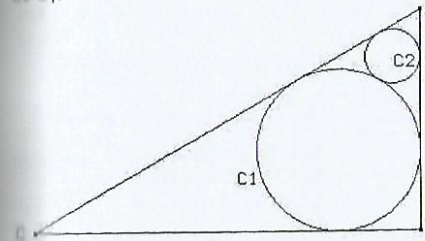
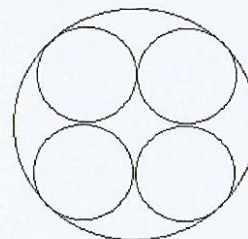
46) (Iberoamericana-88 banco) Seja um triângulo ABC inscrito numa circunferência de raio R. Considere uma circunferência tangente em A ao lado AC e que passa por B; outra circunferência tangente em B ao lado AB e que passa por C e finalmente uma circunferência tangente em C ao lado BC e que passa por A. Sendo R_1, R_2 e R_3 os raios destas circunferências provar que $R^3 = R_1.R_2.R_3$.

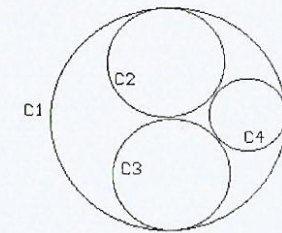
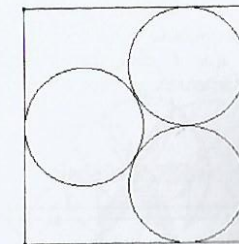
47) (Rio Grande do Norte-86) Dados duas circunferências, uma exterior à outra, considere as duas tangentes comuns externas e uma tangente comum interna. Prove que o segmento desta última compreendido entre aquelas é congruente ao segmento de uma tangente externa compreendida entre dois pontos de contato da mesma.

48) (Rio Grande do Sul-2001) Seja ABCD um quadrado de lado 1. Traça-se uma circunferência C_1 com centro em B e raio 1, e uma circunferência C_2 que tangencia os segmentos AD e DC e a circunferência C_1 como mostra a figura abaixo.

Calcule o raio da circunferência C_2.

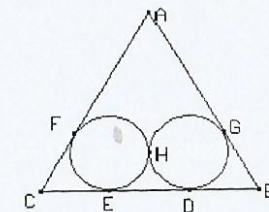
49) (Aime-94) O círculo maior possui diâmetro 40 e o círculo menor diâmetro 10. Eles tangenciam em P. PQ é um diâmetro do círculo menor. ABCD é um quadrado tangenciando o círculo menor em Q. Determine AB.

50) (Aime-97) Os círculos de raio 5, 5, 8 e k são mutuamente tangentes externamente. Determine o valor de k.

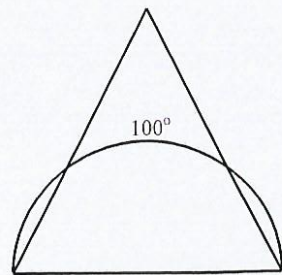
51) (Aime-2001) Determine a razão entre os lados do quadrado maior e do quadrado menor.

52) (Wisconsin-2001) Na figura, dois círculos são tangentes e estão inscritos em um semi-círculo de raio 2. Se o círculo maior é tangente ao diâmetro do semi-círculo no ponto C, determine o raio do menor círculo.

53) (Wisconsin-2002) Uma circunferência é traçada passando pelos vértices B e C de um triângulo ABC, e esta circunferência encontra os lados AB e AC nos pontos D e E. Se o ponto médio de BC é M e o ponto médio de DE é N, demonstre que $\angle DAN = \angle CAM$.

54) (Clubes Cabri) Na construção seguinte calcular AB / BC.

55) (Clubes Cabri) Na figura abaixo, os triângulos ABC e DEF são equiláteros; as quatro circunferências têm igual raio e cada lado do triângulo DEF é tangente a duas delas.

Achar a razão entre os lados dos triângulos ABC e DEF.

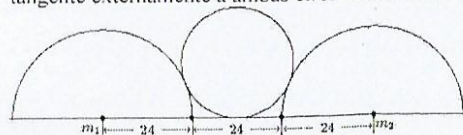
56) (Clubes Cabri) Dado um segmento AB traçam-se a circunferência C_1 de centro A que passa por B; e a circunferência C_2 de diâmetro AB. A mediatriz de AB corta C_2 em D. A reta paralela a AB por D corta a circunferência C_1 em F e G.

i) Calcular a medida do ângulo FAG.
ii) Calcular a medida do ângulo AFB.

57) (Clubes Cabri) Na figura abaixo ABC é um triângulo tal que $\angle ABC = 90°$ e $\angle BAC = 60°$; C_1 é tangente aos 3 lados do triângulo; e C_2 é tangente a AB, AC e a C_1. Se o radio de C_2 é 1 achar o raio de C_1.

58) (Clubes Cabri) Na seguinte figura as circunferências pequenas têm o mesmo raio e onde cada circunferência é tangente as outras 3.

Se o raio das circunferências pequenas é 1 achar o raio da circunferência maior.

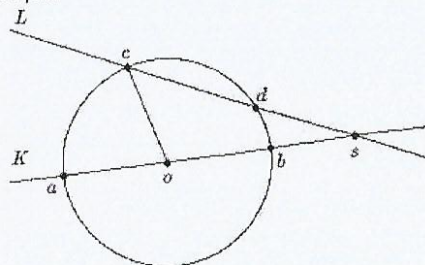
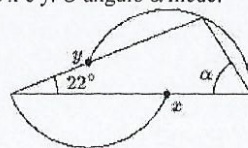
59) (Clubes Cabri) Na seguinte figura, cada circunferência é tangente as outras 3 e C_2 e C_3 passam pelo centro de C_1. Achar a razão entre o raio de C_1 e o de C_4.

60) (Clubes Cabri) A figura abaixo é formada por um retângulo e três circunferências de igual raio tangentes entre si e tangentes aos lados do retângulo.

Achar a largura do retângulo sabendo que o raio das circunferências é 1.

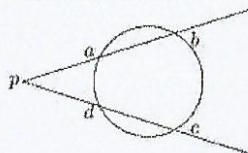
61) (Clubes Cabri) A seguinte figura é formada por um triângulo equilátero e duas circunferências de igual tamanho, tangentes entre si e tangentes aos lados do triângulo.

Sabendo que na figura o lado do triângulo equilátero mede 4cm, achar as medidas dos lados do triângulo EFH.

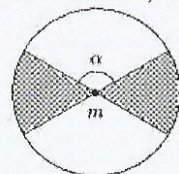
62) (Bélgica-96) O diâmetro de uma circunferência é também a base de um triângulo isósceles cujos lados cortam a circunferência formando um arco de 100°. O ângulo oposto à base do triângulo isósceles vale:

a) 30° b) 40° c) 45° d) 50° e) 60°

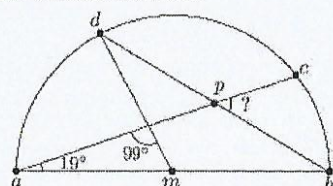
63) (Bélgica-96) Duas circunferências de raio 24 possuem centros em m_1 e m_2. As circunferências intersectam a reta m_1m_2 duas vezes entre m_1 e m_2 tal que $[m_1m_2]$ é cortado em dois pedaços de mesmo comprimento. Qual é o raio da circunferência que é tangente à reta m_1m_2 e tangente externamente a ambas circunferências?

a) 12 b) $10\sqrt{2}$ c) 15 d) 16 e) 18

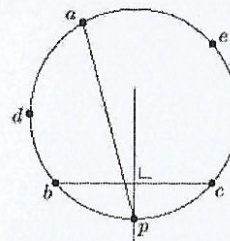
64) (Bélgica-96) Um círculo de centro o e raio r é cortado por duas retas K e L que não são paralelas. A interseção de K e L pertence ao exterior do círculo. A reta K passa por o e intersecta o círculo em a e b (onde b ∈ [as]). A reta L intersecta o círculo em c e d (onde ∈ [cs]). A distância |sd| é igual a r. Os ângulos α = aôc e β = bŝd satisfaz a relação:

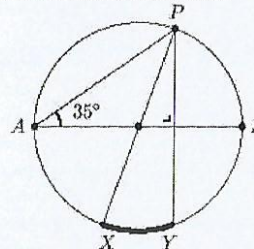
a) α = 2β b) α = 5β/2 c) α = 3β
d) α = 7β/2 e) α = 4β

65) (Bélgica-97) A figura mostra arcos com centro nos pontos x e y. O ângulo α mede:

a) 44° b) 46° c) 57° d) 60° e) 68°

66) (Bélgica-98) Um círculo é dividido em quatro arcos. Cada um dos três arcos adjacentes ab, bc e cd medem 100°. O ângulo p̂ formado pelos segmentos de reta ab e cd mede

a) 15° b) 20° c) 25° d) 30° e) 40°

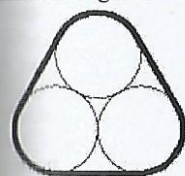
67) (Bélgica-98) A região hachurada possui um perímetro igual ao do círculo com centro em m. O ângulo α (medido em radianos) vale

a) 2 b) 3 c) π/2 d) 2π/3 e) 3π/4

68) (Bélgica-99) Considere uma semi-circunferência com diâmetro [ab] e centro m. Dois pontos c e d pertencem à ela como indica a figura. O ângulo entre ac e bd mede

a) 50° b) 51° c) 52° d) 53° e) 54°

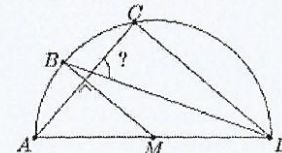
69) (Bélgica-99) Considere o arco *adb* = 130° e o arco *aec* = 150° em um círculo. O ponto *p* é um dos pontos de interseção da mediatriz de [*bc*] e o círculo. O ângulo agudo formado pela mediatriz e pa mede:

a) 5° b) 10° c) 15° d) 20° e) 25°

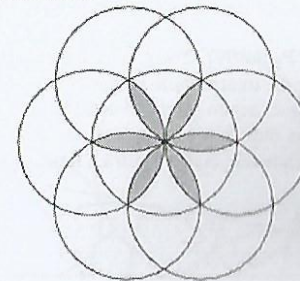
70) (Bélgica-2002) Através de um ponto P em um círculo com diâmetro AB, traça-se o diâmetro PX e duas cordas PA e PY onde PY ⊥ AB. Se ∠PÂB = 35°, então o menor arco XY vale:

a) 20° b) 35° c) 40° d) 55° e) 70°

71) (Bélgica-2002) Envolve-se três cilindros de diâmetro 1 com uma fita adesiva. O comprimento desta fita é igual a

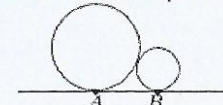
a) 3 + π
b) 3
c) 3 + π/2
d) (3 + π)/2
e) 6 + π

72) (Bélgica-2003) Em um triângulo retângulo de catetos 4 e 6, traça-se uma semi-circunferência com centro na hipotenusa e tangente aos catetos do triângulo retângulo. Determine o raio desta semi-circunferência.

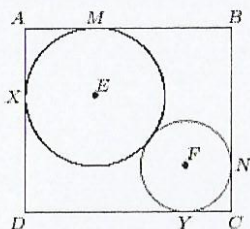
a) 2
b) 2,4
c) 2,5
d) 3
e) $\frac{2}{3\sqrt{13}}$

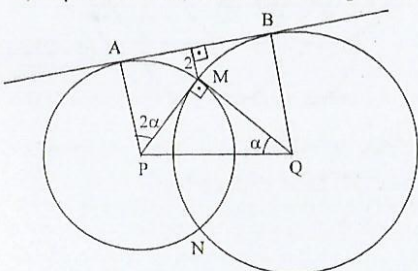
73) (Bélgica-2003) Na figura, AD é um diâmetro de uma semi-circunferência com centro M. Os dois pontos B e C pertencem à semi-circunferência de modo que AC ⊥ BM e Â = 50°. Determine o ângulo entre as retas AC e BD.

a) 50° b) 60° c) 65° d) 70° e) 75°

74) (Bélgica-2003) Na figura temos 7 círculos possuindo mesmo raio. Determine a razão entre o perímetro de um dos círculos e o perímetro da região hachurada.

a) 1/2 b) 1/3 c) 1/6 d) 1/π e) 4/7

75) (Rússia-98) Duas circunferências intersectam-se em P e Q. Uma reta intersecta o segmento PQ e encontra as circunferências nos pontos A, B, C e D, nesta ordem. Prove que ∠APB = ∠CQD.

76) (Portugal-2000) Na figura seguinte estão representadas duas circunferências tangentes exteriormente e uma reta tangente às duas circunferências nos pontos A e B. Sabendo que os raios das circunferências medem 24 e 6 metros, determine a distância entre os pontos A e B.

77) (Portugal-2002) Na figura AB = 9 e AD = 8. As duas circunferências, tangentes entre si, têm centros E e F e são tangentes aos lados do retângulo [ABCD] nos pontos M, N, X e Y .

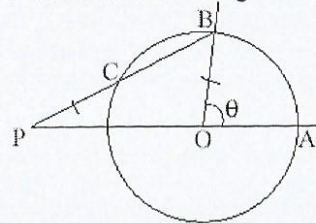
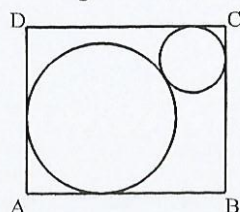
Sabendo que o raio da circunferência de centro F mede 2, quanto mede o raio da circunferência de centro E?

78) (Portugal-2003) Sejam C_1 e C_2 duas circunferências concêntricas de raios r e R, respectivamente, com $r < R$. Os pontos A, B e C, distintos dois a dois, pertencem a C_2 e as cordas $[AB]$ e $[AC]$ são tangentes a C_1. Sabendo que $R = 5$ e $BC = 8$, determine o raio de C_1.

79) (São Paulo-99) Duas circunferências, de centros P e Q, interceptam-se nos pontos M e N, de modo que sejam perpendiculares. Uma reta tangencia as duas circunferências nos pontos A e B, respectivamente, como mostra a figura a seguir.

Sabe-se que a distância de M à reta AB é 2, e que o ângulo $A\hat{P}M$ tem medida igual ao dobro da medida do ângulo $P\hat{Q}M$, que é igual a α.

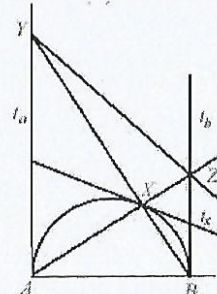
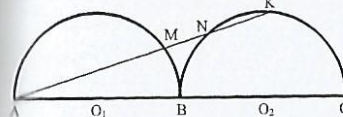
a) Mostre que as circunferências têm raios $\dfrac{2}{1-\cos 2\alpha}$ e $\dfrac{2}{1-\text{sen}\,2\alpha}$, respectivamente.

b) Determine o valor de $\text{tg}\alpha$.

c) Calcule a medida de PQ.

80) (São Paulo-2001) Seja θ um ângulo de vértice O. Com centro em O, traça-se uma circunferência de raio r que intercepta os lados do ângulo em A e B. Em seguida, determina-se P sobre a reta semi-reta AO tal que, sendo $C \neq B$ o outro ponto de interseção da reta BP com a circunferência, tenha-se $CP = r$. Calcule a medida do ângulo $A\hat{P}B$.

81) (Santa Catarina-99) Em um retângulo ABCD estão inscritas duas circunferências (de raios não necessariamente iguais) tangentes entre si, tais que uma delas é ainda tangente aos lados AB e AD, e a outra é tangente aos lados BC e CD do retângulo.

a) Mostre que o ponto de tangência das duas circunferências está sobre a diagonal AC do retângulo.

b) Qual deve ser a relação entre os lados do retângulo de modo a existir sempre um par de circunferências satisfazendo as condições acima?

82) (Canadá-74) Dados uma circunferência com diâmetro AB e um ponto X na circunferência, distinto de A e B, sejam t_a, t_b e t_x as tangentes à circunferência em A, B e X, respectivamente. Seja Z o ponto onde a reta AX encontra t_b e Y o ponto onde a reta BX encontra t_a. Mostre que as três retas YZ, t_x e AB são concorrentes ou paralelas.

83) (OBM Jr.-91) São dados dois semicírculos, como na figura, de centros O_1 e O_2 e raios iguais. O comprimento do segmento AK é ℓ. Sabendo que MN = NK, ache os comprimentos AM e MN.

84) (OBM-2004) Seja D o ponto médio da hipotenusa AB de um triângulo retângulo ABC. Sejam O_1 e O_2 os circuncentros dos triângulos ADC e DBC, respectivamente.

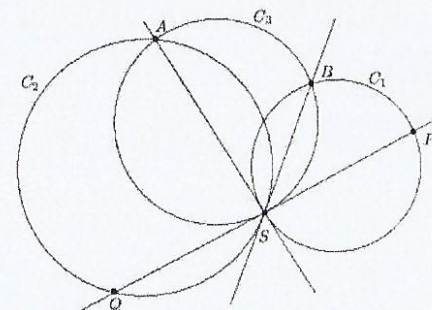
a) Mostre que $O_1\hat{D}O_2$ é reto.

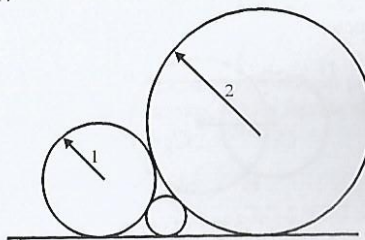
b) Mostre que AB é tangente ao círculo de diâmetro O_1O_2.

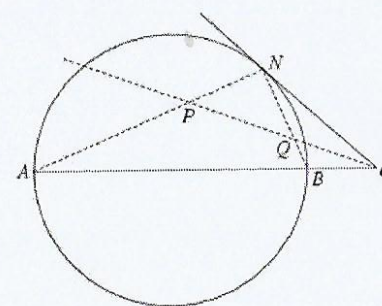
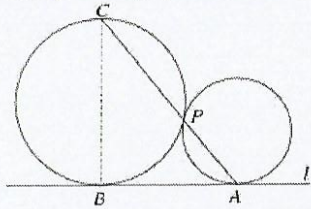
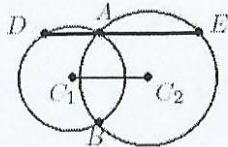
85) (OBM-2003) O triângulo ABC está inscrito na circunferência S e AB < AC. A reta que contém A e é perpendicular a BC encontra S em P ($P \neq A$). O ponto X situa-se sobre o segmento AC e a reta BX intersecta S em Q ($Q \neq B$). Mostre que BX = CX se, e somente se, PQ é um diâmetro de S.

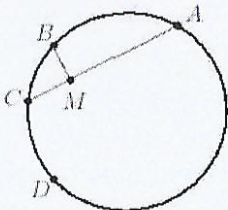
86) (OBM-98) Sobre os lados AB e AC de um triângulo acutângulo ABC são construídos, exteriormente ao triângulo, semicírculos tendo estes lados como diâmetros. As retas contendo as alturas relativas aos lados AB e AC cortam esses semicírculos nos pontos P e Q. Prove que $AP = AQ$.

87) (Espanha-98) Se considera o triângulo ABC e sua circunferência circunscrita. Se D e E são pontos sobre o lado BC tais que AD e AE são, respectivamente, paralelas às tangentes em C e em B à circunferência circunscrita, demonstrar que $\dfrac{BE}{CD} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$.

88) Duas circunferências C_1 e C_2 intersectam-se no ponto S. A tangente à C_1 em S intersecta C_2 em $B \neq S$ e a tangente à C_2 em S intersecta C_1 em $B \neq S$. Uma terceira Circunferência passa por A, B e S. A tangente à C_3 em S intersecta C_1 em $P \neq S$ e C_2 em $Q \neq S$.

Prove que |PS| = |QS|.

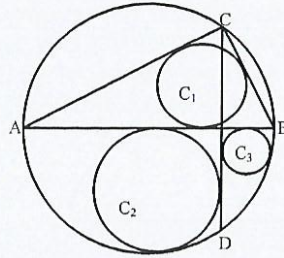
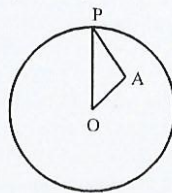
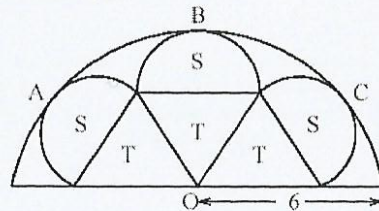
89) (Noruega-95) Dois círculos de raios 1 e 2 são tangentes entre si e a uma reta. Na região entre os círculos e a reta existe um círculo com raio r que é tangente aos dois círculos e à reta. Qual o valor de r?

a) 1/3 b) $1/\sqrt{5}$ c) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ d) $6-4\sqrt{2}$ e) nda

90) (Noruega-94) Seja AB o diâmetro do círculo e seja C um ponto no prolongamento de AB. Tracemos por C uma reta que tangencia o círculo em N. A bissetriz do ângulo $\angle ACN$ intersecta as retas AN e BN nos pontos P e Q. Prove que PN = QN.

91) (Noruega-91) Duas circunferências são tangentes externas e tangenciam a reta l nos pontos A e B. A reta AP intersecta a outra circunferência em C. Prove que BC é perpendicular à reta l.

92) (Portugal-93) Considera duas circunferências de centros C_1 e C_2, respectivamente, que se intersectam em dois pontos distintos A e B. Pelo ponto A traça uma reta paralela ao segmento C_1C_2. Designa-se por D o ponto de interseção dessa reta com a circunferência de centro C_1 e por E o ponto de interseção da reta traçada com a outra circunferência:

Mostre que $DE = 2.C_1C_2$

93) (Portugal-94) Na figura seguinte os arcos AB e BD têm o mesmo comprimento e M é o pé da perpendicular traçada a partir de B sobre o segmento de reta AC.

Prove que AM = CD + CM.

94) (Pará-2004) Na figura, AB é um diâmetro da circunferência maior e CD é perpendicular a AB. A circunferência C_1 (de raio r_1) é tangente aos 3 lados de ΔABC, C_2 (de raio r_2) e C_3 (de raio r_3) são tangentes a AB, CD e à circunferência maior.

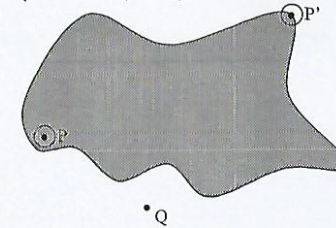
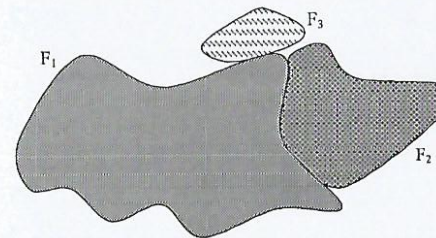
a) Calcule o valor de r_1 em função dos lados de ΔABC;

b) Mostre que $2r_1 = r_2 + r_3$.

95) (Canadá-77) Seja O o centro de um círculo e A um ponto no interior do círculo distinto de O. Determine todos os pontos P na circunferência do círculo tais que o ângulo $\angle OPA$ é máximo.

96) (Canadian Open Challenge-98) Na figura, cada região T representa um triângulo equilátero e cada região S uma semi-circunferência. A figura completa é uma semi-circunferência de raio 6 com centro O. As três menores semi-circunferências tangenciam a semi-circunferência maior nos pontos A, B e C. Qual é o raio da semi-circunferência S?

97) (Torneio das Cidades-2004) Três circunferências passam por um ponto X. Seus pontos de intersecção (além do X) são A,B e C. Seja A' o segundo ponto de intersecção da reta AX com a circunferência circunscrita ao triângulo BCX, e defina por analogia os pontos B' e C'. Prove que os triângulos ABC', AB'C e A'BC são semelhantes.

Área e Relações Métricas de um Triângulo

4.1) A DEFINIÇÃO DE ÁREA

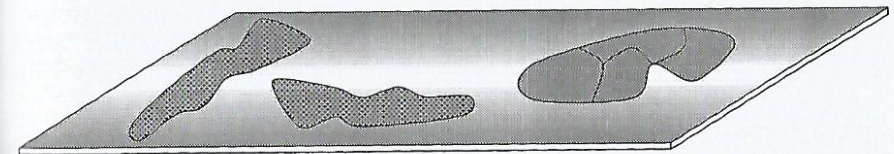
Inicialmente, **figura** é o nome genérico dado a um conjunto de pontos. Caso exista um plano que contenha todos os pontos da figura, ela é denominada **plana**. Em caso contrário, recebe o nome de **reversa**.

Um ponto P de uma figura plana F é dito **interno** (ou *interior*) quando existe um círculo de centro em P inteiramente contido em F. Se P' é um ponto de F, mas nenhum círculo de centro em P' está inteiramente contido em F, P' é chamado ponto **do contorno** (ou *da borda* ou *da fronteira*) de F. O interior de uma figura é o conjunto de seus pontos interiores. De modo análogo, define-se o contorno de F. Um ponto Q será dito **externo** (ou *exterior*) a F quando não pertencer a F.

Duas figuras são denominadas **justapostas** ou **adjacentes** quando não possuem pontos internos em comum, podendo possuir comuns, apenas, pontos dos seus contornos. Várias figuras são justapostas quando são justapostas duas a duas (quaisquer duas são justapostas).

F_1, F_2 e F_3 são figuras adjacentes.

A idéia é associar a cada figura F um único número real positivo **A**, denominado sua área. Como deve ser feita tal associação? Intuitivamente, um raciocínio interessante consiste em imaginar todas as figuras recortadas a partir de uma longa chapa metálica delgada (fina) e homogênea. Um determinado corte nessa chapa pode produzir uma peça limitada representativa de uma figura plana. É obvio que:

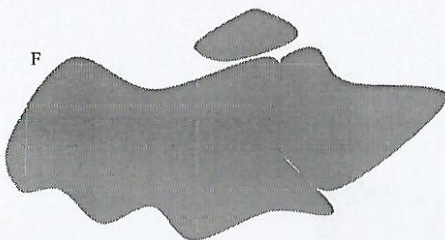
I. Qualquer peça tem uma determinada massa (peso), representada por um número real positivo.

II. Peças de tamanhos e formas iguais (congruentes) possuem mesmo peso.

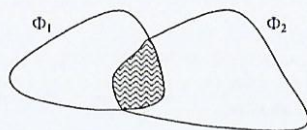
III. Dada uma peça qualquer, subdividindo-a em cortes menores obtêm-se peças de tal sorte que a soma de seus pesos é igual ao peso da peça original (supõe-se que não há perda de material).

A resposta mais formal consiste em admitir as seguintes propriedades dessa correspondência, denominadas *axiomas de área*.

I. A toda figura F associa-se um único número real maior que zero, que é sua área.

II. Figuras congruentes têm áreas iguais.

III. A área da reunião de um número finito de regiões justapostas é igual à soma das áreas de cada uma das regiões componentes.

Sendo $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ (do exemplo inicial), define-se que a área de F (A_F) é igual à soma das áreas de F_1, F_2 e F_3 (A_1, A_2 e A_3, respectivamente).

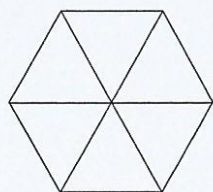
$$A_F = A_1 + A_2 + A_3$$

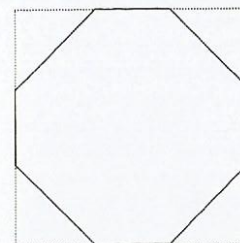
È natural aceitar, por exemplo, o axioma III, visto que quando figuras possuem pontos internos em comum, a região formada por tais pontos será computada mais de uma vez na soma das áreas das figuras às quais essa região comum pertence.

A área da figura $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ **não** é igual à soma das áreas das figuras Φ_1 e Φ_2, uma vez que a região hachurada é comum a ambas. Em verdade, o que se tem é:

$$A_\Phi = A_1 + A_2 - A_{comum}.$$

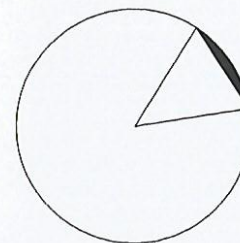
Na prática, utiliza-se muito o último axioma, direta ou indiretamente, da seguinte forma. Quando se deseja calcular a área de uma figura para a qual não se tem uma fórmula explícita ou conhecida, aplica-se um dos dois raciocínios gerais, aditivo (*construtivo*) ou subtrativo (*destrutivo*), ou ambos.

Pelo método **aditivo**, procura-se **dividir a figura dada em figuras componentes justapostas**, cujas áreas se sabe calcular. Pelo axioma III, a área da figura inicial é igual à **soma** das áreas das figuras componentes.

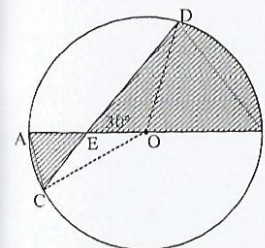
Já de acordo com o processo **subtrativo, engloba-se a figura por outras conhecidas**, de forma a obter figuras justapostas de área conhecida (dentre as quais, a figura desejada). Assim, também como conseqüência do axioma anterior, a área que se quer é a área da figura "englobante" (maior) menos as áreas das figuras componentes distintas da inicial.

Por meio das diagonais que passam pelo seu centro, um hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos eqüiláteros (congruentes) adjacentes. Pelo método aditivo, a área do hexágono é igual à soma das áreas dos triângulos. Daí:

$\mathbf{A_{hexágono} = 6.A_{triângulo}}$.

Um octógono eqüiângulo de lados alternadamente a e $a\sqrt{2}$ pode ter sua área calculada pelo método subtrativo. Prolongam-se os lados de medida a, obtendo-se um quadrado de lado $3a$ ("englobante"), o qual pode ser visto como formado pelo octógono e por quatro triângulos retângulos isósceles congruentes, de catetos a.

Portanto:

$$\mathbf{A_{octógono} = A_{quadrado} - 4.A_{triângulo}}$$

A fim de calcular a área de um segmento circular, ele é englobado por um setor circular. Tal setor é formado pelo segmento circular e por um triângulo isósceles, justapostos.

Pelo método subtrativo:

$$\mathbf{A_{segmento} = A_{setor} - A_{triângulo}}$$

Neste exemplo, uma das questões da prova do Colégio Naval de 84/85, $\overline{AB}$ é um diâmetro da circunferência de centro O e raio $4\sqrt{3}$ cm, e $\overline{CD}$ é uma corda que passa pelo médio E de $\overline{AO}$ e que forma 30° com $\overline{AB}$. Pedia-se a área hachurada, em cm^2.

Note-se que nenhuma das duas regiões que compõem a hachurada (DBE e ACE) é um setor circular, visto que $E \neq O$. Na maior região, a idéia é aplicar um raciocínio aditivo, traçando o raio $\overline{OD}$ e dividindo-a em um setor circular, BOD, e em um triângulo, DOE. Já na outra região, o raciocínio empregado é subtrativo, apesar de similar: traça-se $\overline{OC}$, criando-se um setor circular (COA) que engloba a região desejada, bem como um triângulo (CEO). Assim:

$\mathbf{A_{BDE} = A_{setor\ BOD} + A_{triângulo\ DOE}}$;

$\mathbf{A_{ACE} = A_{setor\ COA} - A_{triângulo\ COE}}$. Portanto:

$$\mathbf{A_{hachurada} = A_{BDE} + A_{ACE} \Rightarrow}$$

$$\mathbf{A_{hachurada} = A_{setor\ BOD} + A_{triângulo\ DOE} + A_{setor\ COA} - A_{triângulo\ COE}}$$

Como se sabe, a área representa uma medida. E ela mede o quê? Comumente falando, a área mede a *quantidade de* ***superfície*** *ocupada por uma figura*. Como qualquer medida que se preze, deve-se adotar uma **unidade de medida**, algo em relação ao qual a comparação será feita. Convenciona-se que a unidade de medida de área é a área de um **quadrado de lado unitário**. Por esta definição, percebe-se que a unidade de área depende explicitamente da unidade escolhida para medir o lado do quadrado unitário, isto é, depende da *unidade de comprimento* utilizada. Desse modo, quando se utiliza o metro para medir comprimentos, a área é medida em **metros quadrados** ($\mathbf{m^2}$). Caso sejam utilizadas polegadas para medir distâncias, a unidade de área utilizada será a *polegada quadrada*. É curioso notar que é daí que vem o costume de chamar as potências de expoente 2 de *quadrados* (por motivos semelhantes, chamam-se as potências de expoente 3 de *cubos*).

Há alguns procedimentos experimentais interessantes para medir áreas de figuras planas (ou, pelo menos, estimá-las). Um deles baseia-se em realizar os cortes do início desta discussão para representar

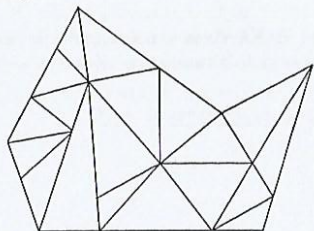
figuras planas (podem também ser utilizados lâminas de compensado em substituição às chapas metálicas). Para medir a área de uma peça, utiliza-se uma balança de dois pratos. Num dos pratos coloca-se a peça e noutro vão se colocando peças no formato de um quadrado de lado unitário (ou frações de tais peças). Quando houver o equilíbrio, verifica-se quantos quadrados unitários foram utilizados. Essa quantidade representa a área requerida.

Outro método de estimativa de áreas consiste em utilizar tesouras e colas. Desenha-se a figura num pedaço de papel, bem como vários quadrados unitários. Colam-se tais quadrados no interior da figura, de modo a preenchê-la completamente com quadrados unitários justapostos ou, eventualmente, frações destes, recortadas. A quantidade de quadrados unitários utilizados dá uma idéia da área da figura original.

Apesar disso, deve-se convir que tais procedimentos nem sempre são "exatos" (basta pensar numa área incomensurável com a unidade, isto é, irracional). Muito menos são úteis na prática (como medir, por exemplo, a área de um campo de futebol ou de uma cidade com esses métodos?). E quanto "menos poligonal" a figura, mais imprecisa é a medida efetuada, uma vez que devem ser feitas subdivisões do quadrado unitário "no chute", isto é: tudo bem que serão recortadas partes do quadrado unitário, mas qual a área de tais partes?

Portanto, as fórmulas de área e os métodos (aditivo e subtrativo) acima apresentados são particularmente úteis. Mesmo assim, não existem fórmulas específicas para o cálculo da área de *qualquer* figura. De um modo geral, para figuras muito irregulares, não se pode escapar dos métodos aproximativos, os quais, de uma forma geral, recorrem a definições de Cálculo Integral.

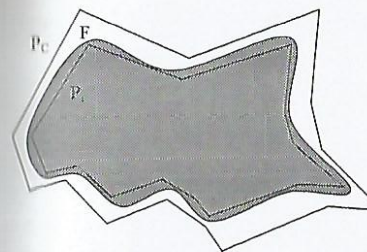
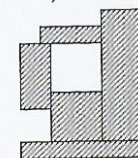
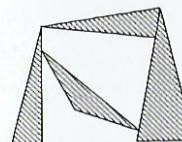
Apenas para complementar, será fornecida uma definição mais geral de área, que vale para qualquer tipo de figura e será utilizada em semelhanças, mais tarde.

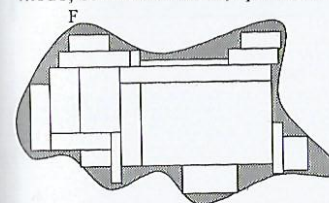
O raciocínio empregado parte do fato de que as áreas de polígonos, em geral, são de fácil cômputo (assim como de certas figuras não poligonais, como o círculo e suas partes, elipses de um modo geral, dentre outras). Ora, os polígonos mais simples são triângulos e quadriláteros. Então, para calcular a área de um polígono *qualquer*, um procedimento particularmente muito útil consiste em dividir o polígono dado em um número finito de triângulos (principalmente) ou em quadriláteros ou mesmo em outros polígonos convenientes justapostos, aplicando-se, após, o método aditivo ou o subtrativo (ver exemplos anteriores).

Qualquer polígono pode ser dividido em um número finito de polígonos justapostos mais simples. Particularmente, todo polígono é decomponível em triângulos.

Daí, a idéia é definir a área de uma figura F da seguinte forma: a área de F é o resultado (*limite*) das **aproximações por falta das áreas dos polígonos inteiramente contidos em F**, bem como das **aproximações por excesso das áreas dos polígonos que contêm F.**

Quaisquer que sejam os polígonos P_I e P_C, respectivamente, inteiramente contido ("inscrito") em e contendo ("circunscrito a") uma figura qualquer F, tem-se, por definição:

Área de $P_I \leq$ Área de F $\leq$ Área de P_C.

Em cálculo, diz-se que a área de F é, por definição, o **supremo** do conjunto A_I das áreas dos polígonos "inscritos" em F. Por supremo de um conjunto X entende-se **o menor dos números que supera qualquer elemento de X.** A área também pode ser vista como o **ínfimo** do conjunto A_C das áreas dos polígonos "circunscritos" a F. O ínfimo de um conjunto X é **o maior dos números que é inferior a qualquer elemento de X.**

Ao invés de considerar polígonos quaisquer na definição precedente, basta considerar polígonos (regiões) triangulares ou retangulares, uma vez que um polígono qualquer pode ser decomposto em polígonos mais simples. Um polígono (região) n-gonal é formado (a) por um número finito de n-ágonos justapostos (sem pontos internos em comum). Isso simplifica bastante a definição de área de uma figura.

Um polígono (região) triangular e uma região retangular.

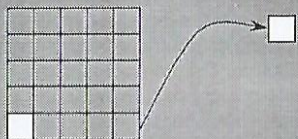
Desse modo, uma definição útil para a área de uma figura F qualquer é a seguinte: é o (único) número real cujas aproximações por falta são as áreas das regiões retangulares contidas em F e cujas aproximações por excesso são as áreas das regiões retangulares que contêm F. Em Cálculo (Análise Real), prova-se que, quando faz sentido falar na área de uma figura, basta considerar uma das duas aproximações acima (uma vez que elas devem coincidir para ser possível definir a área da figura). Desse modo, considerar-se-ão, apenas, as aproximações por falta.

A área de f é, por definição, o número real determinado pelas aproximações (por falta) das áreas dos polígonos retangulares contidos em F.

É possível fazer a *diferença* entre a área de F e a área da região retangular contida em F (região hachurada) ser tão pequena quanto se queira, acrescentando cada vez mais retângulos ("menores") justapostos aos já existentes.

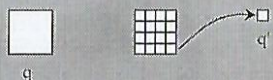
A escolha por polígonos retangulares é arbitrária e visa, apenas, à simplificação. Muitos autores preferem a definição usando regiões triangulares (formalmente mais simples, sem dúvida). Em termos computacionais, entretanto, a escolha por regiões retangulares é tão (ou mais) simples que qualquer outra, daí a utilização delas aqui. É possível – e rigorosamente importante – provar (usando argumentos um pouco mais sofisticados) que o valor que representa a área de uma figura F não depende da particular escolha da região retangular nela contida. Apesar de serem argumentos acessíveis, tal prova não será feita aqui.

4.1.1) Teorema 1: A área de um quadrado de lado ℓ é igual a ℓ^2.

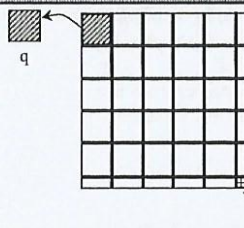
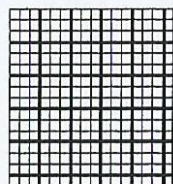
Demonstração:

Se o quadrado Q tem lado $\ell \in \mathbb{N}$, é possível dividir cada um dos quatro lados em ℓ segmentos unitários. Após traçar paralelas aos lados pelos pontos de divisão, obtêm-se $\ell \cdot \ell = \ell^2$ quadrados unitários. Como cada quadrado unitário q não possui ponto interno em comum com outro de mesmo tipo (isto é, os quadrados são justapostos), é fácil concluir que Q tem área igual a $1 \cdot \ell^2 = \ell^2$.

Exemplo em que $\ell = 5$. O quadrado maior, Q, fica dividido em $5^2 = 25$ quadrados unitários, q. Possui, portanto, superfície de 25 unidades de área.

No caso em que a medida do lado de Q é dada por um número racional qualquer, isto é, quando $\ell = \frac{m}{n}$, em que m e n são naturais, a idéia é subdividir cada lado (unitário) de q em n segmentos congruentes. São obtidos, assim, n^2 quadrados q' de lado $\frac{1}{n}$, de modo análogo ao anterior. Note-se que:

$$\text{Área de } q = n^2.(\text{Área de } q') \Leftrightarrow \text{Área de } q' = \frac{1}{n^2}.1 = \frac{1}{n^2}.$$

O quadrado unitário q foi subdividido em $4^2 = 16$ quadrados menores, q', cada um de área igual a 1/16 unidades.

Agora, como $\frac{m}{n} = m.\frac{1}{n}$, percebe-se que "cabem" m segmentos "sub-unitários" (ou seja, de medida $\frac{1}{n}$) em cada lado de Q. Por conseguinte, de modo similar ao exposto inicialmente, Q pode ser decomposto em m^2 quadrados q'. Daí:

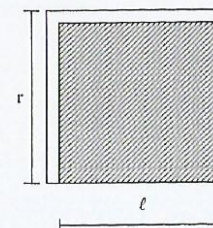
$$\text{Área de } Q = m^2.(\text{Área de } q') \Leftrightarrow \text{Área de } Q = m^2.\frac{1}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \ell^2.$$

Não é possível dividir o lado do quadrado em um número inteiro de segmentos unitários. Neste exemplo, $\ell = 5 + 1/3 = 16/3$.

Solução: subdividir a unidade. Neste exemplo, a unidade foi dividida em n = 3 partes, a fim de "caber" m = 16 subunidades no lado ℓ do quadrado. Assim, criaram-se $m^2 = 16^2$ (=256) quadradinhos q' de lado 1/3, o que mostra a área de Q igual a $256.(1/3)^2 = (16/3)^2 = \ell^2$.

A maior dificuldade consiste em provar que a área do quadrado continua a ser ℓ^2, mesmo no caso em que ℓ é irracional. Nesta situação, o raciocínio anterior não pode mais ser aplicado, já que ℓ não admite um submúltiplo comum com a unidade. Uma alternativa conveniente a ser adotada é utilizar o ***método da***

exaustão, atribuído ao matemático grego Eudóxio, do século IV antes de Cristo. Tal método consiste em uma demonstração indireta (*redução ao absurdo*), baseada num fato relativamente simples (de entender): a fim de conhecer um número irracional x qualquer, basta analisar os racionais menores que x (aproximações por falta) e os racionais maiores que x (aproximações por excesso). É possível obter (de modo não elementar) uma conclusão muito útil: entre dois números reais quaisquer (racionais ou irracionais) sempre existe um número racional (bem como um irracional, porém racionais são mais úteis). Devido a essa propriedade, diz-se que o conjunto dos números racionais (assim como o dos irracionais) é *denso* no conjunto dos números reais.

Suponha-se, então, que um quadrado Q tenha lado de medida ℓ, irracional. O raciocínio é provar que a área S do quadrado não pode ser nem menor nem maior que ℓ^2. Logo, por exclusão (exaustão), a S só pode ser igual a ℓ^2. Se $S > \ell^2$, ou, equivalentemente, $\sqrt{S} > \ell$, poder-se-ia escolher um racional r, tal que:

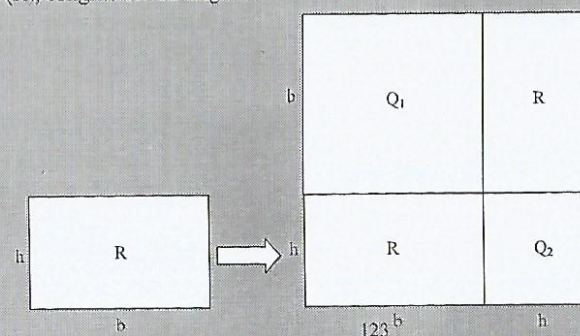
$$\sqrt{S} > r > \ell \left(\Rightarrow \sqrt{S} > r\right) \text{ (I)}$$

Desse modo, como o segmento de medida ℓ estaria contido no de medida r (já que $\ell < r$), concluir-se-ia que o quadrado de lado ℓ (Q) estaria inteiramente (propriamente) contido no quadrado de lado r (Q_1).

Daí, por definição de área: S < área de Q_1. Conforme provado anteriormente, área de $Q_1 = r^2$ (pois r é racional). Portanto, $S < r^2 \Rightarrow \sqrt{S} < r$, o que é uma contradição, de acordo com (I).

Desse modo, a área de Q *não pode ser inferior a* ℓ^2. Um raciocínio inteiramente análogo conduz à conclusão de que S também *não pode ser superior a* ℓ^2. Logo, $S = \ell^2$, qualquer que seja o número real positivo ℓ, como se queria demonstrar.

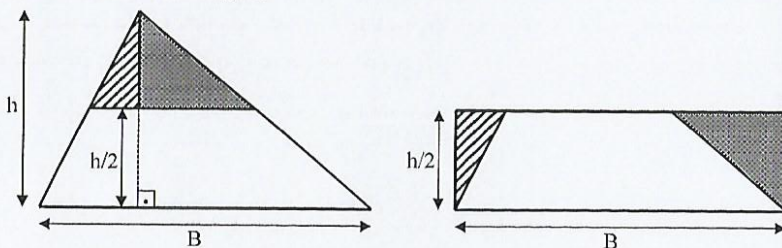
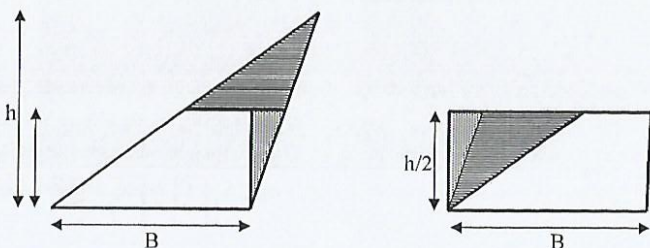
4.1.2) Teorema 2: A área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura.

Demonstração:

Prolongando os lados de um retângulo de dimensões b e h, é possível obter um quadrado Q de lado b + h. Tal quadrado pode ser decomposto em dois quadrados, de lados b (Q_1) e h (Q_2), e em dois retângulos (R), congruentes ao original.

Portanto:
Área de Q = Área de Q_1 + Área de Q_2 + 2.Área de R (I).
Por outro lado, de acordo com o teorema precedente:
Área de Q = $(b + h)^2$; Área de $Q_1 = b^2$; Área de $Q_2 = h^2$ (II).
Substituindo as equações (II) em (I), vem:
$(b + h)^2 = b^2 + h^2 + 2.$Área de R $\Leftrightarrow b^2 + h^2 + 2.b.h = b^2 + h^2 + 2.$Área de R.
Logo: **Área de R = b.h** (c.q.d.)

4.1.3) Área do Triângulo

Vamos mostrar que todo triângulo é equivalente a um retângulo que possui mesma base e metade da altura do triângulo. Para tanto, basta observar que sempre podemos decompor um triângulo arbitrário em um trapézio (de altura igual à metade da altura do triângulo) e dois triângulos, que podem ser reagrupados de modo a formar um retângulo.

1° caso: triângulo acutângulo

2° caso: triângulo obtusângulo

Assim, a área de um triângulo é igual a $S = \frac{B.h}{2}$

Na verdade, como em cada triângulo existem três pares de lados e alturas relativas, podemos escrever três expressões para o cálculo da área de um triângulo ABC:

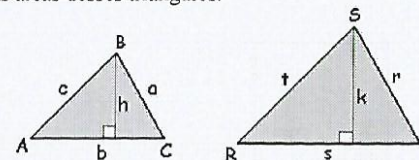
$$S = \frac{a.h_a}{2} = \frac{b.h_b}{2} = \frac{c.h_c}{2}$$

onde h_a, h_b e h_c são as alturas relativas aos lados $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$, respectivamente.

Por outro lado, como h_a = c.sen B, hb = c.sen A e hc = b.sen A, podemos também escrever que:

$$S = \frac{a.b.senC}{2} = \frac{a.c.senB}{2} = \frac{b.c.senA}{2}$$

4.2) COMPARAÇÃO DE ÁREAS ENTRE TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Conhecendo-se a razão entre medidas correspondentes quaisquer de dois triângulos semelhantes, é possível obter a razão entre as áreas desses triângulos.

Propriedade: A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança k: $\frac{Área(ABC)}{Área(RST)} = \frac{b^2}{s^2} = \frac{a^2}{r^2} = \frac{c^2}{t^2} = k^2$

Demonstração:
Se ΔABC e ΔRST são semelhantes, então $\frac{b}{s} = \frac{a}{r} = \frac{c}{t} = \frac{h}{k} = k$.

Portanto: $\frac{Área(ABC)}{Área(RST)} = \frac{\frac{b.h}{2}}{\frac{s.k}{2}} = \frac{b}{s}\frac{h}{k} = \frac{b}{s}\frac{b}{s} = \frac{b^2}{s^2} = \frac{a^2}{r^2} = \frac{c^2}{t^2} = k^2$

4.3) A FÓRMULA DE HERON

"A área de um triângulo ABC, onde BC = a, AC = b, AB = c e $p = \frac{a+b+c}{2}$, é igual a $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$"

Demonstração:

Pelo Teorema de Pitágoras:
i) $x^2 + (h_a)^2 = c^2$
ii) $(a - x)^2 + (h_a)^2 = b^2 \Rightarrow a^2 - 2ax + x^2 + (h_a)^2 = b^2 \Rightarrow$
$a^2 - 2ax + c^2 = b^2 \Rightarrow x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$

Aplicando em i):

$$(h_a)^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 = \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$$

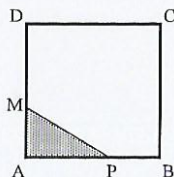
$$(h_a)^2 = \left(\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) = \left(\frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}\right)\left(\frac{-b^2 + (a+c)^2}{2a}\right) \Rightarrow$$

$$h_a = \frac{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)(a+c+b)}}{2a} \Rightarrow h_a = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}}{a}$$

Como a área S de ABC é igual a $\frac{a.h_a}{2}$, então $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Obs: No capítulo 7 serão estudadas outras expressões para o cálculo da área de um triângulo, envolvendo os raios das circunferências inscritas e circunscritas ao triângulo.

Exemplos:

1) (UFOP-2005) Dado um quadrado ABCD, cujo lado mede 20 cm, marcam-se os pontos M em AD e P em AB, tais que PB = 2AM.

Calcular a distância AM para que a área do triângulo AMP seja máxima.

Solução:

Seja AM = x. Assim, temos que AP = 20 – 2x. Logo: $S_{\Delta AMP} = AM.AP/2 = x(10 - x) = 10x - x^2$.
O valor máximo da função $f(x) = 10x - x^2$ ocorre para $x_v = -b/2a = -10/(-2) = 5$.

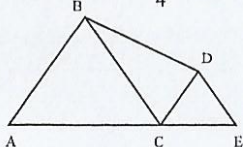
2) (Unifei-2005) Um triângulo ABC tem $\overline{AB} = \sqrt{5}$ cm e $A\hat{B}C = 30°$. Se a sua área mede $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ cm², pode-se afirmar que esse triângulo é:

a) Escaleno. b) Eqüilátero. c) Isósceles. d) Retângulo.

Solução:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\overline{AB}.\overline{BC}}{2}\text{sen}\hat{B} \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{5}.\overline{BC}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{5} \text{ cm}.$$

Uma vez que $\overline{AB} = \overline{BC}$ e $\hat{B} \neq 60°$, então ABC é um triângulo isósceles.

3) (AFA-2002) Na figura abaixo, os triângulos ABC e CDE são equiláteros. Se a razão entre as áreas desses triângulos é $\frac{9}{4}$ e o perímetro do menor é 12, então, a área do quadrilátero ABDE é

a) $2 + \sqrt{3}$ b) $9\sqrt{3}$ c) $11 - \sqrt{3}$ d) $19\sqrt{3}$

Solução:

Sejam L e ℓ os lados dos triângulos eqüiláteros ABC e CDE. Como o perímetro de CDE é 12, $\ell = 4$.

Desde que ABC e CDE são semelhantes: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CDE}} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{L^2}{\ell^2} = \frac{9}{4} \Rightarrow L = 6$.

Como ∠ACB = 60° e ∠DCE = 60°, então ∠BCD = 60°.

Assim: $S_{\Delta BCD} = \frac{\overline{BC}.\overline{CD}.\text{sen}(\angle BCD)}{2} = \frac{6.4.(\sqrt{3}/2)}{2} = 6\sqrt{3}$

Portanto: $S_{ABDE} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta CDE} + S_{\Delta BCD} = \frac{36\sqrt{3}}{4} + \frac{16\sqrt{3}}{4} + 6\sqrt{3} = 19\sqrt{3}$

4) (PUC/MG-2005) O terreno representado na figura tem a forma de um triângulo retângulo de catetos *AB* = 30 e *AE* = 40 m. A cerca *CD* é paralela a *AB* e divide esse terreno em dois lotes de áreas equivalentes. Nessas condições, a medida do segmento *AD*, em metros, é (Considere $\sqrt{2} = 1,4$):

a) 10

b) 11

c) 12

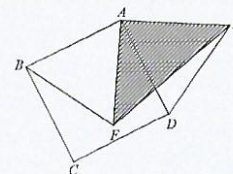
d) 13

Solução:

Uma vez que os triângulos ABE e DCE são semelhantes: $\frac{S_{\Delta DCE}}{S_{\Delta ABE}} = \left(\frac{DE}{AE}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{DE}{40}\right)^2 \Rightarrow$

$DE = 20\sqrt{2} = 28$ m $\Rightarrow$ AD = 40 – 28 = 12 m.

5) (OBM-2004) No desenho ao lado, o quadrilátero *ABCD* é um quadrado de lado 3 cm e os triângulos *ABF* e *AED* são ambos equiláteros. Qual é a área da região destacada?

a) 2 cm²
b) 1,5 cm²
c) 3 cm²
d) 4,5 cm²
e) 2,5 cm²

Solução:

Como ∠BAF = 60° então ∠FAD = 90° – ∠BAF = 30° ⇒ ∠FAE = ∠FAD + ∠DAE = 30° + 60° = 90°.

Portanto, o triângulo FAE é retângulo isósceles, sendo sua área igual a $\frac{AF.AE}{2} = \frac{3.3}{2} = 4,5$ cm².

6) (UFV-2005) Na figura abaixo, que representa um triângulo retângulo isósceles ABC, os catetos medem 4. Os segmentos paralelos a BC dividem AB em 4 partes iguais; e os segmentos que partem do vértice A fazem o mesmo com o cateto BC . A área do trapézio hachurado é:

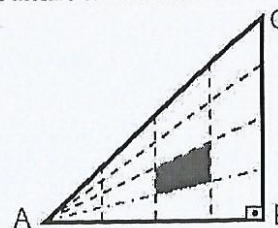
a) 9/8

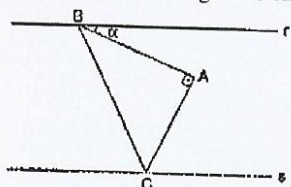
b) 5/8

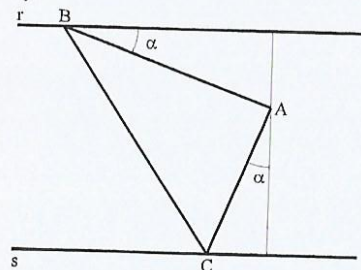
c) 3/8

d) 7/8

e) 1/8

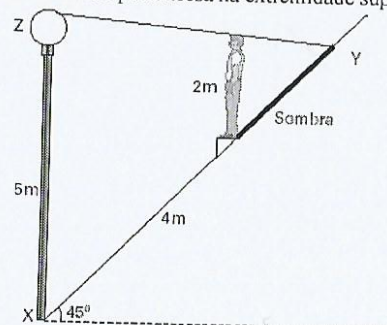
Solução:

O triângulo ΔADE possui base DE igual a 1 e altura relativa ao vértice A igual a 4. Logo $S_{\Delta ADE} = (1.4)/2 = 2$.
Os triângulos ΔAFG e ΔADE são semelhantes com razão de semelhança igual a 3/4 (razão entre as alturas), logo: $\frac{S_{\Delta AFG}}{S_{\Delta ADE}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow S_{\Delta AFG} = \frac{9}{8}$.
Analogamente, a razão de semelhança entre ΔAIH e ΔAFG é 1/2:
$\frac{S_{\Delta AIH}}{S_{\Delta ADE}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow S_{\Delta AIH} = \frac{1}{2}$. Conseqüentemente: $S_{FGHI} = S_{\Delta AFG} - S_{\Delta AIH}$ $= \frac{9}{8} - \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$.

7) (Fuvest-99) As retas **r** e **s** são paralelas e **A** é um ponto entre elas que dista **1** de **r** e **2** de **s**. Considere um ângulo reto, de vértice em **A**, cujos lados interceptam **r** e **s** nos pontos **B** e **C**, respectivamente. O ângulo agudo entre o segmento $\overline{AB}$ e a reta **r** mede α.

a) Calcule a área do triângulo **ABC** em função do ângulo α.
b) Para que valor de α a área do triângulo **ABC** é mínima?

Solução:

a) Como a distância de A à reta r é 1, então $\overline{AB} = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$. Analogamente, como a distância de A à reta s é 2, então $\overline{AC} = \frac{2}{\cos\alpha}$.

Portanto: $S_{\Delta ABC} = \frac{\overline{AB}.\overline{AC}}{2} = \frac{1}{\text{sen}\alpha.\cos\alpha} = \frac{2}{\text{sen}2\alpha}$

b) $S_{\Delta ABC}$ é mínimo quando sen 2α é máximo, ou seja, $\text{sen}\,2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$.

8) (Unesp-2005) Uma estátua de 2 metros de altura e um poste de 5 metros de altura estão localizados numa ladeira de inclinação igual a 45°, como mostra a figura. A distância da base do poste à base da estátua é 4 metros, e o poste tem uma lâmpada acesa na extremidade superior.

Adotando $\sqrt{2} = 1,41$ e sabendo que tanto o poste quanto a estátua estão na vertical, calcule
a) o comprimento aproximado da sombra da estátua projetada sobre a ladeira;
b) a área do triângulo XYZ indicado na figura.

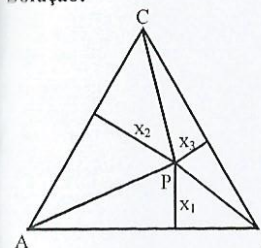
Solução:

a) Seja P o ponto correspondente à parte superior da estátua, Q o ponto correspondente à parte inferior da estátua e x o comprimento da sombra. Como ΔXYZ e ΔQPY são semelhantes:

$\frac{5}{2} = \frac{4+x}{x} \Rightarrow 5x = 8 + 2x \Rightarrow x = \frac{8}{3}$ m.

b) $S_{\Delta XYZ} = \frac{XZ.XY}{2}\text{sen}45° = \frac{5\left(4+\frac{8}{3}\right)}{2}\frac{1,41}{2} = 11,75\ \text{m}^2$.

9) (IME-92/93) Provar que a soma das distâncias de um ponto qualquer interior a um triângulo eqüilátero aos lados é constante.

Solução:

Seja ℓ o lado do triângulo equilátero ABC e sejam x_1, x_2 e x_3 as distâncias do ponto P aos lados do triângulo.

Como ABC é eqüilátero sua S área é dada por $S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

$S = S_{\Delta PAB} + S_{\Delta PAC} + S_{\Delta PBC} \Rightarrow \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\ell.x_1}{2} + \frac{\ell.x_2}{2} + \frac{\ell.x_3}{2} \Rightarrow$

$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, que é um valor constante.

10) A área de um triângulo é dada pela fórmula $S = \frac{a^2+b^2}{4}$, onde a e b são dois de seus lados. Determine os ângulos do triângulo.

Solução:

Como a área de um triângulo é dada por $S = \frac{a.b.\text{sen}C}{2}$, temos $\frac{a^2+b^2}{4} = \frac{ab.\text{sen}C}{2} \Rightarrow$

$\text{sen}C = \frac{a^2+b^2}{2ab} \Rightarrow \text{sen}C - 1 = \frac{a^2+b^2}{2ab} - 1 = \frac{a^2+b^2-2ab}{2ab} \Rightarrow \text{sen}C - 1 = \frac{(a-b)^2}{2ab}$

Sabemos que $\frac{(a-b)^2}{2ab}$ é sempre maior ou igual a zero, fazendo com que sen C ≥ 1.
Como o valor máximo do seno de qualquer ângulo é 1, então sen C = 1, ou seja, C = 90°.
Daí: a = b, implicando que A = B = 45°.

11) Dois lados de um triângulo são 6 e $5\sqrt{2}$. Determine o valor do terceiro lado do triângulo sabendo que sua área é 3.

Solução:

Seja x o valor do lado desconhecido. Assim: $p = \frac{6+5\sqrt{2}+x}{2}$.

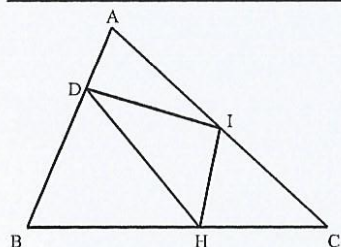
Pela fórmula de Heron: $S = \sqrt{p(p-x)(p-5\sqrt{2})(p-6)} \Rightarrow$

$3 = \sqrt{\left(\frac{6+5\sqrt{2}+x}{2}\right)\left(\frac{6+5\sqrt{2}-x}{2}\right)\left(\frac{x-5\sqrt{2}+6}{2}\right)\left(\frac{x+5\sqrt{2}-6}{2}\right)} \Rightarrow$

$9 = \frac{[(6+5\sqrt{2})^2 - x^2][x^2-(5\sqrt{2}-6)^2]}{16} \Rightarrow 144 = -196 + 172x^2 - x^4 \Rightarrow$

$x^4 - 172x^2 + 340 = 0 \Rightarrow (x^2-2)(x^2-170) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{170}$

12) Sejam D, H, I pontos no interior dos lados AB, BC, CA do triângulo ABC de área 1 tais que BD = 3AD, BH = 2HC e CI = IA. Calcule a área do triângulo DHI.

Solução:

Observe que:

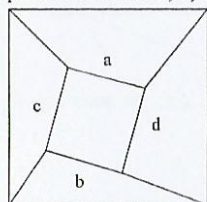
$$\frac{S_{\Delta ADI}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{(AD.AI.sen\hat{A})/2}{(AB.AC.sen\hat{A})/2} = \frac{AD}{AB}\frac{AI}{AC} = \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

$$\frac{S_{\Delta BHD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{(BD.BH.sen\hat{B})/2}{(AB.BC.sen\hat{B})/2} = \frac{BD}{AB}\frac{BH}{BC} = \frac{3}{4}\frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{S_{\Delta CHI}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{(CI.CH.sen\hat{C})/2}{(AC.BC.sen\hat{C})/2} = \frac{CI}{AC}\frac{CH}{BC} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Portanto, como a área de ΔABC é 1:

$$S_{\Delta ADI} + S_{\Delta BHD} + S_{\Delta CHI} + S_{\Delta DHI} = 1 \Rightarrow \frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+S_{\Delta DHI} = 1 \Rightarrow S_{\Delta DHI} = \frac{5}{24}.$$

13) Na figura abaixo um quadrado *EFGH* foi colocado no interior do quadrado *ABCD*, determinando 4 quadriláteros. Se *a*, *b*, *c*, e *d* denotam as medidas das áreas dos quadriláteros, mostre que $a + b = c + d$.

Solução:

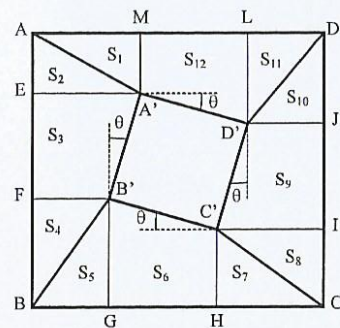
Inicialmente vamos fazer as seguintes construções:

– sejam x o comprimento do lado do quadrado ABCD e y o lado do quadrado A'B'C'D';

– marquemos os pontos E, F, G, H, I, J, L e M, que são as projeções ortogonais dos pontos A', B', C' e D' (vértices do quadrado interior) sobre os lados AB, BC, CD e DA, como indica a figura;

– tracemos os segmentos A'E, B'F, B'G, ..., D'L e A'M;

– chamemos de $S_1, S_2, ..., S_{12}$ as áreas das 12 figuras que surgem na região entre o quadrado maior e o menor;

– indiquemos o ângulo θ que formam com a horizontal os lados B'C' e D'A', que é o mesmo ângulo que os lados A'B' e C'D' formam com a vertical.

Como AMA'E é um retângulo e AA' é uma de suas diagonais, então $S_1 = S_2$. Analogamente temos que:

$S_4 = S_5$, $S_7 = S_8$, $S_{10} = S_{11}$ (1)

Da figura temos que EF = GH = IJ = LM = y.cos θ.

Notamos também que:

EA' + D'J = FB' + C'I = MA' + B'G = LD' + C'H = x – y.cos θ.

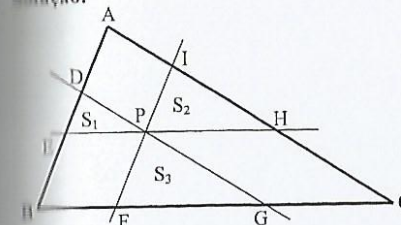
Desde que A'D' ∥ B'C' e A'B' = C'D' podemos unir os trapézios de áreas S_3 e S_9 (de modo que os segmentos A'B' e C'D' sejam coincidentes) e formar assim um retângulo cujas dimensões são y.cos θ e x – y.cos θ e cuja área total é $S_3 + S_9$.

Fazendo o mesmo com os trapézios de áreas S_6 e S_{12}, teremos a formação de um outro retângulo cujas dimensões são x – y.cos θ e y.cos θ e cuja área total é $S_6 + S_{12}$.

Como os dois retângulos formados acima possuem as mesmas dimensões, então as áreas também são iguais. Deste modo: $S_3 + S_9 = S_6 + S_{12}$ (2)

De (1) e (2) temos que: $S_2 + S_4 + S_8 + S_{10} + S_3 + S_9 = S_1 + S_5 + S_7 + S_{11} + S_6 + S_{12} \Rightarrow a + b = c + d$.

14) ABC é um triângulo e P um ponto no seu interior. Paralelas aos lados contendo P dividem o triângulo em 6 partes das quais 3 são triângulos de área S_1, S_2 e S_3. Provar que a área S de ABC é dada por $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

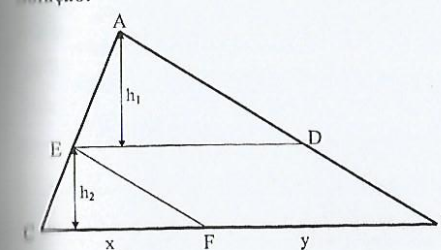
Solução:

Como DG ∥ AC, IF ∥ AB e EH ∥ BC ⇒ ΔDEP ~ ΔPFG ~ ΔIPH ~ ΔABC

Assim: $\frac{S_1}{S} = \left(\frac{EP}{BC}\right)^2$ $\frac{S_2}{S} = \left(\frac{PH}{BC}\right)^2$ $\frac{S_3}{S} = \left(\frac{FG}{BC}\right)^2$

Portanto: $\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{EP + PH + FG}{BC} = 1 \Rightarrow$

$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$

15) Um ponto E é escolhido sobre o lado AC de um triângulo ABC. Por E traçamos duas retas DE e EF paralelas aos lados BC e AB, respectivamente; D e F são pontos em AB e BC, respectivamente. Prove que $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE}.S_{EFC}}$.

Solução:

Como ED // FB e EF // DB então ED = FB = y.

Traçando FD, dividimos BDEF em dois triângulos congruentes, cada um de área $y.h_2/2$.

Assim, $S_{BDEF} = y.h_2$.

Por outro lado, $S_{ADE} = y.h_1/2$ e $S_{EFG} = x.h_2/2$.

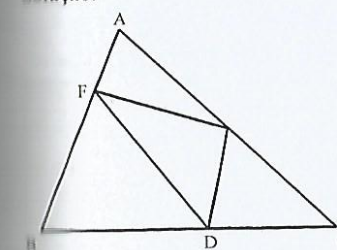
Desde que ΔADE e ΔEFC são semelhantes:

$\frac{y}{x} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow y.h_2 = x.h_1$.

Logo: $S_{ADE}.S_{EFG} = \frac{y.h_1}{2}\frac{x.h_2}{2} = \frac{(y.h_2)(x.h_1)}{4} \Rightarrow$

$4.S_{ADE}.S_{EFG} = (y.h_2)^2 = (S_{BDEF})^2 \Rightarrow S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE}.S_{EFC}}$

16) Pontos D, E e F são escolhidos sobre os lados BC, AC e AB, respectivamente, de modo que os triângulos AFE, BDF, CED e DEF possuem áreas iguais. Prove que D, E e F são os pontos médios dos lados de ΔABC.

Solução:

Suponha que BF/AB = r, CD/BC = p e AE/AC = q.

$$\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{(CE.CD.sen\hat{C})/2}{(AC.BC.sen\hat{C})/2} = \frac{CE}{AC}\frac{CD}{BC} = (1-q)p.$$

Como as áreas de AFE, BDF, CED e DEF são iguais a um quarto da área de ABC, então $p(1 - q) = 1/4$ (1)

Analogamente: $q(1 - r) = 1/4$ (2) $r(1 - p) = 1/4$ (3)

Desenvolvendo (1) obtemos $q = \frac{4p-1}{4p}$.

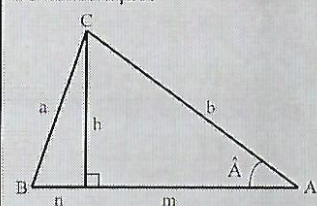
Substituindo em (2): $\frac{4p-1}{4p}(1-r) = \frac{1}{4} \Rightarrow r = \frac{3p-1}{4p-1}$.

Substituindo em (3): $\frac{3p-1}{4p-1}(1-p) = \frac{1}{4} \Rightarrow (12p-4)(1-p) = 4p - 1 \Rightarrow 3(4p^2 - 4p + 1) = 0 \Rightarrow$

$(2p - 1)^2 = 0 \Rightarrow p = 1/2 \Rightarrow q = 1/2$ e $r = 1/2 \Rightarrow$ D, E e F são os pontos médios de ΔABC.

4.4) RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS QUAISQUER

4.4.1) Lei dos Cossenos: "Se ΔABC é um triângulo de modo que BC = a, AC = b e AB = c, então: $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos B$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$"

Demonstração:

Tracemos a altura relativa ao lado AB, que determina dois triângulos retângulos. Escrevendo as duas relações de Pitágoras:

$h^2 = a^2 - n^2$ e $h^2 = b^2 - m^2$

Igualando: $a^2 - n^2 = b^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 - (m+n)(m-n) \Rightarrow$

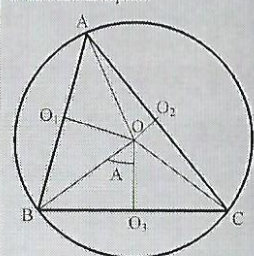
$a^2 = b^2 - c.(b.\cos A - a.\cos B)$

Como $c = a.\cos B + b.\cos A$ então:

$a^2 = b^2 - c.(b.\cos A + b.\cos A - c) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$

A Lei dos Cossenos permite o reconhecimento da natureza de um triângulo. Suponhamos que $a = \overline{BC}$ seja o maior lado de um triângulo ABC. Como $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c}$, então podemos afirmar que:

i) se $a^2 < b^2 + c^2$ e $b^2 < a^2 + c^2$ e $c^2 < a^2 + b^2$ então ABC é acutângulo.
ii) se ou $a^2 = b^2 + c^2$ ou $b^2 = a^2 + c^2$ ou $c^2 = a^2 + b^2$ então ABC é retângulo.
iii) se ou $a^2 > b^2 + c^2$ ou $b^2 > a^2 + c^2$ ou $c^2 > a^2 + b^2$ então ABC é obtusângulo.

4.4.2) Lei dos Senos: "Se ABC é um triângulo de lados BC = a, AC = b e AB = c e R é o raio da circunferência circunscrita, então $\dfrac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2R$"

Demonstração:

Seja O o circuncentro de ABC.

Inicialmente note que $\angle B\hat{O}C = 2.\angle B\hat{A}C = 2\hat{A}$.

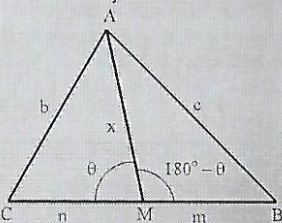
Sejam O_1, O_2 e O_3 os pés das projeções de O sobre os lados AB, AC e BC, respectivamente.

Como ΔBOC é isósceles $\Rightarrow$ OO_3 é altura e bissetriz $\Rightarrow$

$\angle B\hat{O}O_3 = \hat{A} \Rightarrow \text{sen } A = BO_3/BO \Rightarrow \text{sen } \hat{A} = a/2R \Rightarrow \dfrac{a}{\text{sen}\hat{A}} = 2R$

Analogamente pode-se demonstrar que $\dfrac{b}{\text{sen}\hat{B}} = 2R$ e $\dfrac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2R$

4.4.3) Relação de Stewart: "Se ABC é um triângulo de lados BC = a, AC = b e AB = c e se AM = x é uma ceviana (M ∈ BC) de modo que CM = n e CM = m, então temos que $b^2.m + c^2.n = a.x^2 + a.m.n$"

Demonstração:

Aplicando a Lei dos Cossenos em ΔACM:

$b^2 = n^2 + x^2 - 2.n.x.\cos\theta \Rightarrow \dfrac{b^2}{n} = n + \dfrac{x^2}{n} - 2.x.\cos\theta$ (1)

Aplicando a Lei dos Cossenos em ΔABM:

$c^2 = m^2 + x^2 - 2.m.x.\cos(180^\circ - \theta) \Rightarrow c^2 = m^2 + x^2 + 2.m.x.\cos\theta \Rightarrow$

$\dfrac{c^2}{m} = m + \dfrac{x^2}{m} + 2.x.\cos\theta$ (2)

Somando (1) e (2): $\dfrac{b^2}{n} + \dfrac{c^2}{m} = m + n + \dfrac{x^2}{m} + \dfrac{x^2}{n} \Rightarrow b^2.m + c^2.n = a.x^2 + a.m.n$

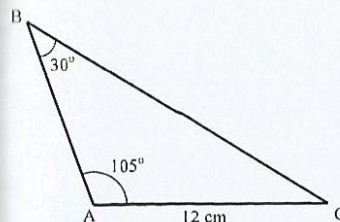
emplos:

1) (UFJF-2005) Dois lados de um triângulo medem 8 m e 10 m e formam um ângulo de 60°. O terceiro lado desse triângulo mede:

a) $2\sqrt{21}$ m b) $2\sqrt{31}$ m c) $2\sqrt{41}$ m d) $2\sqrt{51}$ m e) $2\sqrt{61}$ m

lução:

Pela Lei dos Cossenos: $\ell^2 = 8^2 + 10^2 - 2.8.10.\cos 60^\circ = 84 \Rightarrow \ell = 2\sqrt{41}$ m

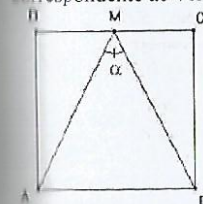
2) (Mackenzie-2005) Três ilhas A, B e C aparecem num mapa, em escala 1:10 000, como na figura. Das alternativas, a que melhor aproxima a distância entre as ilhas A e B é:

lução:

Temos que: $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$.

Pela Lei dos Senos: $\dfrac{AC}{\text{sen}\hat{B}} = \dfrac{AB}{\text{sen}\hat{C}} \Rightarrow \dfrac{12}{\text{sen}30^\circ} = \dfrac{AB}{\text{sen}45^\circ} \Rightarrow AB = 12\sqrt{2}$ cm

Como a figura está ma escala 1:10 000, na verdade $AB = 1{,}2\sqrt{2}$ km.

Utilizando a aproximação $\sqrt{2} \cong 1{,}41$, temos que $AB \cong 1{,}7$ km

3) (UFMS-2005) Na figura, ABCD é um quadrado. Sendo M o ponto médio do lado BC e α o ângulo correspondente ao vértice M do triângulo AMD, calcule o valor de 30.cos α.

lução:

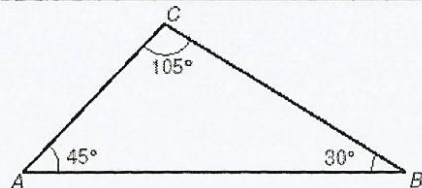
Seja 2ℓ o lado quadrado. Aplicando o Teorema de Pitágoras em ΔABM:

$AM^2 = AB^2 + BM^2 = 4\ell^2 + \ell^2 = 5\ell^2 \Rightarrow AM = \sqrt{5}\ell$

Como $\Delta ABM \equiv \Delta DCM$, então $DM = \sqrt{5}\ell$. Aplicando a Lei dos Cossenos em ΔAMD:

$AD^2 = AM^2 + DM^2 - 2.AM.DM.\cos\alpha \Rightarrow 4\ell^2 = 5\ell^2 + 5\ell^2 - 2.\sqrt{5}\ell.\sqrt{5}\ell.\cos\alpha \Rightarrow$

$10\ell^2\cos\alpha = 6\ell^2 \Rightarrow 30.\cos\alpha = 18$.

4) (UFV-2005) Três cidades *A*, *B* e *C* estão situadas no cruzamento de três rodovias, que formam ângulos de 30°, 45° e 105° entre si, conforme a figura abaixo. Dois automóveis *X* e *Y* partiram com velocidades constantes às 13:00 horas das cidades *A* e *B*, respectivamente, rumo à cidade *C*. O automóvel *X* chegou no mesmo dia às 16:00 horas, e o automóvel *Y*, uma hora depois. Sabendo que *X* viajou à velocidade de 80 km/h e que $\sqrt{2} = 1{,}4$, determine a velocidade do automóvel *Y*.

Solução:

Pela Lei dos Senos $\dfrac{AC}{sen30^o} = \dfrac{BC}{sen45^o} \Rightarrow BC = \sqrt{2}.AC \Rightarrow v_x.\Delta t_x = (1,4)v_y.\Delta t_y \Rightarrow$

$(80)(3) = (1,4)v_y(4) \Rightarrow v_y \cong 42{,}86$ km/h.

5) (UFSJ-2004) O triângulo, cujas medidas dos lados, em unidades de comprimento, são iguais a $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ e $2\sqrt{3}$, respectivamente, é:

a) acutângulo b) obtusângulo c) retângulo d) eqüiângulo

Solução:

Seja $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{7}$ e $c = 2\sqrt{3}$. Note que $a^2 + b^2 = 5 + 7 = 12 = (2\sqrt{3})^2 = c^2 \Rightarrow \Delta ABC$ é retângulo.

6) (FEI-2005) Em um triângulo ABC, os lados opostos aos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são, respectivamente a e b, tais que $a = 2b$. Sabendo que o ângulo $\hat{C}$ mede 60° e que sen 60° = $\sqrt{3}/2$, assinale a alternativa correta:

a) $\hat{A} = 105^o$ e $\hat{B} = 15^o$ b) $\hat{A} = 30^o$ e $\hat{B} = 90^o$ c) $\hat{A} = 90^o$ e $\hat{B} = 30^o$

d) $\hat{A} = 45^o$ e $\hat{B} = 75^o$ e) $\hat{A} = 75^o$ e $\hat{B} = 45^o$

Solução:

Pela Lei dos Cossenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 4b^2 + b^2 - 2(2b)(b)(1/2) = 3b^2 \Rightarrow c = \sqrt{3}b$.

Assim, os lados de ΔABC são 2b, b e $\sqrt{3}b$. Como $(b)^2 + (\sqrt{3}b)^2 = (2b)^2$ então ΔABC é retângulo com ângulo reto em A. Logo, $\hat{A} = 90^o$ e $\hat{B} = 30^o$.

7) (ITA-97) Em um triângulo ABC, sabe-se que o segmento AC mede 2 cm. Sejam α e β, respectivamente, os ângulos opostos aos segmentos BC e AC. A área do triângulo é (em cm²) igual a

a) $2sen^2\alpha \cot g\,\beta + sen\,2\alpha$ b) $2sen^2\alpha tg\,\beta - sen\,2\alpha$ c) $2cos^2\alpha \cot g\,\beta + sen\,2\alpha$

d) $2cos^2\alpha tg\,\beta + sen\,2\alpha$ e) $2sen^2\alpha tg\,\beta - cos\,2\alpha$

Solução:

Lei dos Senos em ABC: $\dfrac{2}{sen\beta} = \dfrac{BC}{sen\alpha} = \dfrac{AC}{sen(\alpha+\beta)} \Rightarrow BC = \dfrac{2.sen\alpha}{sen\beta}$

$$S = \frac{AC.BC.sen(\alpha+\beta)}{2} = \frac{2.\dfrac{2.sen\alpha}{sen\beta}(sen\alpha.\cos\beta + sen\beta.\cos\alpha)}{2} = 2sen^2\alpha\cot\beta + 2sen\alpha\cos\alpha \Rightarrow$$

$S = 2sen^2\alpha\cot\beta + sen2\alpha$

8) (ITA-94) Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo e A, B e C os ângulos internos opostos, respectivamente, a cada um destes lados. Sabe-se que a, b, c nesta ordem, formam uma progressão aritmética. Se o perímetro do triângulo mede 15 cm e $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{77}{240}$, então sua área, em cm², mede:

a) $(15\sqrt{7})/4$ b) $(4\sqrt{5})/3$ c) $(4\sqrt{5})/5$ d) $(4\sqrt{7})/7$ e) $(3\sqrt{5})/4$

Solução:

Como os lados estão em uma PA de soma 15: $a = 5 - r$ $b = 5$ $c = 5 + r$

Lei dos Cossenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$

Deste modo, desenvolvendo a expressão:

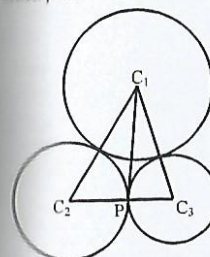
$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2.a.b.c} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2.a.b.c} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2.a.b.c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2.a.b.c} = \frac{77}{240} \Rightarrow$$

$120(a^2 + b^2 + c^2) = 77.a.b.c \Rightarrow 120(25 - 10r + r^2 + 25 + 25 + 10r + r^2) = 77.5.(25 - r^2) \Rightarrow$

$24(75 + 2r^2) = 77(25 - r^2) \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow a = 4$ $b = 5$ $c = 6$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-4\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)} = \sqrt{\frac{15}{2}\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}} \Rightarrow S = \frac{15\sqrt{7}}{4}.$$

9) Três circunferências, de centros C_1, C_2, C_3 e raios a, b, c respectivamente, são tangentes exteriores duas a duas. Considere que P é o ponto de tangência das circunferências de centros C_2 e C_3. Determine o valor de $\overline{C_1P}$.

Solução:

Seja $\overline{C_1P} = x$. Pelo Teorema de Stewart:

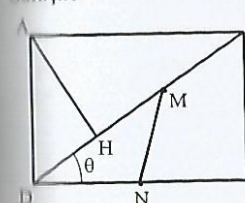
$\overline{C_1C_2}^2.\overline{C_3P} + \overline{C_1C_3}^2.\overline{C_2P} = \overline{C_2C_3}.x^2 + \overline{C_2C_3}.\overline{C_2P}.\overline{C_3P} \Rightarrow$

$(a + b)^2c + (a + c)^2b = (b + c)x^2 + (b + c)b.c \Rightarrow$

$a^2c + 2abc + b^2c + a^2b + 2abc + c^2b = (b + c)x^2 + b^2c + c^2b \Rightarrow$

$(b + c)x^2 = a^2c + a^2b + 4abc \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{a(ab + ac + 4bc)}{b + c}}$

10) (Olimpíada de Maio-2003) Seja *ABCD* um retângulo de lados *AB* = 4 e *BC* = 3. A perpendicular à diagonal *BD* traçada por *A* corta *BD* no ponto *H*. Chamamos de *M* o ponto médio de *BH* e de *N* o ponto médio de *CD*. Calcule a medida do segmento *MN*.

Solução:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔABD encontramos que BD = 5

$\Delta ABH \sim \Delta ABD \Rightarrow \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{AB}{BD} \Rightarrow \dfrac{BH}{4} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow BH = \dfrac{16}{5}$

Portanto: $DM = BD - BM = 5 - \dfrac{8}{5} = \dfrac{17}{5}$. No ΔABD: $\cos\theta = 4/5$.

Lei dos Cossenos em ΔDMN: $MN^2 = DM^2 + DN^2 - 2.DM.DN.\cos\theta \Rightarrow$

$MN^2 = \dfrac{289}{25} + 4 - 2.\dfrac{17}{5}.2.\dfrac{4}{5} \Rightarrow MN = \dfrac{3\sqrt{13}}{5}$

11) (OBM-2003) Seja T = (a, b, c) tal que existe um triângulo ABC cujas medidas dos lados sejam BC = a, CA = b e AB = c satisfazendo $c \geq b \geq a > 0$ e $a + b > c$. Definimos $T^2 = (a^2, b^2, c^2)$ e $\sqrt{T} = (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ como sendo, respectivamente, o quadrado e a raiz quadrada do "triângulo" T.

Considere então as afirmativas:

1) O quadrado de um triângulo equilátero é equilátero.

2) O quadrado de um triângulo retângulo não é um triângulo.

3) T^2 é um triângulo se, e somente se, T é acutângulo.

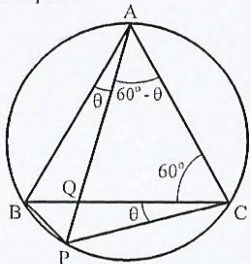
4) $\sqrt{T}$ sempre é um triângulo para todo T.

5) Todos os ângulos de $\sqrt{T}$ são agudos.

O número de afirmativas verdadeiras é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

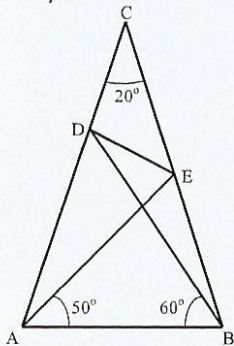
Solução:
Observe que a enunciado informou que o maior lado de T é c, implicando que o maior lado de T^2 é c^2 e o maior lado de $\sqrt{T}$ é $\sqrt{c}$. Assim, as expressões de desigualdades triangulares e lei dos cossenos que ocorram devem ser analisadas somente em função de c, c^2 ou $\sqrt{c}$.
1) Verdadeiro. Se $a = b = c$ então $a^2 = b^2 = c^2$.
2) Verdadeiro. Se $c^2 = b^2 + a^2$ então os valores de a^2, b^2 e c^2 não podem formar um retângulo pois não satisfazem a desigualdade triangular.
3) Verdadeiro. T^2 é triângulo se e somente se $a^2 + b^2 > c^2$, que ocorre se e somente se T é acutângulo.
4) Verdadeiro. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} > a + b > c = (\sqrt{c})^2 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} \Rightarrow \sqrt{T}$ sempre é triângulo.
5) Verdadeiro. $(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = a + b > c = (\sqrt{c})^2 \Rightarrow \sqrt{T}$ é acutângulo.

12) Seja P um ponto sobre a circunferência circunscrita de um triângulo equilátero ABC de lado ℓ. Calcule o valor de $PA^2 + PB^2 + PC^2$.
Solução:

Como PA, PB e PC são cordas de uma mesma circunferência então, pela Lei dos Senos: $\dfrac{PA}{\text{sen}(60^\circ + \theta)} = \dfrac{PB}{\text{sen}\theta} = \dfrac{PC}{\text{sen}(60^\circ - \theta)} \Rightarrow$

$$\frac{PA}{\text{sen}(60^\circ + \theta)} = \frac{PB + PC}{\text{sen}\theta + \text{sen}(60^\circ - \theta)} = \frac{PB + PC}{\text{sen}\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\theta - \frac{1}{2}.\text{sen}\theta} \Rightarrow$$

$$\frac{PA}{\text{sen}(60^\circ + \theta)} = \frac{PB + PC}{\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\theta + \frac{1}{2}.\text{sen}\theta} = \frac{PB + PC}{\text{sen}(60^\circ + \theta)} \Rightarrow PA = PB + PC$$

Perceba agora que $\angle APB = \angle ACB = 60^\circ$ e $\angle APC = \angle ABC = 60^\circ$, ou seja, $\angle BPC = 120^\circ$.
Lei dos Cossenos em ΔBPC: $\ell^2 = PB^2 + PC^2 - 2.PB.PC.\cos(120^\circ) \Rightarrow \ell^2 = PB^2 + PC^2 + PB.PC$
Assim: $PA^2 + PB^2 + PC^2 = (PB + PC)^2 + PB^2 + PC^2 = 2(PB^2 + PC^2 + PB.PC) = 2\ell^2$

13) O triângulo ABC é isósceles com CA = CB e $\hat{C} = 20^\circ$. Sejam os pontos D sobre AC e E sobre BC de modo que $\angle ABD = 60^\circ$ e $\angle BAE = 50^\circ$. Determine o valor de $\angle EDB$.
Solução:

Como ΔABC é isósceles então $\angle BAC = \angle ABC = 80^\circ$.
Assim, temos que: $\angle DBE = 20^\circ$ e $\angle EAD = 30^\circ$.
Como $\angle AEB = 50^\circ$ então ΔAEB é isósceles, ou seja, EB = AB.

Lei dos Senos em ΔAEC: $\dfrac{CA}{CE} = \dfrac{\text{sen}(\angle CEA)}{\text{sen}(\angle CAE)} = \dfrac{\text{sen}130^\circ}{\text{sen}30^\circ} \Rightarrow$

$$\frac{CA}{CE} = \frac{\text{sen}(180^\circ - 50^\circ)}{1/2} \Rightarrow \frac{CA}{CE} = 2.\text{sen}50^\circ = 2.\cos 40^\circ$$

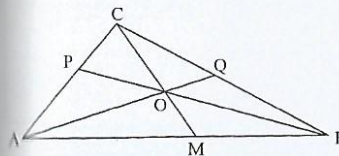
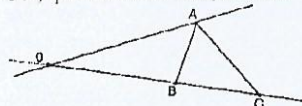
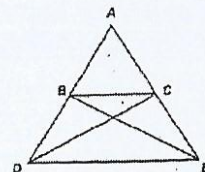
Lei dos Senos em ΔABD: $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{\text{sen}(\angle DAB)}{\text{sen}(\angle ADB)} = \dfrac{\text{sen}80^\circ}{\text{sen}40^\circ} \Rightarrow$

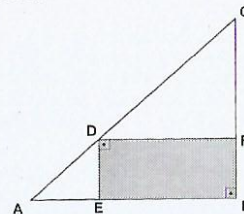
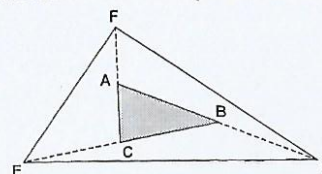
$$\frac{DB}{EB} = \frac{2.\text{sen}40^\circ \cos 40^\circ}{\text{sen}40^\circ} \Rightarrow \frac{DB}{EB} = 2.\cos 40^\circ$$

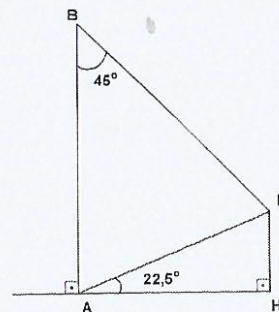
Desde que $\dfrac{CA}{CE} = \dfrac{DB}{EB}$ e $\angle DBE = \angle ACB = 20^\circ$, então ΔAEC ~ ΔDEB $\Rightarrow \angle EDB = \angle EAC = 30^\circ$.

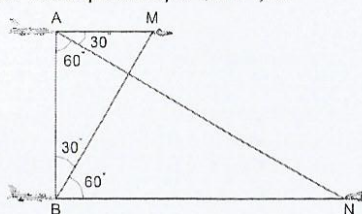
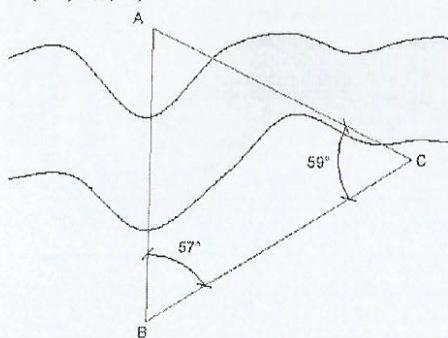
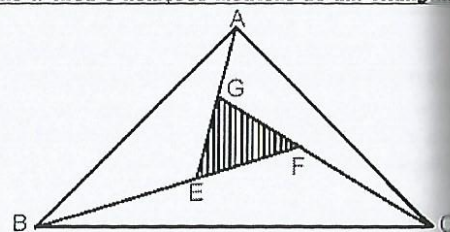
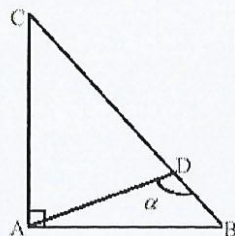
Exercícios

1) (UFMG-97) Nos triângulos ABC e DEF, AB = DE = c, AC = DF = b, $B\hat{A}C = \alpha$, $E\hat{D}F = 2\alpha$, e a área do triângulo ABC é o dobro da área do triângulo DEF. **CALCULE** o valor de cos α.

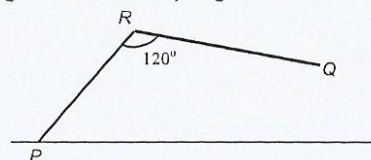
2) (UFC-99) Na figura abaixo, o triângulo ABC é subdividido, em triângulos menores, pelos segmentos de reta $\overline{AQ}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CM}$, sendo O o ponto de encontro destes. Se os triângulos AOM, AOP, BOQ e COQ possuem áreas iguais a 6 cm², 4 cm², 4 cm² e 2 cm², respectivamente, determine a área do triângulo ABC.

3) (Covest-94) Na figura a seguir, o triângulo ABC tem área igual a 18cm². Se $\overline{BC}$ = 6cm e $C\hat{O}A$ = 30°, quando mede $\overline{OA}$, em cm?

4) (Covest-97) Na figura abaixo os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ são paralelos. Analise as proposições a seguir:

I II
0 0 Os triângulos BCD e CBE tem mesma área.
1 1 A razão entre as áreas dos triângulos ADC e ABC é igual a $\overline{AD}/\overline{AB}$.
2 2 Os triângulos ADC e AEB tem mesma área.
3 3 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$
4 4 As áreas dos triângulos BDE e CBE são proporcionais a $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.

5) (Covest-99) Seja **ABC** um triângulo retângulo em **B** com $\overline{AB}$ = **16 cm** e $\overline{BC}$ = **14 cm**. Seja **DEBF** o retângulo inscrito em **ABC** com lados paralelos aos catetos (como ilustrado abaixo) e com maior área possível. Qual o inteiro que melhor aproxima esta área, em **cm²** ?

6) (Covest-99) Dado um triângulo ABC, considere o triângulo DEF onde B é ponto médio de AD, A é ponto médio de CF e C é ponto médio de BE.

Podemos afirmar que:
0-0) ABC é semelhante a DEF.
1-1) Se ABC é retângulo então DEF é retângulo.
2-2) A área de DEF é o quádruplo da de ABC.
3-3) Os baricentros de ABC e DEF coincidem.
4-4) Se ABC é equilátero então DEF é equilátero.

7) (Covest-99) Para calcular a distância de **H** a **M**, um engenheiro determina os ângulos **HAM = 22,5°** e **ABM = 45°**. Sabendo que **AB = 50 m**, qual o inteiro mais próximo da altura **HM** (em metros)?

8) (Covest-2000) Seja **P** um ponto na circunferência inscrita num triângulo equilátero **ABC** de lado **4**. Indique $PA^2 + PB^2 + PC^2$.

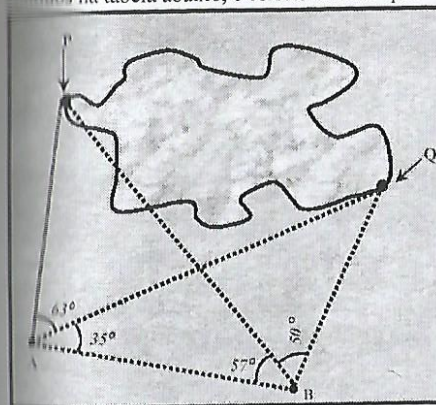
9) (Covest-2002) Duas naves espaciais **A** e **B** situam-se à distância de **30km**. Pretende-se calcular a distância entre dois meteoros **M** e **N** fazendo medidas de ângulos, a partir das naves, como ilustrado na figura abaixo. Encontre a distância, em **km**, entre **M** e **N** e indique o inteiro mais próximo deste valor.
Dado: use a aproximação $\sqrt{21} \cong 4{,}58$.

10) (Covest-2004) Uma ponte deve ser construída sobre um rio, unindo os pontos **A** e **B**, como ilustrado na figura abaixo. Para calcular o comprimento **AB**, escolhe-se um ponto **C**, na mesma margem em que **B** está, e medem-se os ângulos **CBA = 57°** e **ACB = 59°**. Sabendo que **BC** mede **30m**, indique, em **metros**, a distância **AB**. (Dado: use as aproximações $\text{sen}(59°) \cong 0{,}87$ e $\text{sen}(64°) \cong 0{,}90$)

11) (UFOP-2003) Na figura, ABC é um triângulo de lado ℓ, AE = BF = CG = a e $E\hat{A}B = F\hat{B}C = G\hat{C}A = 30°$. Determine a área do triângulo EFG em função de ℓ e a.

12) (UFU-99) Considere o triângulo retângulo abaixo.

Sabendo-se que $\alpha = 120°$, AB = AC = 1 cm, então AD é igual a

a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm d) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm

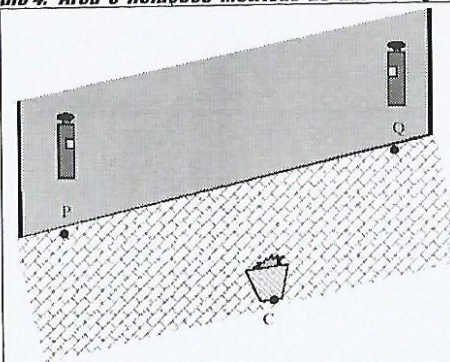
13) (UFV-2003) A figura abaixo ilustra o esquema de um braço articulado de um guindaste, com ângulo $\hat{R}$ de articulação igual a 120°.

Considerando as medidas PR = 3 m e RQ = 4 m, é CORRETO afirmar que a distância *x*, em metros, entre os extremos P e Q do braço satisfaz a condição:

a) $3 \le x \le 6$ b) $4 \le x \le 5$ c) $4 \le x \le 7$
d) $3 \le x \le 5$ e) $4 \le x \le 6$

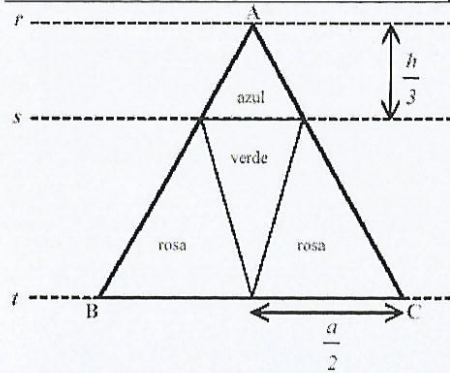
14) (UFMS-2001) Ao se fazer o levantamento topográfico de uma certa região, detectou-se a necessidade do cálculo da distância entre os pontos **P** e **Q**, situados nas margens de um lago existente na região. Para isso, o topógrafo realizou algumas medidas a partir de pontos **A** e **B**, situados no terreno ao redor do lago e obteve os ângulos indicados na figura abaixo. Considerando

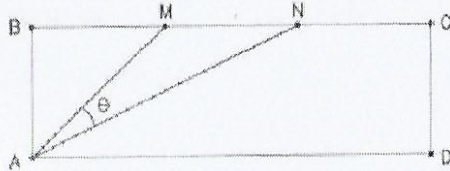
que o terreno ao redor do lago é plano e que a distância entre os pontos **A** e **B** é 50 m, a partir das informações fornecidas pela figura e de dados contidos na tabela abaixo, é correto afirmar que

θ	sen θ	cos θ
10°	0,17	0,98
17°	0,30	0,96
25°	0,42	0,91
35°	0,57	0,82
50°	0,77	0,64
52°	0,78	0,60
57°	0,84	0,54
63°	0,89	0,54

(01) a medida do ângulo $A\hat{Q}B$ é 76°.
(02) a distância entre os pontos **A** e **P** é 20 m.
(03) a distância entre os pontos **A** e **Q** é 80 m.
(04) a distância entre os pontos **P** e **Q** é menor do que 19 m.

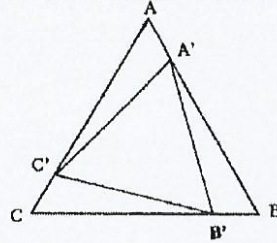
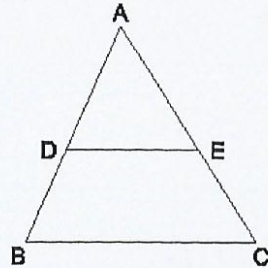
15) (UFMS-2002) De dentro de um cesto de papéis, situado em um dos corredores de um aeroporto, surge um pequeno incêndio. Do local onde se encontra o cesto em chamas, pode-se avistar dois extintores de incêndio, localizados em uma parede do corredor. Supondo que o chão do corredor seja plano, considere que os pontos **P**, **Q** e **C** sejam pontos no chão desse corredor tais que **P** e **Q** estão localizados abaixo dos extintores e **C** sob o cesto, conforme ilustra a figura abaixo.

Ângulo	Seno
38°	0,62
40°	0,64
43°	0,68
48°	0,74
54°	0,81

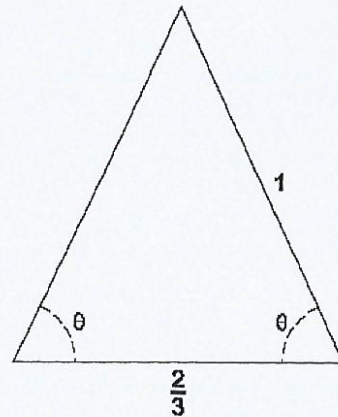
Sabendo-se que o ângulo $Q\hat{P}C$ mede $7\pi/30$ *radianos* e que o ângulo $P\hat{Q}C$ mede 48°, a partir dos dados mostrados na tabela acima, é correto afirmar que
(01) o triângulo de vértices **P**, **Q** e **C** é um triângulo retângulo.
(02) a distância do cesto em chamas ao extintor, localizado acima do ponto **P**, é maior do que a distância do cesto ao extintor localizado acima do ponto **Q**.
(04) sem que se conheça a distância entre os dois extintores, não se pode concluir corretamente qual dos dois extintores está mais próximo do cesto em chamas.
(08) se a distância entre os dois extintores é 100 metros, então a distância do cesto em chamas ao extintor, localizado acima do ponto **Q**, é maior do que 80 metros.

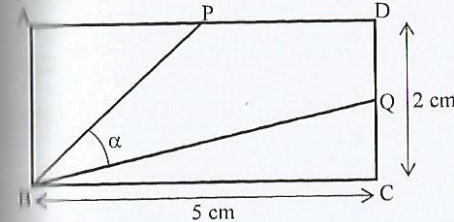
16) (UFMS-2002) Queremos pintar uma placa na forma de um triângulo isósceles de altura *h* e base *a*, usando três cores: azul, verde e rosa. Considerando que a pintura foi feita de acordo com os dados fornecidos pela figura abaixo, onde a placa está representada pelo triângulo **ABC** e as retas *r*, *s* e *t* são coplanares e paralelas, é correto afirmar que

a) a área pintada de rosa corresponde a 80% da área total da placa.
b) a área pintada de azul corresponde a 1/8 da área total da placa.
c) a área pintada de verde corresponde a 30% da área total da placa.
d) a área pintada de rosa corresponde a 2/3 da área total da placa.
e) a área da placa pintada de verde é igual à metade da área da placa pintada de rosa.

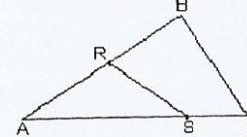
17) (UFMS-2003) A figura abaixo mostra um retângulo ABCD onde AB = BM = MN = NC. Calcule 6.tg θ + 51.

18) (UFPB-80) Em um triângulo ABC, a = 4, $b = 3\sqrt{2}$ e $\hat{C} = 45^o$. Então, o lado c é igual a:
a) $2\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{10}$ c) $\sqrt{10}$ d) $2\sqrt{4}$ e) $\sqrt{13}$

19) (UFPB-85) Em um triângulo acutângulo ABC, é FALSA a relação:
a) a = b.cos C + c,cos B
b) b = a.cos C + c.cos A
c) c = a.cos B = b.cos A
d) $a^2 = b^2 + c^2 + 2.b.c.\cos A$
e) $\text{senB} = \dfrac{\text{b.senA}}{\text{a}}$

20) (UFPB-86) O lado a do triângulo equilátero ABC mede $15\sqrt{13}$ m. Determinar o comprimento, em metros, do lado do triângulo A'B'C', sabendo que os pontos A', B' e C' distam de A, B e C, respectivamente, 1/5 do comprimento de a.

21) (Mackenzie-2001) O triângulo ABC da figura foi dividido em duas partes de mesma área pelo segmento DE, que é paralelo a BC. A razão BC/DE vale:

a) 2 b) 3/2 c) 5/2 d) $\sqrt{2}$ e) $3\sqrt{2}/2$

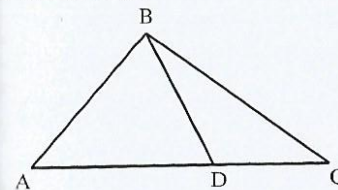
22) (Mackenzie-2003) No triângulo da figura, cos 2θ vale:

a) 2/9 b) 1/9 c) – 7/9 d) – 8/9 e) 5/9

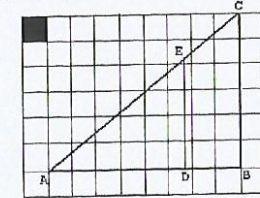
23) (UFF-98) No retângulo ABCD, representado abaixo, P e Q são os pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$, respectivamente.

Calcule o valor de tg α.

24) (UFRJ-98) Na figura abaixo, R é um ponto pertencente ao lado AB e S um ponto pertencente ao lado AC. Sejam b a medida de AC, c a medida de AB, p a medida de AR e q a medida de AS.

Mostre que a razão entre as áreas dos triângulos ARS e ABC vale pq/bc.

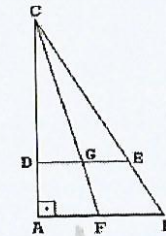
25) (Fuvest-89) Qual é a área de um triângulo de lados 5, 6 e 7?
a) 15 b) 21 c) $7\sqrt{5}$ d) $\sqrt{210}$ e) $6\sqrt{6}$

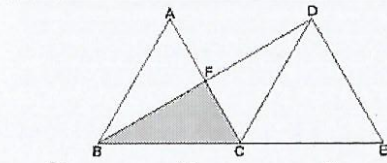
26) (Fuvest-90) Um triângulo T tem lados iguais a 4, 5 e 6. O coseno do maior ângulo de T é:
a) 5/6 b) 4/5 c) 3/4 d) 2/3 e) 1/8

27) (Fuvest-97) Na figura abaixo, **AD = 2 cm, AB = $\sqrt{3}$ cm**, a medida do ângulo **B$\hat{A}$C** é **30°** e **BD = DC**, onde **D** é ponto do lado $\overline{AC}$. A medida do lado $\overline{BC}$, em **cm**, é:

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6}$ e) $\sqrt{7}$

28) (Fuvest-97) No papel quadriculado da figura abaixo, adota-se como unidade de comprimento o lado do quadrado hachurado. $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Para que a área do triângulo **ADE** seja a metade da área do triângulo **ABC**, a medida de $\overline{AD}$, na unidade adotada, é:

a) $4\sqrt{2}$ b) 4 c) $3\sqrt{3}$ d) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

29) (Fuvest-97) Considere um triângulo ABC tal que a altura $\overline{BH}$ seja interna ao triângulo e os ângulos B$\hat{A}$H e H$\hat{B}$C sejam congruentes.
a) Determine a medida do ângulo A$\hat{B}$C.
b) Calcule a medida de $\overline{AC}$, sabendo que AB = 4 cm e a razão entre as áreas dos triângulos ABH e BCH é igual a 2.

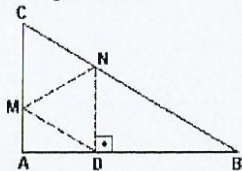
30) (Fuvest-2000) Na figura, **ABC** é um triângulo retângulo de catetos **AB = 4** e **AC = 5**. O segmento $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{AB}$, **F** é um ponto de $\overline{AB}$ e o segmento $\overline{CF}$ intercepta $\overline{DE}$ no ponto **G**, com **CG = 4** e **GF = 2**. Assim, a área do triângulo **CDE** é:

a) $\dfrac{16}{3}$ b) $\dfrac{32}{6}$ c) $\dfrac{39}{8}$ d) $\dfrac{40}{9}$ e) $\dfrac{70}{9}$

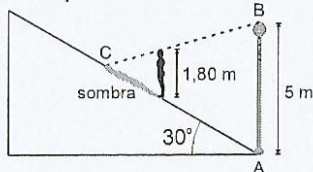
31) (Fuvest-2002) Na figura abaixo, os triângulos **ABC** e **DCE** são equiláteros de lado ℓ, com **B, C** e **E** colineares. Seja **F** a intersecção de $\overline{BD}$ com $\overline{AC}$. Então, a área do triângulo **BCF** é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{8}\ell^2$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}\ell^2$ e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\ell^2$

b) $\frac{\sqrt{3}}{6}\ell^2$ d) $\frac{5\sqrt{3}}{6}\ell^2$

32) (Fuvest-2002) O triângulo retângulo **ABC**, cujos catetos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ medem **1** e $\sqrt{3}$, respectivamente, é dobrado de tal forma que o vértice **C** coincida com o ponto **D** do lado $\overline{AB}$. Seja $\overline{MN}$ o segmento ao longo do qual ocorreu a dobra. Sabendo que $N\hat{D}B$ é reto, determine.

a) o comprimento dos segmentos $\overline{CN}$ e $\overline{CM}$;

b) a área do triângulo **CMN**.

33) (UNICAMP-92) Calcule a área de um triângulo em função de um lado l e dos dois ângulos α e β a ele adjacentes.

34) (Unicamp-2002) Um homem, de 1,80m de altura, sobe uma ladeira com inclinação de 30°, conforme mostra a figura. No ponto A está um poste vertical de 5 metros de altura, com uma lâmpada no ponto B. Pede-se para:

a) Calcular o comprimento da sombra do homem depois que ele subiu 4 metros ladeira acima.

b) Calcular a área do triângulo ABC.

35) (Colégio Naval-79/80) O ângulo interno de **150°** de um triângulo é formado por lados que medem **10 cm** e **6 cm**. A área desse triângulo é:

a) 30 cm^2 c) $12\sqrt{3}$ cm^2 e) 15 cm^2

b) $30\sqrt{3}$ cm^2 d) $15\sqrt{3}$ cm^2

36) (Colégio Naval-79/80) O triângulo **ABC** tem **60 cm²** de área. Dividindo-se o lado $\overline{BC}$ em **3 partes** proporcionais aos números; **2**, **3** e **7** e tomando-se esses segmentos para bases de **3** triângulos que têm para vértice o ponto **A**, a área do maior dos **3** triângulos é:

a) 30 cm^2 c) 35 cm^2 e) 28 cm^2

b) 21 cm^2 d) 42 cm^2

37) (Colégio Naval-79/80) O triângulo **ABC** é retângulo em **A**. A hipotenusa $\overline{BC}$ mede **6 cm** e o ângulo em **C** é de **30°**. Tomando-se sobre $\overline{AB}$ o ponto **M** e sobre $\overline{BC}$ o ponto **P**, de maneira que $\overline{PM}$ seja perpendicular a $\overline{BC}$ e as áreas dos triângulos **CAM** e **PMB** sejam iguais, a distância **BM** será:

a) 4 cm c) $6\left(\sqrt{2}+1\right)$ cm

b) $6\left(\sqrt{3}-2\right)$ cm d) $6\left(\sqrt{2}-1\right)$ cm

c) $6\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ cm

38) (Colégio Naval-81/82) Um triângulo de 30 cm de altura é dividido por duas paralelas perpendiculares a essa altura, em três partes equivalentes. O maior dos segmentos em que ficou dividida essa altura por essas paralelas é:

a) $5\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{3}$ c) $10\sqrt{3}$ d) $15\sqrt{3}$ e) $20\sqrt{3}$

39) (Colégio Naval-81/82) Em um triângulo ABC, o ângulo $\hat{A}$ é o dobro do ângulo $\hat{B}$, $\overline{AB}$ = 9 cm e $\overline{AC}$ = 4 cm, O lado $\overline{BC}$ mede:

a) $9\sqrt{13}$ *cm* b) $3\sqrt{13}$ *cm* c) $4\sqrt{13}$ *cm*

d) $6\sqrt{13}$ *cm* e) $2\sqrt{13}$ *cm*

40) (Colégio Naval-82/84) Dois lados de um triângulo são iguais a 4 cm e 6 cm. O terceiro lado é um número inteiro expresso por $x^2 + 1$. O seu perímetro é:

a) 13 cm b) 14 cm c) 15 cm

d) 16 cm e) 20 cm

41) (Colégio Naval-86/87) Num triângulo retângulo, se diminuirmos cada um dos catetos de **4 cm**, a área diminuirá de **506 cm²**. A soma dos catetos em **cm**, vale:

a) 182 b) 248 c) 250 d) 257 e) 260

42) (Colégio Naval-85/86) O vértice E de um triângulo equilátero ABE está no interior de um quadrado ABCD, e F é o ponto de interseção da diagonal $\overline{BD}$ e o lado $\overline{AE}$. Se a medida de $\overline{AB}$ é igual a $\sqrt{1+\sqrt{3}}$, então a área do triângulo BEF é:

a) $\sqrt{3}-\frac{3}{4}$ b) $1-\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

d) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ e) $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$

43) (Colégio Naval-88/89) Sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC tomam-se os pontos D e E, respectivamente, de modo que os triângulos ABC e ADE sejam semelhantes.

Considere as 4 afirmações abaixo:

(I) $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$

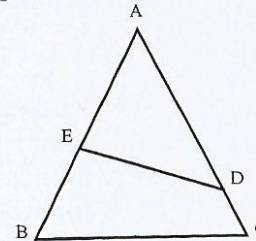
(II) $\hat{B}=\hat{D}$ e $\hat{E}=\hat{C}$

(III) $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$

(IV) Se a razão entre as áreas dos triângulos ABC e ADE é 16, então a razão de semelhança é 4.

Pode-se concluir que o número de afirmações corretas é

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

44) (Colégio Naval-92/93)

O triângulo **ADE** da figura é equivalente ao quadrilátero **BCDE**. Se $\overline{AE}=\frac{2}{3}$ de $\overline{AB}$, então $\overline{AD}$ é qual fração de $\overline{AC}$?

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{5}$ 6) $\frac{5}{8}$

45) (Colégio Naval-94/95) Um triângulo de vértice A, B e C, retângulo em A, os catetos AB e AC medem respectivamente $6\sqrt{3}$ cm e 6 cm. Traça-se o segmento AM, M pertencente e interno ao segmento BC. Sabendo-se que o ângulo $M\hat{A}C$ mede 15°, a razão entre as áreas dos triângulo AMC e ABC é:

a) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

c) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

e) impossível de se determinar com apenas esses dados.

46) (Colégio Naval-95/96) Sejam os triângulos ABC e NPQ, tais que:

I) $M\hat{P}Q = A\hat{C}B = 90°$

II) $P\hat{Q}M = 70°$

III) $B\hat{A}C = 50°$

IV) $\overline{AC} = \overline{MP}$

Se $\overline{PQ}$ = x e $\overline{BC}$ = y, então $\overline{AB}$ é igual a:

a) x + y b) $\sqrt{x^2+y^2}$ c) $\frac{2xy}{(x+y)^2}$

d) $\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}$ e) 2x + y

47) (Colégio Naval-97/98) Considere o quadrado $ABCD$ e o triângulo equilátero ABP, sendo P interior ao quadrado. Nestas condições o triângulo cobre cerca de quantos por cento da área do quadrado?

a) 40 b) 43 c) 45 d) 50 e) 53

48) (Colégio Naval-2004/2005) Considere o triângulo escaleno ABC e os pontos P e Q pertencentes ao plano de ABC e Exteriores a esse triângulo. Se: as medidas dos ângulos PAC e QBC são iguais; as medidas dos ângulos PCA e QCB são iguais; M é o ponto médio de AC; N é o ponto médio de BC; S_1 é a área do triangulo PAM; S_2 é a área do triângulo QBN; S_3 é a área do triângulo PMC; e S_4 é a área do triangulo QNC, analise as afirmativas:

I – S_1 está para S_4, assim como S_3 está para S_2.

II – S_1 está para S_2, assim como $(PM)^2$ está para $(QN)^2$.

III - S_1 está para S_3, assim como S_2 está para S_4.

Logo pode-se concluir, corretamente, que

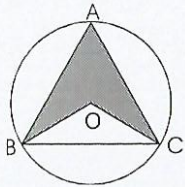
a) apenas a afirmativa I é verdadeira.

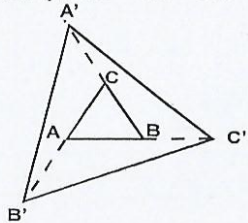
b) apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

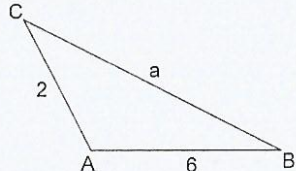
c) apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

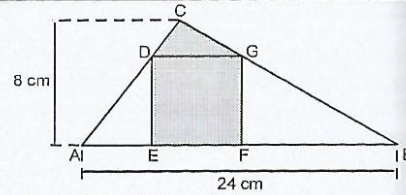
d) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.

e) as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

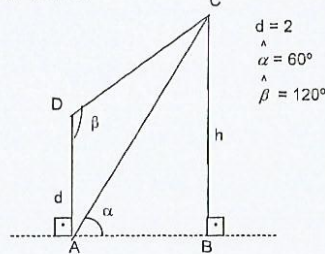
49) (Epcar-98) O triângulo ABC é equilátero e está inscrito em uma circunferência de centro O cujo raio mede 2 cm, como mostra a figura abaixo. A área da parte hachurada da figura é igual a

a) $\sqrt{2}$ cm^2 b) $2\sqrt{3}$ cm^2
c) $5\sqrt{3}$ cm^2 d) $7\sqrt{2}$ cm^2

50) (Epcar-99) É dado o triângulo ABC, onde AB = BC = CA = a. Prolongam-se os lados AB, BC e CA, de modo que BC' = CA' = AB' = a.

Então a área do triângulo A'B'C' é:
a) $a^2\sqrt{3}$ b) $\frac{7}{4}a^2\sqrt{3}$ c) $\frac{8}{5}a^2\sqrt{3}$ d) $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$

51) (Epcar-2001) Dado o triângulo ABC, obtusângulo em A conforme a figura abaixo e sabendo que a medida "a" do lado BC é um número inteiro, então, o conjunto solução dos possíveis valores de "a" é

a) {8} b) {5,6,7} c) {7} d) {5,6,7,8}

52) (Epcar-2001) Sendo DEFG um quadrado inscrito no triângulo ABC, conforme se apresenta na figura abaixo, pode-se afirmar que a área do pentágono CDEFG, em cm^2, mede

a) 24 b) 36 c) 38 d) 42

53) (Epcar-2001) Dois pontos A e B estão situados numa mesma margem de um rio e distantes 100 m um do outro. Um ponto C, situa-se na outra margem, de tal modo que os ângulos CÂB e AĈB medem 75° cada um. A largura desse rio, em m, é
a) $50\sqrt{3}$ b) 50 c) $100\sqrt{3}$ d) 100

54) (EsPCEx-93) De posse das medidas apresentadas na figura abaixo, pode-se concluir que o valor de **h** é:
a) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{3}$
d) 3

55) (AFA-99) Seja um triângulo com dois de seus lados medindo 2 m e 5 m e área igual a 3 m^2. Se o ângulo entre esses dois lados do triângulo triplicar, a área do mesmo será aumentada, em quantos m^2?
a) $\frac{36}{25}$ b) $\frac{42}{25}$ c) $\frac{12}{5}$ d) $\frac{14}{5}$

56) (Escola Naval-89) Considere o problema de determinar o triângulo ABC, conhecidos C = 60°, AB = x e BC = 6. Podemos afirmar que:
a) sempre admite solução, se x > 0
b) admite duas soluções, se x > 3
c) admite duas soluções, se x = 3
d) admite duas soluções, se $3\sqrt{3} < x < 6$
e) não admite solução, se x > 6

57) (ITA-68) Existe o triângulo **ABC** tal que **a = 10 cm, b = 4 cm, β = 30°**, onde β é o ângulo oposto ao lado **b**? Em caso afirmativo, o lado **c** vale:
a) 8 cm. c) 9 cm. e) Não existe tal triângulo.

b) 7 cm. d) 11 cm.

58) (ITA-81) Os lados de um triângulo medem a, b e c centímetros. Qual o valor do ângulo interno deste triângulo, oposto ao lado que mede a centímetros, se forem satisfeitas as relações 3a = 7c e 3b = 8c.
a) 30° b) 60° c) 45° d) 120° e) 135°

59) (ITA-82) Num triângulo de lados a = 3 m e b = 4 m, diminuindo-se de 60° o ângulo que esses lados formam, obtém-se uma diminuição de 3 m^2 em sua área. Portanto a área do triângulo inicial é de:
a) 4 m^2 b) 5 m^2 c) 6 m^2 d) 9 m^2 e) 12 m^2

60) (ITA-82) Num triângulo isósceles, o perímetro mede 64 m e os ângulos adjacentes são iguais ao arc cos 7/25. Então a área do triângulo é de:
a) 168 m^2 b) 192 m^2 c) 84 m^2
d) 96 m^2 e) 157 m^2

61) (ITA-85) Num triângulo *ABC* considere conhecidos os ângulos BÂC e CB̂A e a medida d do lado A. Nestas condições, a área S deste triângulo é dada pela relação:

a) $S = \dfrac{d^2}{2.\text{sen}(B\hat{A}C + C\hat{B}A)}$

b) $S = \dfrac{d^2(\text{sen}B\hat{A}C)(\text{sen}C\hat{B}A)}{2.\text{sen}(B\hat{A}C + C\hat{B}A)}$

c) $S = \dfrac{d^2.\text{sen}C\hat{B}A}{2.\text{sen}(B\hat{A}C + C\hat{B}A)}$

d) $S = \dfrac{d^2.\text{sen}B\hat{A}C}{2.\cos(B\hat{A}C + C\hat{B}A)}$

e) $S = \dfrac{d^2(\text{sen}B\hat{A}C)(\text{sen}C\hat{B}A)}{2.\cos(B\hat{A}C + C\hat{B}A)}$

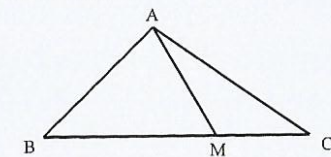
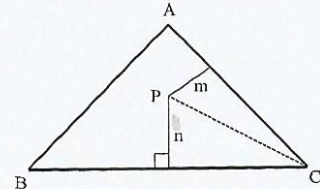
62) (ITA-93) Num triângulo ABC, retângulo em A, seja D a projeção de A sobre BC. Sabendo-se que o segmento BC mede ℓ cm e que o ângulo DÂC mede θ graus, então a área do triângulo ABC vale:
a) $(\ell^2/2)\sec\theta\,\text{tg}\,\theta$ b) $(\ell^2/2)\sec^2\theta\,\text{tg}\,\theta$
c) $(\ell^2/2)\sec\theta\,\text{tg}^2\theta$ d) $(\ell^2/2)\text{cossec}\,\theta\,\text{tg}\,\theta$
e) $(\ell^2/2)\text{cossec}^2\theta\,\text{cotg}\,\theta$

63) (ITA-2000) Num triângulo acutângulo *ABC*, o lado oposto ao ângulo $\hat{A}$ mede $5cm$. Sabendo:

$\hat{A} = \arccos\frac{3}{5}$ e $\hat{C} = \text{arcsen}\frac{2}{\sqrt{5}}$,

então a área do triângulo ABC é igual a :
a) $\frac{5}{2}cm^2$ b) $12cm^2$ c) $15cm^2$
d) $2\sqrt{5}\,cm^2$ e) $\frac{25}{2}cm^2$

64) (ITA-2003) Sejam *r* e *s* duas retas paralelas distando entre si 5 cm. Seja P um ponto na região interior a estas retas, distando 4 cm de *r*. A área do triângulo equilátero *PQR*, cujos vértices *Q* e *R* estão, respectivamente, sobre as retas *r* e *s*, é igual, em cm^2, a:
a) $3\sqrt{15}$ b) $7\sqrt{3}$ c) $5\sqrt{6}$ d) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ e) $\frac{7}{2}\sqrt{15}$

65) (IME-65) AB = AC ≠ BC. Expressar a diferença AB^2 – AM^2 em função dos segmentos aditivos da base.

66) (IME-67) No triângulo abaixo, as distâncias do ponto P aos lados AC e BC são respectivamente m e n. Verificar, justificando, se CP^2 = (m^2 + n^2 + 2mncos C)cosec^2 C

67) (IME-69) Em um triângulo são dados dois lados *a* e *b*. Determinar a expressão do lado *c* em função de *a* e *b*, para que a área do triângulo seja máxima.

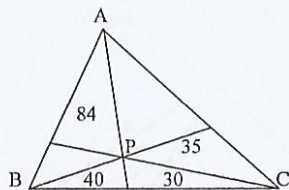
68) (IME-86/87) Dado um triângulo ABC de lados *a*, *b*, *c* opostos aos ângulos *A*, *B*, *C*

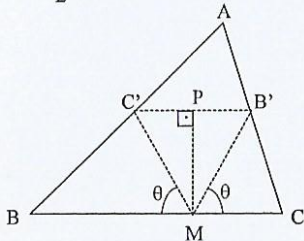
respectivamente e de perímetro $2p$, mostre que

$$a = \frac{p\,\text{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

69) (IME-87/88) Calcule o lado c de um triângulo ABC, em função de sua área S, do ângulo C e de K, onde $K = a + b - c$.

70) (IME-89/90) Os lados de um triângulo estão em progressão aritmética e o lado intermediário mede l. Sabendo que o maior ângulo excede o menor em 90°, calcule a razão da PA formada pelos lados.

71) (IME-89/90) Seja P um ponto no interior de um triângulo ABC, dividindo-o em seis triângulos, quatro dos quais têm áreas 40, 30, 35 e 84, como mostra a figura. Calcule a área do triângulo ABC.

72) (IME-94/95) Seja ABC um triângulo qualquer. Por B' e C' pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, traçam-se duas retas que se cortam em um ponto M, situado sobre o lado BC, e que fazem com esse lado ângulos iguais θ conforme a figura abaixo. Demonstre que:

$$\text{cotg}\,\theta = \frac{1}{2}(\text{cotg}\,B + \text{cotg}\,C)$$

73) (Provão-2000) Considere o problema a seguir: "Em um triângulo ABC, temos AC = 3m, BC = 4m e B = 60°. Calcule sen A." Esse problema:

a) não faz sentido, porque tal triângulo não existe.
b) admite mais de uma solução.
c) admite uma única solução, $\sqrt{3}/2$.
d) admite uma única solução, $\sqrt{3}/3$.
e) admite uma única solução, $2\sqrt{3}/3$.

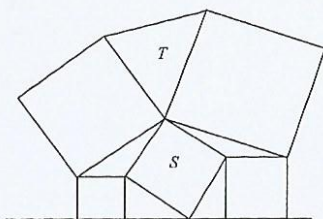
74) (Provão-2001) Existem dois triângulos não congruentes, com $\hat{A}$ = 30°, AB = 4 cm e BC = x cm, quando:

a) $0 < x \le 2$ b) $2 < x < 4$ c) $2 < x \le 4$
d) $x > 4$ e) $x \ge 4$

75) (Fatec-2004) No triângulo ABC tem-se que $B\hat{A}C$ mede 80°, $A\hat{B}C$ mede 40° e BC = 4 cm. Se sen 20° = k, então a medida de AC, em centímetros, é dada por:

a) 2 b) $\frac{4}{k}$ b) $\frac{2}{1-2k^2}$
d) $\frac{2\sqrt{1-2k^2}}{1-2k^2}$ e) $\frac{2(1-k)}{1-2k}$

76) Calcular a área do triângulo equilátero inscrito em um quadrado de 5 dm de lado, devendo um dos vértices do triângulo coincidir com um vértice do quadrado.

77) Cinco quadrados são dispostos conforme ilustra o diagrama abaixo. Mostre que a medida da área do quadrado S é igual a medida da área do triângulo T.

78) Considere um triângulo ABC onde AC = b e BC = a. Marcam-se sobre o lado AB os pontos D e E de modo que os segmentos CD e CE dividem o ângulo C em três partes iguais. Sabendo que CE/CD = m/n, calcule os valores de CD e CE em função de a, b,m e n.

79) São dados os lados b e c de um triângulo. Determine o terceiro lado x sabendo que é igual a altura relativa a ele. Sobre que condições o problema admite solução?

80) Em um triângulo acutângulo ABC são traçadas as alturas AA_1, BB_1 e CC_1. Determine a razão entre as áreas dos triângulos $A_1B_1C_1$ e ABC em função dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo ABC.

81) São dadas duas retas paralelas e um ponto A entre elas, sendo que as distâncias de A às retas valem a e b. Determine os catetos de um triângulo retângulo em A sabendo que os outros vértices pertencem às retas paralelas e que a área do triângulo é igual a k^2.

82) Em um triângulo isósceles de base a e lados congruentes iguais a b, o ângulo oposto à base vale 20°. Demonstre que $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

83) Prove que se os lados a, b e c de um triângulo ABC satisfazem a relação $a^2 = b^2 + bc$, então temos que $\angle A = 2\angle B$.

84) Em um triângulo ABC, o ponto E pertence a $\overline{AB}$ de modo que $2\overline{AE} = \overline{EB}$. Determine $\overline{CE}$ se $\overline{AC} = 4$, $\overline{CB} = 5$ e $\overline{AB} = 6$.

85) Um triângulo possui lados 13, 14 e 15. Uma perpendicular ao lado de comprimento 14 divide o interior do triângulo em duas regiões de mesma área. Determine o comprimento do segmento perpendicular que pertence ao interior do triângulo.

86) Dado um triângulo ABC com AB = 20, AC = 45/2 e BC = 27. Os pontos X e Y são dados sobre AB e AC, respectivamente, de modo que AX = AY. Se a área de ΔAXY é metade da área de ΔABC, determine AX.

87) Em um triângulo cujos lados medem 5 cm, 6 cm e 7 cm, um ponto do interior do triângulo está distante 2 cm do lado de comprimento 5 cm e está distante 3 cm do lado de comprimento 6 cm. Qual a distância do ponto P ao lado de comprimento 7 cm?

88) Os lados de um triângulo medem 7 m, 15 m e 20 m. Calcular a projeção do menor lado sobre o maior.

89) Dois lados de um triângulo são AB = 7 cm e AC = 8 cm. Calcular o lado BC sabendo que a projeção de AC sobre AB mede 15 cm.

90) Num triângulo ABC, o lado a = 6 e $c^2 - b^2$ = 66. Calcular as projeções dos lados b e c sobre o lado a.

91) Os lados de um triângulo são AB = 6, AC = 8 e BC = 10. Sobre o lado BC toma-se um ponto D tal que a ceviana AD = 5. Calcular BD.

92) Calcular o lado de um triângulo eqüilátero cujos vértices estão situados respectivamente sobre três retas paralelas coplanares, sabendo que a e b são as distâncias da paralela intermediária às outras duas.

93) Conhecendo as medidas a, b, c dos lados de um triângulo ABC, calcular os lados do triângulo cujos vértices são os pés das alturas desse triângulo ABC.

94) ABC é um triângulo obtusângulo no qual o ângulo $\hat{A}$ = 120°. Demonstrar que subsiste entre os lados desse triângulo a relação $b(a^2 - b^2) = c(a^2 - c^2)$.

95) Os catetos de um triângulo retângulo são AB = 4 cm e AC = 3 cm. Constrói-se sobre AB como base a do mesmo lado que C o triângulo isósceles ABD equivalente a ABC. Calcular a área da superfície comum a esses dois triângulos.

96) ABD e ACE são triângulos eqüiláteros construídos externamente sobre os catetos de um triângulo retângulo ABC no qual a hipotenusa BC = 8 cm e o ângulo $\hat{B}$ = 60°. Calcular as áreas dos triângulos ACD e ABE.

97) Os três lados e a área de um triângulo retângulo exprimem-se em metros e metros quadrados, respectivamente, por quatro números inteiros e consecutivos. Achar os lados e a área desse triângulo.

98) Sobre os lados de um triângulo eqüilátero cujo lado é a constroem-se externamente quadrados. Calcular a área do triângulo cujos vértices são os centros desses quadrados.

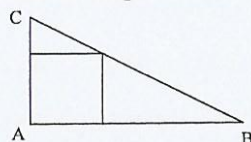
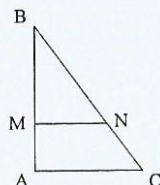
99) Calcular a área de um triângulo retângulo conhecendo-se o seu perímetro 2p e a altura h relativa à hipotenusa.

100) Três circunferências de raios a, b e c são tangentes entre si duas a duas externamente. Calcular a área do triângulo cujos vértices são os centros das circunferências.

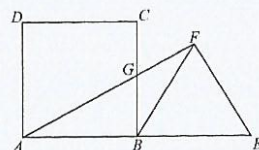
101) Demonstrar que a área S de um triângulo ABC, cujas alturas são h_a, h_b e h_c é:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{h_a^2 h_b^2}+\frac{1}{h_a^2 h_c^2}+\frac{1}{h_b^2 h_c^2}\right)-\left(\frac{1}{h_a^4}+\frac{1}{h_b^4}+\frac{1}{h_c^4}\right)}}$$

102) a) Em um triângulo ABC, $\angle A = 30°$ e $\angle B = 45°$. Determine k de modo que $c^2 = ka^2 + b^2$.
b) Em um triângulo ABC qualquer, determine k tal que $c^2 = ka^2 + b^2$.

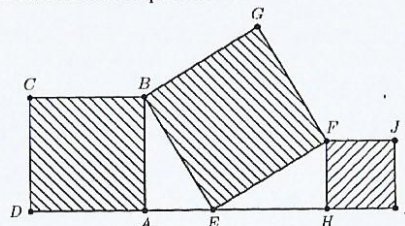
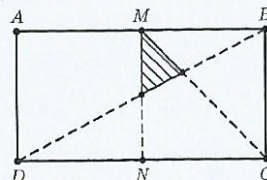
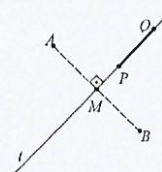
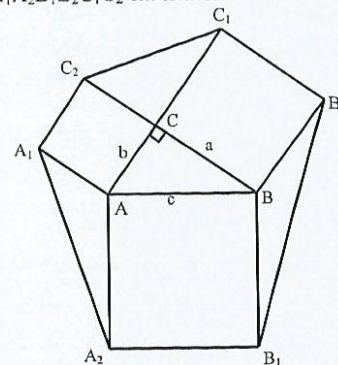
103) (OBM-97) No triângulo retângulo ABC da figura abaixo está inscrito um quadrado. Se AB = 20 e AC = 5, que porcentagem a área do quadrado representa da área do triângulo ABC?
a) 25%
b) 30%
c) 32%
d) 36%
e) 40%

104) (OBM-99) Dois irmãos herdaram o terreno *ABC* com a forma de um triângulo retângulo em *A*, e com o cateto *AB* de 84m de comprimento. Eles resolveram dividir o terreno em duas partes de mesma área, por um muro *MN* paralelo a *AC* como mostra a figura abaixo. Assinale a opção que contém o valor mais aproximado do segmento *BM*.

a) 55m b) 57m c) 59m d) 61m e) 63m

105) (OBM-2001) No triângulo *ABC*, *AB* = 5 e *BC* = 6. Qual é a área do triângulo *ABC*, sabendo que o ângulo $\hat{C}$ tem a maior medida possível?
a) 15 b) $5\sqrt{7}$ c) $7\sqrt{7}/2$ d) $3\sqrt{11}$ e) $5\sqrt{11}/2$

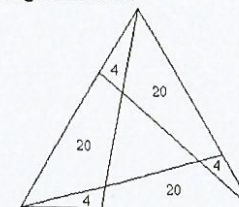
106) (OBM-2003) A figura a seguir mostra um quadrado *ABCD* e um triângulo eqüilátero *BEF*, ambos com lado de medida 1cm. Os pontos *A*, *B* e *E* são colineares, assim como os pontos *A*, *G* e *F*.

A área do triângulo *BFG* é, em cm^2:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ e) $\frac{3}{10}$

107) (OBM-2003) No triângulo *ABC*, *AB* = 20, *AC* = 21 e *BC* = 29. Os pontos *D* e *E* sobre o lado *BC* são tais que *BD* = 8 e *EC* = 9. A medida do ângulo $D\hat{A}E$, em graus, é igual a:
a) 30 b) 40 c) 45 d) 60 e) 75

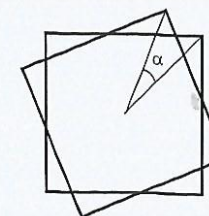
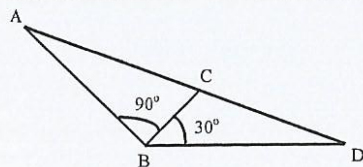
108) (OBM-2003) No desenho ao lado, o quadrado *ABCD* tem área de 64 cm^2 e o quadrado *FHIJ* tem área de 36 cm^2. Os vértices *A*, *D*, *E*, *H* e *I* dos três quadrados pertencem a uma mesma reta. Calcule a área do quadrado *BEFG*.

109) (OBM-2003) Uma folha retangular *ABCD* de área 1000 cm^2 foi dobrada ao meio e em seguida desdobrada (segmento *MN*); foi dobrada e desdobrada novamente (segmento *MC*) e finalmente, dobrada e desdobrada segundo a diagonal *BD*. Calcule a área do pedaço de papel limitado pelos três vincos (região escura no desenho).

110) (OBM-2002) No desenho ao lado, a reta *t* é perpendicular ao segmento *AB* e passa pelo seu ponto médio *M*. Dizemos que *A* é o simétrico de *B* em relação à reta *t* (ou em relação ao segmento *PQ*). Seja *XYZ* um triângulo retângulo de área $1m^2$. Considere o triângulo *X'Y'Z'* tal que *X'* é o simétrico de *X* em relação ao lado *YZ*, *Y'* é o simétrico de *Y* em relação ao lado *XZ* e *Z'* é o simétrico de *Z* em relação ao lado *XY*. Calcule a área do triângulo *X'Y'Z'*.

111) (Pará-2001) Um triângulo retângulo ABC com lados a, b, c ($c^2 = a^2 + b^2$) determina um hexágono cujos vértices são os vértices externos dos quadrados construídos sobre os lados AB, BC e CA. Determine a área deste hexágono $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ em termos de a e b.

112) (Seletiva Brasileira-Cone Sul-2003) No triângulo **ABC** o ângulo $\hat{C}$ mede **120°** e o lado **AC** é maior que o lado **BC**. Sabendo que a área do triângulo eqüilátero de lado **AB** é **31** e a área do triângulo eqüilátero de lado **AC** – **BC** é **19**, calcule a área do triângulo **ABC**.

113) (Argentina-95) Seja *ABC* um triângulo escaleno de área 7. Seja A_1 um ponto do lado *BC* e sejam B_1 e C_1 nas retas *AC* e *AB* respectivamente, tais que AA_1, BB_1 e CC_1 são paralelas. Achar a área do triângulo $A_1B_1C_1$.

114) (Argentina-97) Na figura está ilustrado um triângulo equilátero dividido por três retas em sete regiões. Em seis das regiões está indicada a área correspondente. Achar a área da sétima região, ou seja, do triângulo central.

115) (Argentina-98) O triângulo ABC tem $\angle C = 90°$, AC = 20, AB = 101. Seja D o ponto médio de CB. Determinar a área do triângulo ADB.

116) (Argentina-98) No triângulo isósceles ABC (com AB = AC), sejam P e Q em AB e AC, respectivamente, tais que PQ é paralelo a BC. A altura desde A intersecta PQ em O e BC em M. Se AP = 64 e $\frac{\text{área(BPOM)}}{\text{área(ABC)}} = \frac{9}{50}$, achar AB.

117) (Suécia-64) Determine o valor dos lados de um triângulo ABC com área S e $\angle BAC = x$, de modo que o lado BC seja o menor possível.

118) (Espanha-98) Um quadrado ABCD de centro O e lado 1, gira um ângulo α em torno de O. Determinar a área comum a ambos quadrados.

119) (Canadá-86) Na figura, os segmentos de reta AB e CD possuem comprimento 1, enquanto que os ângulos ABC e CBD são 90° e 30° respectivamente. Calcule o comprimento do segmento de reta AC.

120) (Bélgica-96) Um triângulo abc com |ac| = B, |ab| = C e |bc| = A satisfaz $\frac{1}{A+B}+\frac{1}{B+C}=\frac{3}{A+B+C}$. O ângulo b mede:
a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) nda

121) (África do Sul-94) ABC é um triângulo equilátero e P é um ponto no seu interior de modo que as distâncias de P aos lados do triângulo são 6, 8 e 10. Determine a área de ABC.

122) (Vietnã-63) O triângulo ABC possui perímetro p. Determine o comprimento do lado AB e da área A em termos do ângulo A, ângulo B e p.

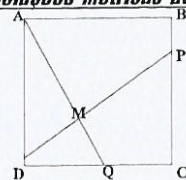
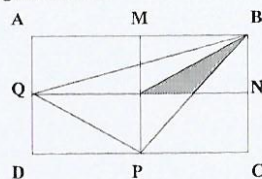
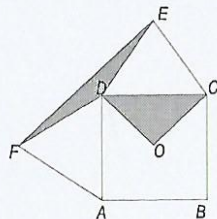
123) (Cone Sul-88) Dois triângulos isósceles cujos lados medem x, x, a e x, x, b, respectivamente, possuem área igual; a ≠ b. Calcular x.

124) (Iberoamericana-85) Seja P um ponto interior do triângulo equilátero ABC tal que: PA = 5, PB = 7 e PC = 8. Encontre o comprimento do lado do triângulo ABC.

125) (Báltica-92) Sejam a ≤ b ≤ c os lados de um triângulo retângulo, e seja 2p seu perímetro.
Mostre que p(p – c) = (p – a)(p – b) = S, onde S é a área do triângulo.

126) (Maio-96) Num retângulo *ABCD, AC* é uma diagonal. Uma reta *r* se move paralelamente a *AB*, formando dois triângulos opostos pelo vértice, interiores ao retângulo. Prove que a soma das áreas destes triângulos é mínima quando *r* passa pelo ponto médio do segmento *AD*.

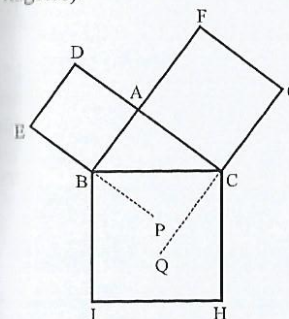
127) (Maio-97) Em um quadrado *ABCD* de lado *k*, colocam-se os pontos *P* e *Q* sobre os lados *BC e CD*, respectivamente, de forma que *PC* = 3*PB* e *QD* = 2*QC*. Sendo *M* o ponto de interseção de *AQ* e *PD*, determine a área do triângulo *QMD* em função de *k*.

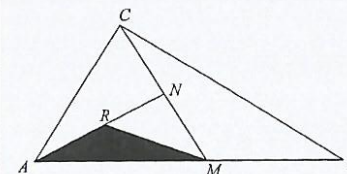
A B P M D Q C

128) (Maio-97) No retângulo *ABCD, M, N, P* e *Q* são os pontos médios dos lados. Se a área do triângulo sombreado é 1, calcular a área do retângulo *ABCD.*

129) (Maio-98) *ABCD* é um quadrado de centro *O*. Sobre os lados *DC* e *AD* foram construídos os triângulos equiláteros *DAF* e *DCE.* Decida se a área do triângulo *EDF* é maior, menor ou igual à área do triângulo *DOC.*

130) (Maio-98) ABC é um triângulo equilátero. N é um ponto do lado AC tal que $\overline{AC}=7.\overline{AN}$, *M* é um ponto do lado *AB* tal que *MN* é paralelo a *BC* e *P* é um ponto do lado *BC* tal que *MP* é paralelo a *AC.* Encontre a fração $\frac{área(MNP)}{área(ABC)}$.

131) (Báltica-98) Em um triângulo ABC, ∠BAC = 90°. O ponto D pertence ao lado BC e satisfaz ∠BDA = 2∠BAD. Demonstre que $\frac{1}{AD}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{BD}+\frac{1}{CD}\right)$.

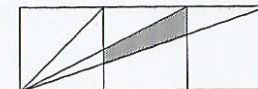
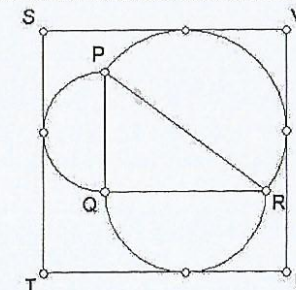
132) (Seletiva Argentina Cone Sul-97) Seja ABC um triângulo acutângulo e CD a altura correspondente ao vértice C. Se M é o ponto

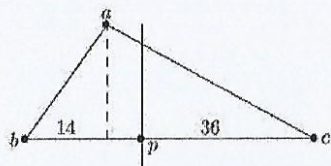
médio de BC e N é o ponto médio de AD, calcular MN sabendo que AB = 8 e CD = 6.

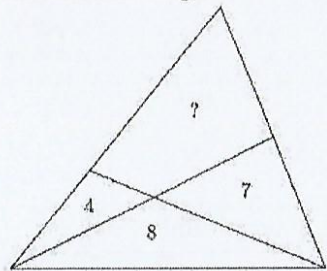
133) (OBM Jr.-92) Na figura abaixo o triângulo ABC é retângulo em A. Os quadriláteros ABED e ACGF e BCHI são quadrados. Estendemos EB até P tal que EB = BP; estendemos GC até Q tal que GC = CQ.
a) Prove que o triângulo ABC é congruente ao triângulo PBI e que o triângulo BQC é congruente ao triângulo HPI.
b) Prove que (área ΔBPC) = (área □ABED)/2 e que (área ΔBQC) = (área □ACGF)/2.
c) Demonstre que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (Teorema de Pitágoras).

134) (OBM Jr.-93) O triângulo ABC é retângulo em A. Por A trace uma reta r perpendicular a BC, que encontra BC em H. Em r, marque o ponto P, tal que AP = BC, estando A entre P e H. Trace os segmentos PB e PC.
a) Prove que a área do quadrilátero PBAC é $BC^2/2$.
b) Considere o quadrado ABDE tal que A está entre E e C. Prove que o triângulo BCD é congruente ao triângulo APB.
c) Prove que a área do triângulo BCD é $AB^2/2$.
d) Prove o Teorema de Pitágoras: $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

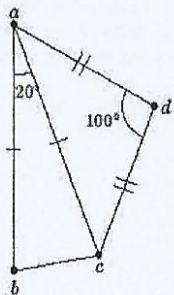
135) (OBM-2001) No triângulo *ABC* tem-se que *M* é o ponto médio do lado *AB* (isto é, os segmentos *AM* e *MB* têm o mesmo comprimento). *N* é o ponto médio de *MC* e *R* é o ponto médio de *NA*. O triângulo *ABC* tem área 2000. Determine a área do triângulo *AMR.*

136) (OBM-2001) *E* e *F* são pontos do lado *AB*, do triângulo *ABC*, tais que *AE* = *EF* = *FB*. *D* é ponto da reta *BC* tal que *BC* é perpendicular a *ED*. *AD* é perpendicular a *CF*. Os ângulos *BDF* e *CFA* medem *x* e 3*x*, respectivamente. Calcule a razão (*DB*) / (*DC*).

137) (Espanha-2000) Seja P um ponto do lado BC de um triângulo ABC. A paralela por P a AB corta o lado AC no ponto Q e a paralela por P a AC corta o lado AB no ponto R. A razão entre as áreas dos triângulos RBP e QPC é k^2.
Determine a razão entre as áreas dos triângulos ARQ e ABC.

138) (Uruguai-2000) Considere os três quadrados da figura, de lado 2. Calcular a área sombreada.

139) (Uruguai-2001) Na figura, PQR é um triângulo retângulo com PQ = 6 cm e QR = 8 cm. Traçam-se as semi-circunferências de diâmetros QP, PQ e QR e os lados do retângulo STUV são tangentes à elas. Calcular a área de STUV.

140) (Bélgica-99) A base de um triângulo *abc* é dividida pela altura relativa à *bc* em duas partes; uma de possui comprimento 14 e a outra de comprimento 36. Uma reta perpendicular à *bc*

divide o triângulo abc em duas partes com mesma área e intersecta bc no ponto p. A razão $\frac{|bp|}{|cp|}$ é igual a:

a) 1 b) 2/3 c) 11/18 d) 5/9 e) 1/2

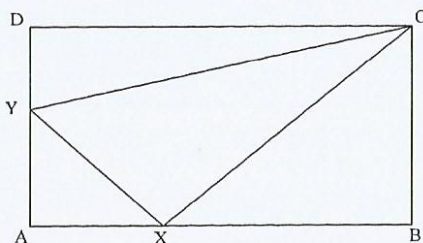
141) (Bélgica-2001) Duas retas dividem um triângulo em quatro partes. As áreas de três destas partes estão marcadas na figura.

Determine a área da 4ª parte.

142) (Bélgica-96) Sejam abc e dac dois triângulos isósceles. O primeiro possui ângulo oposto à base medindo 20°; o segundo possui o ângulo oposto à base medindo 100°.

Prove que $|ab| = |bc| + |cd|$.

143) (Hong Kong-2004) Dado um triângulo ΔABC, $\angle ABC = 80°$, $\angle ACB = 70°$ e $BC = 2$. Uma reta perpendicular é traçada desde A até BC, outra reta perpendicular é traçada desde B até AC. As duas retas perpendiculares encontram-se em H. Determine o comprimento de AH.

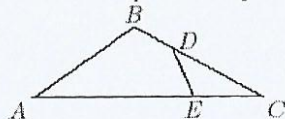
144) (Hong Kong-2004) Seja ΔABC um triângulo acutângulo, onde $BC = 5$. E é um ponto sobre AC tal que $BE \perp AC$, F é um ponto sobre AB tal que $AF = BF$. Sabendo-se que , determine a área do triângulo.

145) (Hong Kong-2000) Em ΔABC, $AB = AC = 12$, P é um ponto em BC tal que $AP = 8$. Determine $PB.PC$.

146) (Espírito Santo-2004) Num retângulo $ABCD$, sejam X um ponto no lado AB e Y um ponto no lado AD. Suponha que as áreas dos triângulos ΔAXY, ΔXBC e ΔCDY sejam respectivamente 10, 8 e 9. Determine a área desse retângulo.

147) (AIME-2001) ABC é um triângulo com AB = 13, BC = 15, CA = 17. Pontos D, E, F nos lados AB, BC, CA, respectivamente, são tais que AD/AB = α, BE/BC = β, CF/CA = γ, onde $\alpha + \beta + \gamma = 2/3$ e $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2/5$. Determine o valor de [área DEF]/[area ABC].

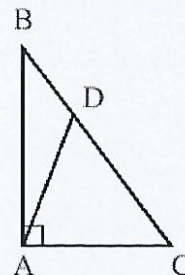
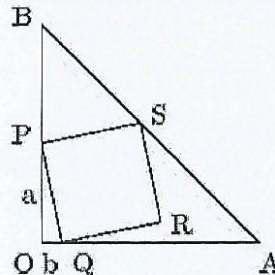
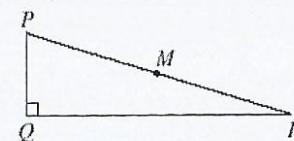
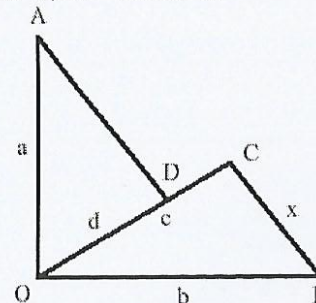
148) (Noruega-99) No triângulo ABC temos AB = 5 e AC = 6. A área do triângulo quando o ângulo $\angle$ACB é o maior possível é

a) 15 b) $5\sqrt{7}$ c) $7\sqrt{7}/2$ d) $3\sqrt{11}$ e) $5\sqrt{11}/2$

149) (Portugal-99) Os lados [AC] e [BC] do triângulo [ABC] medem 10 cm e 6 cm, respectivamente. Por outro lado, EC = 3 cm e DC = 4 cm. Se a área do triângulo [DCE] mede 3 cm², quanto mede a área do quadrilátero [ABDE]?

150) (International Talent Search) Sejam R e S pontos nos lados BC e AC, respectivamente, de ΔABC e seja P a interseção de AR e BS. Determine a área de ΔABC se as áreas de ΔAPS, ΔAPB e ΔBPR são 5, 6 e 7, respectivamente.

151) (Canadian Open Challenge-99) Um triângulo ABC é retângulo com ângulo reto em A. Os pontos P e Q pertencem à hipotenusa BC tal que BP = PQ = QC, AP = 3 e AQ = 4. Determine o comprimento de cada lado de ΔABC.

152) (International Talent Search) Em um triângulo ABC, sejam AB = 52, BC = 64 e CA = 70 e assuma que P e Q são pontos nos lados AB e AC, respectivamente, tal que ΔAPQ e o quadrilátero PBCQ possuem mesma área e perímetro. Determine o valor de PQ².

153) (Canadian Open Challenge-98) Os comprimentos dos lados do triângulo ABC são 60, 80 e 100 com $\angle$A = 90°. O segmento de reta AD divide o triângulo ABC em dois triângulos de igual perímetro. Calcule o comprimento de AD.

154) (Canadian Open Challenge-97) Em um triângulo retângulo isósceles AOB, pontos P, Q e S são escolhidos nos lados OB, AO e AB, respectivamente, tais que um quadrado PQRS é formado. Se os comprimentos de OP e OQ são a e b, respectivamente, e a área de PQRS é 2/5 da área do triângulo AOB, determine o valor da razão a/b.

155) (Canadian Open Challenge-2001) O triângulo PQR é retângulo em Q e possui catetos de comprimento PQ = 14 e QR = 48. Se M é o ponto médio de PR, determine o cosseno de $\angle$MQP.

156) (Wisconsin-94) Assuma que $\angle$AOB é um ângulo reto. Determine uma fórmula para a área de ΔAOD em termos dos comprimentos OA = a, OB = b, OC = c, OD = d e BC = x.

157) (Repúblicas Theca e Eslovaca-97) Seja ABC um triângulo com lados a,b e c e correspondentes ângulos opostos α, β e γ. Prove que a igualdade $\alpha = 3\beta$ implica na igualdade $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$.

158) (Espanha-2001) Os comprimentos dos lados de um triângulo estão em progressão geométrica de razão r. Determinar os valores de r para os quais o triângulo é, respectivamente, acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

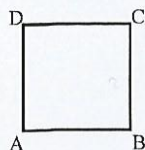
159) (Espanha-2004) Existe algum triângulo tal que as medidas de seus lados são três números consecutivos e o ângulo maior é o dobro que o menor? Se existe, determinar suas medidas.

Introdução aos Quadriláteros

5.1) QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Os quadriláteros notáveis são os quadrados, os retângulos, os losangos, os paralelogramos e os trapézios. Neste capítulo estudaremos suas principais propriedades.

5.1.1) Quadrado

Um quadrilátero convexo é um quadrado se e somente se apresenta os quatro lados congruentes e os quatro ângulos congruentes.

ABCD é um quadrado $\Leftrightarrow$ $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$ e $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$

5.1.1.1) Propriedades do Quadrado:

i) Os ângulos internos de um quadrado são iguais a 90°.
Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360° e todos os ângulos internos de um quadrado são iguais então segue diretamente que cada um vale 90°.

ii) Em todo quadrado as diagonais são congruentes.
Seja L o lado do quadrado ABCD. Aplicando o Teorema de Pitágoras para calcular o valor de cada diagonal encontramos que $\overline{AC} = \sqrt{2}L$ e $\overline{BD} = \sqrt{2}L$, ou seja, $\overline{AC} = \overline{BD}$.

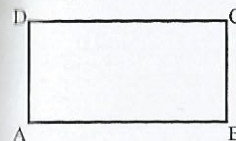
iii) As diagonais de todo quadrado intersectam-se nos respectivos pontos médios.
Seja M o ponto de interseção das diagonais do quadrado ABCD. Perceba que os triângulos ΔABM e ΔCDM são semelhantes uma vez que seus três lados são paralelos. Como $\overline{AB} = \overline{CD}$ temos na verdade que ΔABM ≡ ΔCDM, implicando que $\overline{AM} = \overline{CM}$ e $\overline{BM} = \overline{DM}$, ou seja, M é o ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

iv) Em todo quadrado as diagonais são perpendiculares
Seja M o ponto de interseção das diagonais de um quadrado ABCD. Inicialmente repare que ΔABM ≡ ΔBCM ≡ ΔCDM ≡ ΔDAM. Assim, temos que ∠AMB = ∠BMC = ∠CMD = ∠DMA e a soma destes quatro ângulos é igual a 360°, fazendo com que ∠AMB = ∠BMC = ∠CMD = ∠DMA = 90°.

v) Área: No capítulo 3 foi mostrado que a área de um retângulo é igual ao produto das suas dimensões. Como todo quadrado é um retângulo, então a área de um quadrado de lado ℓ é $S = \ell^2$.

vi) As diagonais dividem um quadrado em quatro triângulos de mesma área
Seja M o ponto de interseção das diagonais do quadrado ABCD. Como as diagonais são congruentes e cortam-se no ponto médio, então ΔABM ≡ ΔBCM ≡ ΔCDM ≡ ΔDAM, fazendo com que estes quatro triângulos possuam a mesma área.

5.1.2) Retângulo

Um quadrilátero convexo é um retângulo se e somente se possui os quatro ângulos iguais. Perceba que uma conseqüência desta definição é que todo quadrado é um retângulo.

ABCD é um retângulo $\Leftrightarrow$ $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$.

5.1.2.1) Propriedades do retângulo

i) Os ângulos internos de um retângulo são iguais a 90°.
Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360° e todos os ângulos internos de um retângulo são iguais então segue diretamente que cada um vale 90°.

ii) Em todo retângulo dois lados opostos são congruentes
Trace a diagonal $\overline{AC}$. Como ΔABC e ΔCDA possuem lados paralelos e o lado $\overline{AC}$ é comum, então ΔABC ≡ ΔCDA, implicando que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{DA}$.

iii) Em todo retângulo as diagonais são congruentes.
Suponhamos que $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ e $\overline{BC} = \overline{DA} = b$ sejam os comprimentos dos lados do retângulo ABCD. Aplicando o Teorema de Pitágoras para calcular o valor de cada diagonal encontramos que $\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\overline{BD} = \sqrt{a^2 + b^2}$, ou seja, $\overline{AC} = \overline{BD}$.

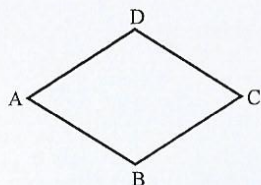
iv) As diagonais de todo retângulo intersectam-se nos respectivos pontos médios.
Seja M o ponto de interseção das diagonais do retângulo ABCD. Perceba que os triângulos ΔABM e ΔCDM são semelhantes uma vez que seus três lados são paralelos. Como $\overline{AB} = \overline{CD}$ temos na verdade que ΔABM ≡ ΔCDM, implicando que $\overline{AM} = \overline{CM}$ e $\overline{BM} = \overline{DM}$, ou seja, M é o ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

v) Todo quadrilátero convexo que tem as diagonais cortando-se ao meio e congruentes é um retângulo.
Seja M a interseção das diagonais do quadrilátero ABCD. Como $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \overline{DM}$, então ΔABM e ΔCDM são isósceles e congruentes, implicando que ∠BAM = ∠ABM = ∠CDM = ∠DCM. Analogamente, podemos demonstrar que ∠ADM = ∠DAM = ∠BCM = ∠CBM. Deste modo podemos concluir que $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$, ou seja, ABCD é um retângulo.

vi) Área: Foi mostrado no capítulo 3 que se *a* e *b* são as dimensões de um retângulo, então sua área é igual a S = *a.b*

vii) As diagonais dividem um retângulo em quatro triângulos de mesma área
Suponhamos que $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ e $\overline{BC} = \overline{DA} = b$ sejam os comprimentos dos lados do retângulo ABCD. Se M é o ponto de interseção das diagonais do retângulo. Assim, ΔABM e CDM possuem base a e altura b/2, enquanto que ΔBCM e ΔADM possuem base b e altura a/2. Assim, as áreas de todos esses triângulos são iguais e valem a.b/4

5.1.3) Losango

Um quadrilátero convexo é um losango se e somente se possui os quatro lados congruentes. Note que, pela definição anterior, podemos concluir que todo quadrado é um losango.

ABCD é um losango $\Leftrightarrow$ $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$.

5.1.3.1) Propriedades do losango

i) Em todo losango dois ângulos opostos quaisquer são iguais.

Trace a diagonal $\overline{AC}$ de um losango ABCD. Como $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{BC} = \overline{DA}$ e o lado $\overline{AC}$ é comum, então $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$, fazendo com que $\hat{B} = \hat{D}$. Analogamente pode-se demonstrar que $\hat{A} = \hat{C}$. Uma conseqüência imediata desta propriedade é que em todo losango os lados opostos são paralelos.

ii) Em todo losango as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios.

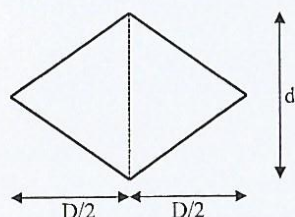
Seja M a interseção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Como os triângulos ΔABM e ΔCDM possuem lados paralelos e $\overline{AB} = \overline{CD}$ então $\Delta ABM \equiv \Delta CDM$ implicando que $\overline{AM} = \overline{CM}$ e $\overline{BM} = \overline{DM}$.

iii) As diagonais de qualquer losango são perpendiculares.

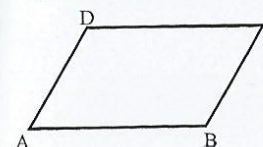
Seja M a interseção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Temos assim quatro triângulos, interiores ao losango, com relação de semelhança LLL, implicando que $\Delta AMB \equiv \Delta AMD \equiv \Delta CMB \equiv \Delta CMD$. Como todos os ângulos com vértice M destes quatro triângulos são iguais e somam 360°, então cada um vale 90°, ou seja, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

iv) Todo quadrilátero convexo que tem as diagonais cortando-se ao meio e perpendiculares é um losango.

Seja M o ponto de interseção das diagonais de um quadrilátero ABCD. Suponha que $\overline{AM} = \overline{CM} = x$ e $\overline{BM} = \overline{DM} = y$. Desde que as diagonais são perpendiculares, pelo Teorema de Pitágoras temos que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \sqrt{x^2 + y^2}$, implicando que ABCD seja um losango.

v) Área:

Traçando uma das diagonais, como na figura ao lado, dividimos um losango em dois triângulos congruentes, de bases d e altura D/2.
Assim, a área de um losango é igual a D.d/2

5.1.4) Paralelogramo

Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se e somente se possui os lados opostos paralelos. Perceba que a partir desta definição podemos afirmar que todo quadrado, assim como todo retângulo e todo losango é um paralelogramo.

ABCD é um paralelogramo $\Leftrightarrow$ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

5.1.4.1) Propriedades do paralelogramo

i) Em todo paralelogramo dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

Se ABCD é um paralelogramo temos que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ implicando que $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ e $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, de onde concluímos que $\hat{A} = \hat{C}$. Analogamente podemos demonstrar que $\hat{B} = \hat{D}$.

ii) Em todo paralelogramo dois lados opostos quaisquer são congruentes.

Trace a diagonal $\overline{AC}$ do paralelogramo ABCD. Note agora que os triângulos ΔABC e ΔADC possuem os lados paralelos e o lado $\overline{AC}$ comum, ou seja, $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$. Desta relação de igualdade concluímos que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{DA}$.

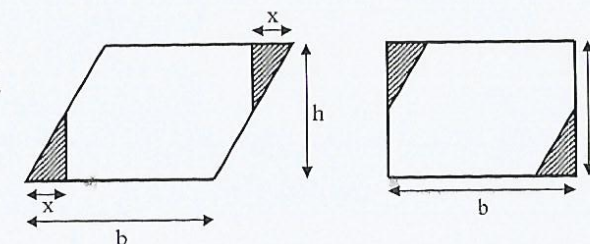
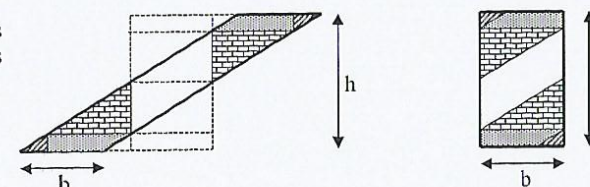
iii) Em todo paralelogramo as diagonais intersectam-se nos respectivos pontos médios.

Seja M a interseção das diagonais. Como ABCD é um paralelogramo, então $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ $\Rightarrow$ $\angle BAC = \angle DCA$ e $\angle ABD = \angle CDB$ $\Rightarrow$ $\Delta ABM \equiv \Delta CDM$ $\Rightarrow$ $\overline{AM} = \overline{CM}$ e $\overline{BM} = \overline{DM}$.

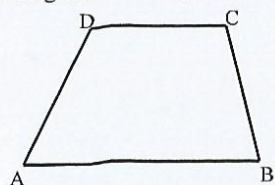
iv) Todo quadrilátero convexo que tem as diagonais cortando-se ao meio é um paralelogramo.

Seja M o ponto de interseção das diagonais de um quadrilátero ABCD. Como $\overline{AM} = \overline{CM}$, $\overline{BM} = \overline{CM}$ e $\angle AMB = \angle CMD$ então $\Delta ABM \equiv \Delta CDM$. Assim, temos que $\angle BAM = \angle DCM$, ou seja, AB || CD. Analogamente pode-se demonstrar que DA || CD, fazendo com que ABCD seja um paralelogramo.

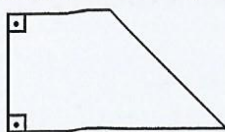
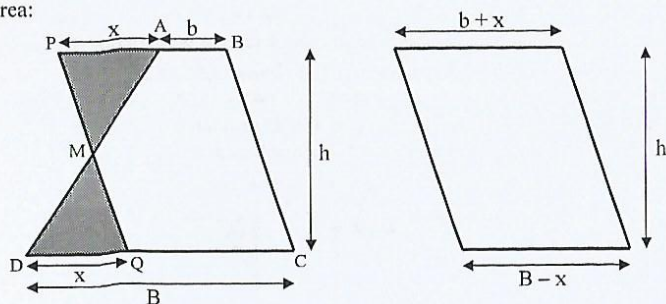
v) Área:

1° caso: Quando as projeções dos pontos médios dos lados encontram a base.

2° caso: Quando as projeções dos pontos médios dos lados não encontram a base.

As figuras acima mostram que todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de mesma base e altura. Assim, a área de um paralelogramo é igual a S = b.h

5.1.5) Trapézio

Um quadrilátero convexo é um trapézio se e somente se possui dois lados paralelos. Estes lados paralelos são conhecidos como bases. A partir desta definição podemos concluir diretamente que todo paralelogramo é um trapézio.

ABCD é um trapézio $\Leftrightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ou $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

Quando os lados não paralelos possuem igual comprimento dizemos que o trapézio é isósceles.

Quando um dos lados não paralelos é perpendicular às bases dizemos que o trapézio é retângulo.

Área:

Tracemos PQ // BC passando pelo ponto médio M de AD. Assim, teremos que os triângulos APM e DQM são congruentes.

As figuras acima mostram que todo trapézio é equivalente a um paralelogramo de mesma altura.

Além do mais, se B é a base maior do trapézio, podemos observar que:

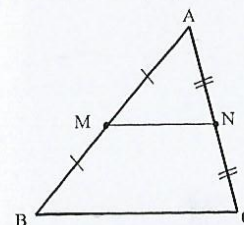
$$B - x = b + x \;\Rightarrow\; x = \frac{B-b}{2} \;\Rightarrow\; B - x = b + x = \frac{B+b}{2}.$$

Portanto, a área do trapézio é dada por $S = \left(\frac{B+b}{2}\right).h$

Obs: A construção acima é sempre possível desde que se trace a paralela ao lado do trapézio que possua menor declividade com relação às bases.

TEOREMA DA BASE MÉDIA

Em Triângulos:

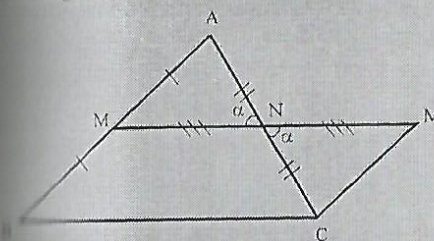
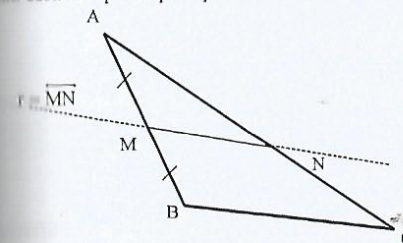
1.1) Num triangulo qualquer, o segmento de extremidades nos pontos médios de dois lados (base média relativa ao terceiro lado) é **paralelo** ao outro lado e a metade deste.

$$\begin{matrix} AM = MB \\ AN = NC \end{matrix} \Rightarrow \overline{MN} // \overline{BC} \text{ e } MN = \frac{BC}{2}$$

Demonstração:

Prolongando $\overline{MN}$, obtém-se M' tal que NM' = MN. Surge também o triangulo NCM', que é congruente ao triangulo AMN já que possuem dois lados congruentes, assim como o ângulo formado entre eles.

Portanto:

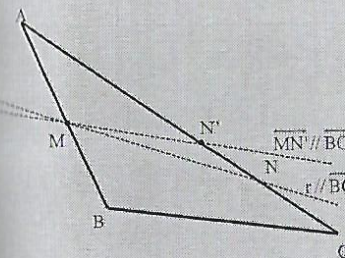
$M'C = AM \Rightarrow M'C = MB$ e $M\hat{A}C = N\hat{C}M' \Rightarrow \overleftrightarrow{BA} // \overleftrightarrow{M'C}$. Finalmente, conclui-se que o quadrilátero MBCM' é um paralelogramo, por possuir os lados opostos $\overline{BM}$ e $\overline{M'C}$ paralelos e congruentes.

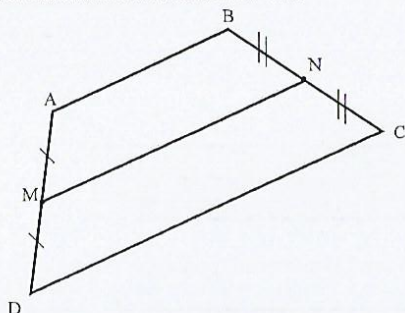
Logo, $\overline{M'B} // \overline{BC}$ e MM' = 2MN = BC, ou seja: $\overline{MB} // \overline{BC}$ e $MN = \frac{BC}{2}$ (c.q.d.)

1.2) Se num triângulo uma reta passa pelo ponto médio de um lado e é paralela a um segundo lado, então essa reta passa pelo ponto médio do terceiro lado.

$AM = MB$

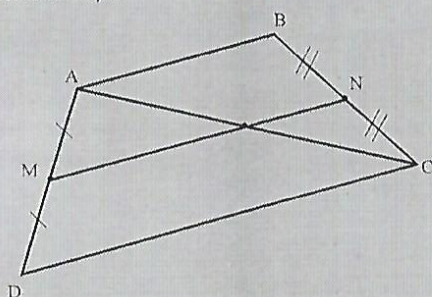
$r = \overleftrightarrow{MN} // \overline{BC} \Rightarrow AN = NC$

$(N \in \overline{AC})$

Demonstração:

Se N não fosse ponto médio de $\overline{AC}$, então, sendo N' tal ponto, $\overleftrightarrow{MN'}$ seria uma paralela a $\overline{BC}$, por M, distinta de r, o que é um absurdo, pelo postulado V de Euclides. Logo, na realidade, N = N' e NA = NC &(c.q.d)

5.2.2) Em Trapézios

5.2.2.1) Num trapézio qualquer, o segmento que liga os pontos médios dos lados oblíquos é paralelo às bases e a média aritmética entre eles.

$AM = MD$
$BN = NC$
$\overline{AB} // \overline{CD}$
$\Rightarrow \overline{MN} // \overline{AB} (// \overline{CD})$ e $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$

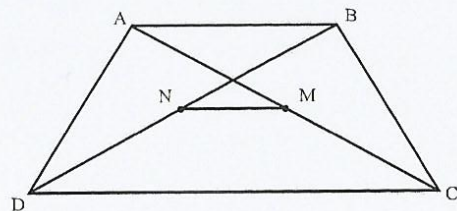
Demonstração

Seja P o ponto médio da diagonal $\overline{AC}$. Então, $\overline{MP}$ é a base média do triângulo ACD (relativamente a $\overline{CD}$) e $\overline{NP}$ é a base média do triangulo ABC (relativamente a $\overline{AB}$). Assim, $\overline{MP} // \overline{CD}$ e $\overline{NP} // \overline{AB}$. Como $\overline{AB} // \overline{CD}$, conclui-se que $\overline{MP} // \overline{AB}$. Já que a paralela a $\overline{AB}$ por P é única, conclui-se que M, P e N estão alinhados, numa paralela às bases. Além disso, já que $MN = MP + PN = \dfrac{CD}{2} + \dfrac{AB}{2} \Rightarrow MN = \dfrac{AB + CD}{2}$ (c.q.d.)

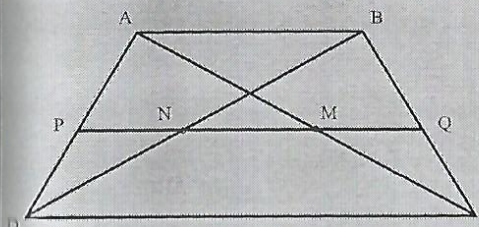
5.2.2.2) Corolário

A base média de um trapézio divide as diagonais ao meio.

5.2.2.3) Se num trapézio uma reta passa pelo ponto médio de um lado oblíquo e é paralela às bases, então ela passa pelo ponto médio do outro lado oblíquo.

A demonstração é análoga à do teorema 1.2 e fica como exercício.

5.2.2.4) O segmento que liga os pontos médios das diagonais de um trapézio é igual à semi-diferença entre as bases.

$\overline{AB} // \overline{CD}$
$AM = MC$
$BN = ND$
$\Rightarrow MN = \left| \dfrac{CD - AB}{2} \right|$

Demonstração:

Suponha-se que, inicialmente, que $\overline{CD} > \overline{AB}$. Sendo P e Q pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Como visto na demonstração do teorema 2.1., é fácil ver que P, N, M e Q são colineares, o que significa que $\overline{PM}$ e $\overline{PN}$ são bases médias nos triangulos ACD e ABD, respectivamente. Dessa forma: $PM = \dfrac{CD}{2}$, $PN = \dfrac{AB}{2}$.

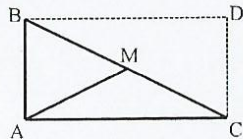
Finalmente: $MN = PM - PN = \dfrac{CD - AB}{2}$

O caso em que $\overline{AB} > \overline{CD}$ implica, de forma inteiramente análoga, que $MN = \dfrac{AB - CD}{2}$. Em qualquer caso: $MN = \left| \dfrac{CD - AB}{2} \right|$ (c.q.d.)

OBS: O segmento $\overline{MN}$ é denomina **mediana de Euler**. Na verdade, esse é um conceito mais geral, que vale para qualquer quadrilátero convexo. Ou seja: mediana de Euler é o segmento que liga os pontos médios das diagonais de um quadrilátero convexo. Para mais detalhes consulte o capítulo 8. A fórmula obtida, entretanto, vale apenas em trapézios.

Exemplos:

1) Demonstre que, em um triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa possui comprimento igual a metade do comprimento da hipotenusa.

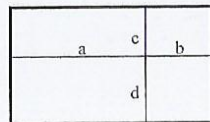
Solução:

Considere o triângulo retângulo ΔABC ao lado, onde AM é a mediana relativa ao lado BC. Trace uma paralela a AC passando por B e trace uma paralela a AB passando por C. Essas paralelas cortam-se em D. Como $\angle B\hat{A}C = 90^\circ$ então ABCD é um retângulo e BC é uma diagonal deste.

Desde que ABCD é um retângulo, então o ponto M (médio de BC) é o encontro das diagonais de ABCD, fazendo com que AM esteja sobre a diagonal AD do retângulo ABCD. Como as diagonais de um retângulo são congruentes e cortam-se ao meio, concluímos que AM = BM = CM.

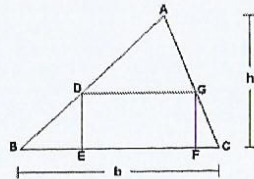
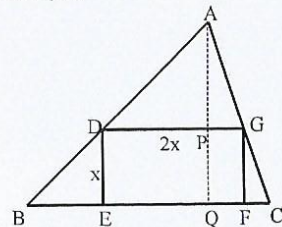
2) (UFV-2003) Um terreno de forma retangular foi dividido em quatro lotes retangulares onde são conhecidas as áreas de três deles, como ilustra a figura abaixo.

11 m²	5 m²
	13 m²

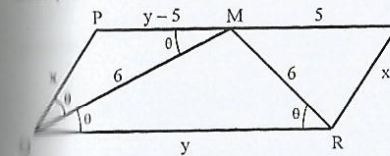
A área total do terreno, em m², é:
a) 55,6 b) 56,6 c) 57,6 d) 58,6 e) 59,6

Solução:

Designemos os comprimentos dos lados dos retângulos menores como mostrado na figura ao lado. Assim:
$a.c = 11 \quad b.c = 5 \quad b.d = 13$
Portanto: $(a.c)(b.d) = 11.13 \Rightarrow (b.c)(a.d) = 143 \Rightarrow$
$5(a.d) = 143 \Rightarrow a.d = 28{,}6\ m^2$
Somando todas áreas: $S = 11 + 5 + 13 + 28{,}6 \Rightarrow S = 57{,}6\ m^2$

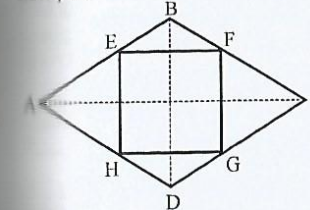
3) (Fuvest-2003) O triângulo **ABC** tem altura **h** e base **b** (ver figura). Nele, está inscrito o retângulo **DEFG**, cuja base é o dobro da altura. Nessas condições, a altura do retângulo, em função de **h** e **b**, é pela fórmula:

a) $\dfrac{bh}{h+b}$ b) $\dfrac{2bh}{h+b}$
c) $\dfrac{bh}{h+2b}$ d) $\dfrac{bh}{2h+b}$
e) $\dfrac{bh}{2(h+b)}$

Solução:

Suponhamos que a altura relativa a A corte o retângulo em P e Q.
Assim, temos que $\Delta DG \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{AP}{DG} = \dfrac{AQ}{BC} \Rightarrow$
$\dfrac{h-x}{2x} = \dfrac{h}{b} \Rightarrow bh - bx = 2xh \Rightarrow x(2h+b) = bh \Rightarrow$
$x = \dfrac{bh}{2h+b}$

(UECE-2004) O paralelogramo PQRS é tal que a bissetriz do ângulo Q intercepta o lado PS no ponto M com MS = 5m e MQ = MR = 6m. Nestas condições a medida do lado PQ é:
a) 3,0 m b) 3,5 m c) 4,0 m d) 4,5 m

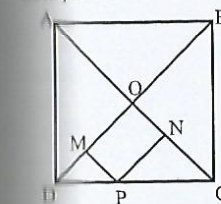
Solução:

Seja $\angle PQR = 2\theta$. Se QM é a bissetriz interna de $\angle PQR$ então $\angle PQM = \angle RMQ = \theta$. Como MQ = MR então $\angle QRM = \theta$. Desde que PM // QR então $\angle PMQ = \theta$, fazendo com que ΔPQM seja isósceles: $x = y - 5$.
Assim, concluímos que ΔPQM ~ ΔMQR:
$\dfrac{PQ}{MQ} = \dfrac{QM}{QR} \Rightarrow \dfrac{x}{6} = \dfrac{6}{x+5} \Rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0 \Rightarrow$
$(x+9)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 4{,}0$ m.

(Colégio Naval-86/87) Considere um losango de lado **L** e área **S** . A área do quadrado inscrito no losango, em função de **L** e **S** é:
a) $\dfrac{4S^2}{L^2+2S}$ b) $\dfrac{16S^2}{4L^2+S}$ c) $\dfrac{S^2}{L^2+S}$ d) $\dfrac{4S^2}{4L^2+S}$ e) $\dfrac{S^2}{L^2+2S}$

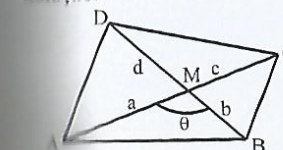
Solução:

Sejam $\overline{AC} = a$ e $\overline{BD} = b$ as diagonais do losango ABCD e seja x o valor do lado do quadrado EFGH.
Sabemos que $S = a.b/2$ e $a^2 + b^2 = 4L^2$.
Como $\Delta BEF \sim \Delta BAC$ então $\dfrac{BI}{EF} = \dfrac{BO}{AC} \Rightarrow \dfrac{b-x}{2x} = \dfrac{b}{2a} \Rightarrow$
$x = \dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2+2ab}} = \dfrac{2S}{\sqrt{4L^2+4S}} = \dfrac{S}{\sqrt{L^2+S}}$

Como a área do quadrado é igual a x^2, então temos que $S_{quadrado} = \dfrac{S^2}{L^2+S}$

(Olimpíada do Cone Sul-88) No quadrado *ABCD* consideram-se as diagonais *AC* e *BD*. Seja *P* um ponto qualquer pertencente a um dos lados. Demonstrar que a soma das distâncias de *P* às duas diagonais é constante.

Solução:

Uma vez que as diagonais de um quadrado são perpendiculares, PM ⊥ BD e PN ⊥ AC, então temos que PM ∥ AC e PN ∥ BD.
Assim, concluímos que PMON é um retângulo, fazendo com que PM = ON e PN = MO.
Por outro lado, como $\angle MDP = \angle MPD = 45^\circ$ e $\angle DMP = 90^\circ$ então pode-se afirmar ΔPMD é triângulo retângulo isósceles, ou seja, PM = MD.
Assim: PM + PN = MD + MO = OD, que é constante.

(Olimpíada da Rússia-63) As duas diagonais de um quadrilátero dividem-no, cada uma, em duas partes de igual área. Prove que ele é um paralelogramo.

Solução:

Suponhamos que as diagonais de ABCD se encontram em M.
Sejam:
S_1 = área de ΔABM, S_2 = área de ΔBCM,
S_3 = área de ΔCDM e S_4 = área de ΔDAM.

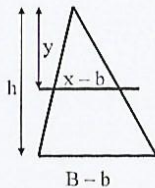
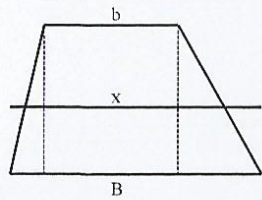
Pelo enunciado: $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ e $S_1 + S_4 = S_2 + S_3 \Rightarrow S_1 = S_3$ e $S_2 = S_4 \Rightarrow$

$$\frac{a.b.\text{sen}\,\theta}{2} = \frac{c.d.\text{sen}\,\theta}{2} \quad e \quad \frac{b.c.\text{sen}(180^o - \theta)}{2} = \frac{a.d.\text{sen}(180^o - \theta)}{2} \Rightarrow a.b = c.d \quad e \quad b.c = a.d \Rightarrow$$

$a = c$ e $b = d \Rightarrow$ as diagonais de ABCD se cortam ao meio $\Rightarrow$ ABCD é um paralelogramo.

8) (Colégio Naval-98/99) Dado um trapézio qualquer, de bases 6 e 8, traça-se paralelamente às bases um seguimento de medida **x** que o divide em outros dois trapézios equivalentes. Podemos afirmar que:

a) $x = 6{,}5$ b) $x = 4\sqrt{3}$ c) 7 d) $x = 5\sqrt{2}$ e) $x = 7{,}5$

Solução:

Corte o trapézio na direção de sua base menor e una os dois triângulos que aparecem lateralmente.
Pela semelhança de triângulos que existe:
$$\frac{B-b}{h} = \frac{x-b}{y} \Rightarrow y = \frac{h(x-b)}{B-b}$$

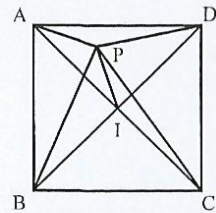
Como as áreas do dois trapézios que surgem são iguais, então a área do trapézio superior é igual a metade da área do trapézio original:

$$2\frac{(x+b)y}{2} = \frac{(B+b)h}{2} \Rightarrow 2(x+b)\frac{h(x-b)}{B-b} = (B+b)h \Rightarrow 2(x+b)(x-b) = (B+b)(B-b) \Rightarrow$$

$$2(x^2 - b^2) = B^2 - b^2 \Rightarrow 2x^2 - 2b^2 = B^2 - b^2 \Rightarrow 2x^2 = B^2 + b^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{B^2 + b^2}{2}}$$

Aplicando os valores do enunciado ($B = 8$ e $b = 6$) concluímos que $x = 5\sqrt{2}$.

9) Considere um quadrado ABCD de modo que P é um ponto em seu interior. Se $PA = a$, $PB = b$ e $PC = c$, determine o valor de PD.

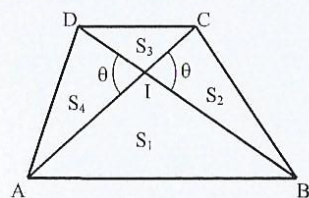
Solução:

Seja I a interseção das diagonais de ABCD e L o valor de seu lado. Tracemos agora os segmentos PA, PB, PC, PD e PI. Como as diagonais de um quadrado são congruentes e cortam-se ao meio, então PI é mediana dos triângulos ΔACP e ΔBDP. Assim:

i) $PA^2 + PC^2 = \frac{AC^2}{2} + 2.PI^2 \Rightarrow a^2 + c^2 = L^2 + 2.PI^2$

ii) $PB^2 + PD^2 = \frac{BD^2}{2} + 2.PI^2 \Rightarrow b^2 + d^2 = L^2 + 2.PI^2$

Desta forma: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$

10) AB e CD são as bases de um trapézio e I é o ponto de interseção das diagonais. Provar que a área do triângulo AID é igual à área de BIC e que a área AID é media geométrica das áreas de AIB e CID.

Solução:

Considere que $\angle A\hat{I}D = \angle C\hat{I}B = \theta$.

Como $\Delta AIB \sim \Delta CID \Rightarrow \frac{AI}{CI} = \frac{BI}{DI} \Rightarrow AI.DI = BI.CI \Rightarrow$

$(AI.DI.\text{sen}\,\theta)/2 = (BI.CI.\text{sen}\,\theta)/2 \Rightarrow S_2 = S_4$

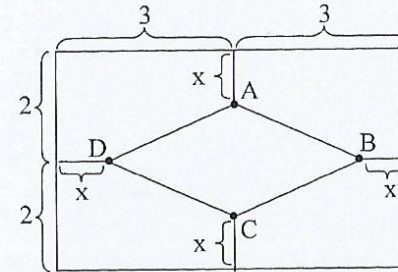
Note agora que:

$S_1 = [AI.BI.\text{sen}\,(180^o - \theta)]/2 = (AI.BI.\text{sen}\,\theta)/2$

$S_2 = (BI.CI.\text{sen}\,\theta)/2$ $S_3 = (CI.DI.\text{sen}\,\theta)/2$ $S_4 = (AI.DI.\text{sen}\,\theta)/2$

Portanto: $S_1.S_3 = (AI.BI.CI.DI.\text{sen}\,\theta)/2$ e $S_2.S_4 = (AI.BI.CI.DI.\text{sen}\,\theta)/2 \Rightarrow$

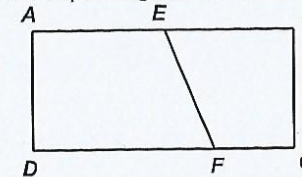
$S_1.S_3 = S_2.S_4 = (S_4)^2 \Rightarrow S_4 = \sqrt{S_1.S_3}$.

11) (UFLA-2004) No retângulo de lados 6 cm e 4 cm, calcule o valor de x, tal que o polígono ABCD tenha área igual a $\frac{1}{6}$ da área do retângulo.

Solução:

Pela simetria com que a figura é construída, podemos concluir que os lados do quadrilátero ABCD são iguais, ou seja, ABCD é um losango. Observe também que as diagonais de ABCD valem $AC = 4 - 2x$ e $BD = 6 - 2x$. Como a área de um losango é igual à metade da multiplicação das diagonais:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{retângulo}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\frac{(4-2x)(6-2x)}{2}}{4.6} = \frac{1}{6} \Rightarrow (4-2x)(6-2x) = 8 \Rightarrow (2-x)(3-x) = 2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 5x + 6 = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \overset{x<2}{\Rightarrow} x = 1.$$

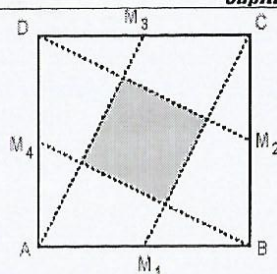
12) (UFRR-2004) Na figura abaixo, ABCD é um retângulo e o ponto E é médio do lado AB. O ponto F se localiza sobre o lado CD, de tal forma que o segmento EF divide o retângulo em dois trapézios.

Sabendo-se que a área do trapézio AEFD é o dobro da área do trapézio BCFE, pode-se afirmar que a razão $\frac{CF}{DF}$ é igual a:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{2}$

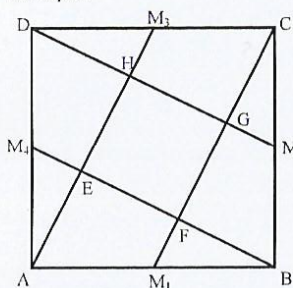
Solução:

$$\frac{S_{AEFD}}{S_{BCFE}} = \frac{\frac{(AE+DF)AD}{2}}{\frac{(BE+CF)BC}{2}} = 2 \overset{AD=BC}{\Rightarrow} AE + DF = 2(BE + CF) \Rightarrow \frac{AB}{2} + DF = 2\left(\frac{AB}{2} + CF\right) \Rightarrow$$

$$DF = \frac{AB}{2} + CF \Rightarrow DF = \frac{CF + DF}{2} + CF \Rightarrow \frac{DF}{2} = \frac{3CF}{2} \Rightarrow \frac{CF}{DF} = \frac{1}{3}.$$

13) (Unifor-2002) Na figura abaixo tem-se um quadrado ABCD, no qual M_1, M_2, M_3 e M_4 são pontos médios dos lados.

Se $AB = 5\sqrt{5}$ cm, a área da região sombreada, em centímetros quadrados, é igual a

a) 15 b) 20 c) 25 d) 30 e) 35

Solução:

Pela simetria com que a figura é construída podemos observar que $AE = BF = CG = DH$, $M_1F = M_2G = M_3H = M_4E$, $EF = FG = GH = HE = x$, $\angle ABM_4 = \angle BCM_1 = \angle CDM_2 = \angle DAM_3 = \theta$.

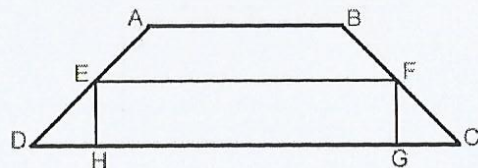
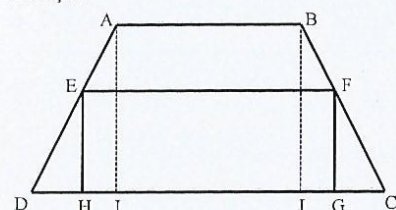
Como $\angle AM_4B = 90^\circ - \theta$ e $\angle EAM_4 = \theta$ então (observando o ΔAEM_4) temos que $\angle AEM4 = 90^\circ = \angle HEF$.

Analogamente, pode-se demonstrar que $\angle EFG = \angle FGH = \angle HEF = 90^\circ$, ou seja, temos que EFGH é um quadrado.

No triângulo retângulo AEB temos que $AE // M_1F$. Como M_1 é ponto médio de AB então M_1F é base média de ΔAEB. ou seja, temos que F é ponto médio de EB e $AE = 2M_1F$.

Analogamente, G é ponto médio de FC, H é ponto médio de GD e E é ponto médio de AH. Aplicando o teorema de Pitágoras em ΔAEB:

$AB^2 = EB^2 + AE^2 \Rightarrow 125 = (2x)^2 + (x)^2 \Rightarrow 5x^2 = 125 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow S_{EFGH} = 25$ cm^2.

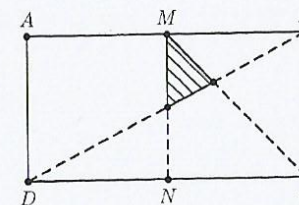
14) (UFOP-2002) Na figura abaixo, ABCD é um trapézio isósceles e EFGH é um retângulo. Sabendo que a altura do trapézio ABCD é igual a 1, AB = **a** e DC = **b**, determine a área máxima que o retângulo EFGH pode assumir.

Solução:

O ponto I é a projeção de A sobre DC, bem como J é a projeção de B sobre DC. Como ABJI é um retângulo temos que $IJ = AB = a$, implicando que $DI = \dfrac{b-a}{2}$.

Seja $EH = x$. Desde que $\Delta AID \sim \Delta EHD$:

$$\frac{EH}{AI} = \frac{DH}{DI} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{DH}{\frac{b-a}{2}} \Rightarrow DH = \frac{x(b-a)}{2}.$$

Pela simetria, temos que $CG = \dfrac{x(b-a)}{2} \Rightarrow GH = CD - (DH + CG) = b - x(b-a)$.

Assim: $S_{EFGH} = EH.HG = x[b - x(b-a)] = -(b-a)x^2 + b.x \Rightarrow S_{(EFGH)\max} = \dfrac{b^2}{4(b-a)}$.

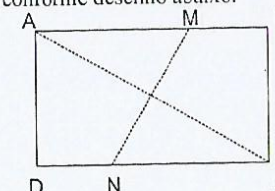
15) (OBM-2003) Uma folha retangular *ABCD* de área 1000 cm^2 foi dobrada ao meio e em seguida desdobrada (segmento *MN*); foi dobrada e desdobrada novamente (segmento *MC*) e finalmente, dobrada e desdobrada segundo a diagonal *BD*. Calcule a área do pedaço de papel limitado pelos três vincos (região escura no desenho).

Solução:

Seja O a interseção de BD com MN e seja P a interseção de MC com BD. Uma vez que M e N são pontos médios de AB e CD, respectivamente, então O é ponto médio de MN.

Observe agora que $\Delta CPD \sim \Delta MPB$: $\dfrac{MP}{CP} = \dfrac{BM}{CD} \Rightarrow \dfrac{MP}{CP} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{MP}{MC} = \dfrac{1}{3}$.

Por outro lado: $S_{ABCD} = 1000$ cm^2 $\Rightarrow S_{MBCN} = 500$ cm^2 $\Rightarrow S_{CMN} = 250$ cm^2.

$$\frac{S_{MOP}}{S_{CMN}} = \frac{\frac{MO.MP.sen(P\hat{M}O)}{2}}{\frac{MN.MC.sen(C\hat{M}N)}{2}} = \frac{MO}{MN}.\frac{MP}{MC} \Rightarrow \frac{S_{MOP}}{250} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} \Rightarrow S_{MOP} = \frac{125}{3}\text{ cm}^2.$$

16) (OBM-2001) Uma folha de papel retangular *ABCD*, de área 1, é dobrada em sua diagonal *AC* e, em seguida, desdobrada; depois é dobrada de forma que o vértice *A* coincida com o vértice *C* e, em seguida, desdobrada, deixando o vinco *MN*, conforme desenho abaixo.

a) Mostre que o quadrilátero AMCN é um losango.

b) Se a diagonal AC é o dobro da largura AD, qual é a área do losango AMCN?

Solução:

a) Se na segunda dobra a vértice A coincide com o vértice A então temos que AM = MC. Analogamente, temos que CN = NA. Entretanto, devido à diagonal AC, temos que $\angle MAC = \angle MCA = \angle NCA = \angle NAC$, implicando que $\Delta ACM \equiv \Delta ACN$, ou seja, AM = MC = CN = NA. Assim, provamos que AMCN é um losango.

b) Seja P encontro de AC e MN.

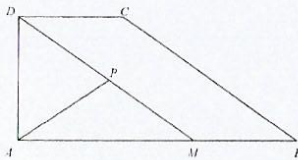
Se AC = 2AD então $sen(\angle ACD) = 1/2 \Rightarrow \angle ACD = 30^\circ \Rightarrow \angle NAC = 30^\circ \Rightarrow \angle DAN = 30^\circ$.

Como AP = AD, temos que $\Delta ADN \equiv \Delta APN$. De forma análoga, $\Delta CBM \equiv \Delta CPM$.

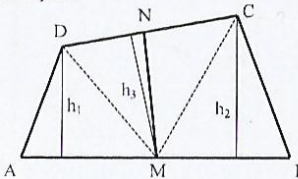
Assim, podemos dividir o quadrado ABCD em seis triângulos congruentes: $\Delta ADN \equiv \Delta APN \equiv \Delta CPN \equiv \Delta CBM \equiv \Delta CPM \equiv APM$. Destes, quatro pertencem ao losango AMCN.

Logo: $S_{AMCN} = \dfrac{4}{6}S_{ABCD} \Rightarrow S_{AMCN} = \dfrac{2}{3}$.

17) (OBM-2000) O trapézio ABCD tem bases AB e CD. O lado DA mede x e o lado BC mede 2x. A soma dos ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ é 120°. Determine o ângulo $D\hat{A}B$.

Solução:

Tracemos DM // BC. Como ∠AMD = ∠ABC e ∠DAM + ∠AMD = ∠DAM + ∠ABC = 120° tem-se que ∠ADM = 60°.
Como AD = x e BC = 2x, sendo P o ponto médio de DM, então AD = DP = x e ADP é um triângulo equilátero, isto é, AP = a.
Portanto APM é um triângulo isósceles com então ∠PAM = ∠AMP e como ∠DPA é um ângulo externo do triângulo APM temos 60° = ∠DPA = ∠PAM + ∠AMP = 2. ∠AMP = 2. ∠ABC.
Portanto, ∠ABC =30° e ∠DAB =120° – ∠ABC = 90°.

18) (OBM Jr.-95) ABCD é um quadrilátero convexo; M e N são os pontos médios dos lados AB e CD. Prove que se o segmento MN divide o quadrilátero em dois de mesma área, então ABCD é um trapézio.

Solução:

Para facilitar o cálculo das áreas, separemos o quadrilátero em quatro triângulos: ΔADM, ΔDMN, ΔCMN e ΔBCM.
Se MN divide o quadrilátero inicial em dois quadriláteros de mesma área temos:
(AMND) = (BCNM) ⇒ (ADM) + (DMN) = (CMN) + (BCM) ⇒
$AM.h_1/2 + DN.h_3/2 = BM.h_2/2 + CN.h_3/2$

Entretanto, como N é o ponto médio de CD, então DN = CN, e como M é o ponto médio de AB, AM = BM. Desta forma: $AM.h_1 + DN.h_3 = AM.h_2 + DN.h_3 \Rightarrow h_1 = h_2$.
Sendo $h_1 = h_2$, o segmento CD é paralelo ao segmento AB, caracterizando um trapézio.

19) (Olimpíada da África do Sul-2000) ABCD é um quadrado de lado 1. P e Q são pontos sobre os lados AB e BC, respectivamente, tal que ∠PDQ = 45°. Determine o perímetro de ΔPBQ.

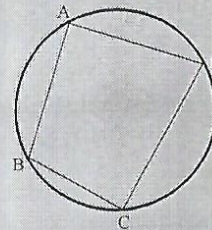
Solução:

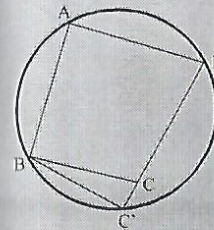
Em ΔAPD temos que AP = tg α e em ΔCQD temos que CQ = tg β.
Assim: PB = 1 – tg α e QB = 1 – tg β, onde α + β = 45°.
$\therefore \text{tg}(\alpha + \beta) = \text{tg } 45° \Rightarrow \text{tg }\alpha + \text{tg }\beta = 1 - \text{tg }\alpha.\text{tg }\beta$.
Portanto: $PQ^2 = (1 - \text{tg }\alpha)^2 + (1 - \text{tg }\beta)^2 \Rightarrow$
$PQ^2 = 2 - 2(\text{tg }\alpha + \text{tg }\beta) + \text{tg}^2\,\alpha + \text{tg}^2\,\beta \Rightarrow$
$PQ^2 = 2 - 2(1 - \text{tg }\alpha.\text{tg }\beta) + \text{tg}^2\,\alpha + \text{tg}^2\,\beta \Rightarrow$
$PQ^2 = \text{tg}^2\,\alpha + \text{tg}^2\,\beta + 2.\text{tg }\alpha.\text{tg }\beta = (\text{tg }\alpha + \text{tg }\beta)^2 \Rightarrow PQ = \text{tg }\alpha + \text{tg }\beta$
Assim, o perímetro de ΔPBQ vale:
$PB + QB + PQ = 1 - \text{tg }\alpha + 1 - \text{tg }\beta + \text{tg }\alpha + \text{tg }\beta = 2$.

5.3) CONDIÇÕES DE INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO

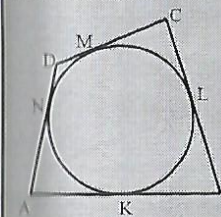
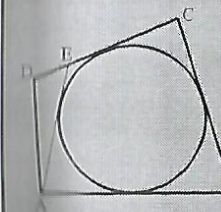
5.3.1) Quadrilátero Inscritível: "Um quadrilátero convexo ABCD é inscritível em uma circunferência se e somente se $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180°$".

Demonstração:

i) "Se ABCD é inscritível então $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180°$"

Como $\hat{A}$ e $\hat{C}$ compreendem os mesmos pontos B e D sobre a circunferência, então temos que $2\hat{A} = 360° - 2\hat{C} \Rightarrow$ $\hat{A} + \hat{C} = 180°$.
Analogamente, pode-se demonstrar que $\hat{B} + \hat{D} = 180°$.

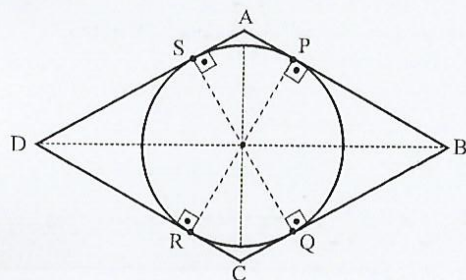
ii) "Se $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180°$ então ABCD é inscritível"

Tracemos a circunferência & que passa pelos pontos A, B e D.
Seja C' a interseção da reta CD com &.
Como ABC'D é inscritível então ∠ABC' + ∠ADC' = 180°.
Como C' pertence a reta CD temos que ∠ADC' = ∠ADC.
Entretanto sabemos que ∠ABC + ∠ADC = 180° ⇒
∠ABC' = ∠ABC ⇒ C = C' ⇒ ABCD é inscritível.
Observe que na figura ao lado o ponto C é interior à &, entretanto, no caso em que C fique exterior à circunferência, a demonstração é análoga.

5.3.2) Quadrilátero Circunscritível:
"Um quadrilátero convexo ABCD admite uma circunferência inscrita se e somente se a soma dos lados opostos é igual: AB + CD = BC + DA".

Demonstração:

Suponhamos que o quadrilátero convexo ABCD possui uma circunferência inscrita.
Como K, L, M e N são pontos de tangência, então:
AK = AN, BK = BL, CL = CM e DM = DN.
Assim: AB + CD = AK + BK + CM + DM = AN + BL + CL + DN =
= (BL + CL) + (AN + DN) = BC + DA.

Suponhamos, agora, que em um quadrilátero convexo temos a relação
AB + CD = BC + DA
Tracemos a circunferência inscrita ao triângulo cujos lados estão sobre as retas que passam por A e B, B e C, C e D.
A partir de A trace uma tangente a esta circunferência, que encontra CD em E. Como ABCE é circunscritível, temos que AB + CE = BC + EA ⇒
AB – BC = EA – CE ⇒ DA – CD = EA – CE ⇒
DA = EA + (CD – CE) ⇒ DA = EA + DE ⇒ os pontos D e E coincidem ⇒ ABCD é circunscritível.

Perceba agora que se ABCD é circunscritível, então o centro O de sua circunferência inscrita está a uma igual distância de AB, BC, CD e DA. Assim, pela propriedade de bissetriz, podemos afirmar que O é o ponto de interseção das bissetrizes dos quatro ângulos internos de ABCD. Em quadriláteros convexos, o fato de as quatro bissetrizes internas serem concorrentes ocorre somente quando o quadrilátero é circunscritível.

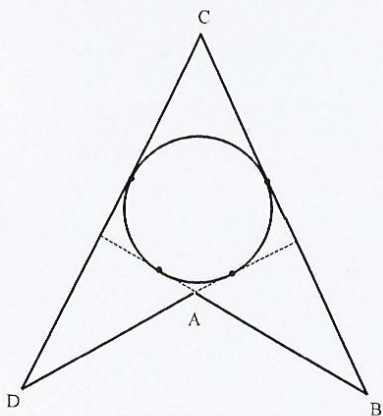
Note também que, desde que os lados de um quadrilátero circunscritível são tangentes a uma circunferência, então quando traçamos os segmentos determinados pelos pontos de tangência e pelo centro O do circuncírculo, temos que estes quatro segmentos são perpendiculares aos respectivos lados do quadrilátero em que foram traçados.

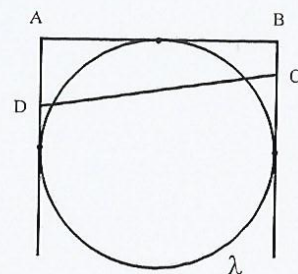
Por exemplo, todo **losango** é circunscritível. De fato, como as diagonais são bissetrizes dos ângulos internos, o ponto de encontro delas é eqüidistante dos quatro lados. Logo serve de centro à circunferência inscrita.

$A\hat{B}C \equiv C\hat{B}D \Rightarrow OP = OQ$

$A\hat{C}B \equiv A\hat{C}D \Rightarrow OQ = OR$

$B\hat{D}C \equiv B\hat{D}A \Rightarrow OR = OS$

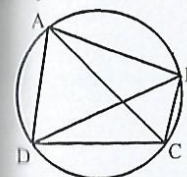
Logo, OP = OQ = OR = OS = Raio da circunferência inscrita no losango

Nenhum quadrilátero côncavo pode ser circunscritível. Para existir a circunferência inscrita, ela tem que tangenciar os **quatro lados**, não sendo conveniente que a circunferência tangencie prolongamento(s) de lado(s).

ABCD, côncavo, **não** pode ser circunscritível

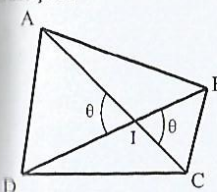
A B C D λ

λ não serve como circunferência inscrita.

Exemplos:

1) (ITA-94) Numa circunferência inscreve-se um quadrilátero convexo ABCD tal que ABC = 70°. Se x = ACB + BDC, então:
a) 120° b) x = 110° c) 100° d) 90° e) x = 80°

Solução:

Como ABCD é inscritível então $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$
Uma vez que os ângulos inscritos ∠ACB e ∠ADB compreendem a mesma corda AB na circunferência, então ∠ACB = ∠ADB.
Assim, $x = \angle ACB + \angle BDC = \angle ADB + \angle BDC = \angle ADC = 110^\circ$

2) (Olimpíada de Wisconsin-94) Em um quadrilátero ABCD mostre que se ∠CAD = ∠CBD então $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.

Solução:

Seja I a interseção das diagonais de ABCD. Como ∠CAD = ∠CBD e ∠AID = ∠BIC então ΔAID ~ ΔBIC, fazendo com que ∠ADI = ∠BCI.

$\Delta AID \sim \Delta BIC \Rightarrow \frac{AI}{DI} = \frac{BI}{CI} \Rightarrow \frac{AI}{BI} = \frac{DI}{CI}$ (1)

A relação (1) e o fato de que ∠AIB = ∠CID então ΔAIB ~ ΔDIC ⇒ ∠BAI = ∠CDI e ∠ABI = ∠DCI.

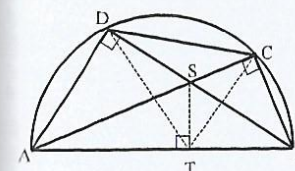
Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°, então:

$\angle DBA + \angle CBD + \angle ACB + \angle ACD + \angle BDC + \angle BDA + \angle CAD + \angle CAB = 360^\circ \Rightarrow$

$\angle DBA + \angle CBD + \angle BDA + \angle CAB + \angle BDC + \angle BDA + \angle CBD + \angle BDC = 360^\circ \Rightarrow$

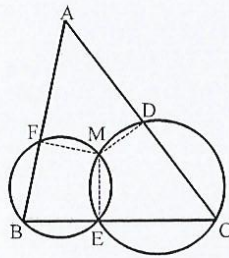
$2(\angle DBA + \angle CBD) + 2(\angle BDA + \angle BDC) = 360^\circ \Rightarrow \angle ABC + ADC = 180^\circ$

3) (Olimpíada da Alemanha-2000) Um quadrilátero convexo *ABCD* está inscrito em um semicírculo de diâmetro *AB*. Sejam *S* o ponto de interseção de *AC* e *BD* e *T* o pé da perpendicular baixada de *S* a *AB*. Mostre que *ST* divide o ângulo ∠CTD ao meio.

Solução:

Como os ΔADB e ΔACB estão inscritos em uma semi-circunferência, então ∠ADB = 90° e ∠ACB = 90°. Pela figura notamos que ∠DAC = ∠CBD. Desde que ∠DAS + ∠ATS = 180°, então o quadrilátero ATSD é inscritível. Assim, os pontos A, T, S e D pertencem a uma mesma circunferência, fazendo com que ∠DTS = ∠DAS = ∠DAC.

Analogamente, o quadrilátero BCST também é inscritível, implicando que ∠CTS = ∠CBS = ∠CBD.
Como ∠DAC = ∠CBD ⇒ ∠DTS = ∠CTS ⇒ ST divide o ângulo ∠CTD ao meio.

4) Prove que se um ponto é escolhido em cada lado de um triângulo, então as circunferências determinadas por cada vértice e os pontos nos lados adjacentes passam por um ponto fixo. Este teorema foi publicado pela primeira vez por A. Miquel em 1838.

Solução:

Consideremos inicialmente o caso em que o ponto fixo está no interior de ΔABC. Os pontos D, E e F são pontos quaisquer sobre os lados AC, BC e AB, respectivamente. Tracemos as duas circunferências que passam pelos pontos F, B, E e D, C, E. Designe por M o outro ponto de interseção, distinto de E, entre estas circunferências. Perceba agora que temos dois quadriláteros inscritíveis: BFME e CDME.

Em BFME temos: $\angle FME = 180^\circ - \angle ABC$.

Em CDME temos: $\angle DME = 180^\circ - \angle ACB$.

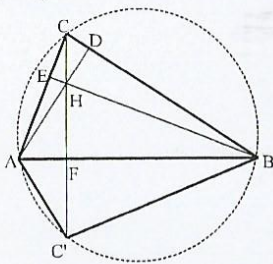
Somando estas duas equações:

$\angle FME + \angle DME = 360^\circ - (\angle ABC + \angle ACB) \Rightarrow$

$\angle FMD = \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle BAC \Rightarrow$ AFMD é um quadrilátero inscritível $\Rightarrow$ o ponto M pertence às três circunferências.

A análise do caso em que M é externo ao triângulo ΔABC é similar ao caso em que M é interno a ΔABC e fica como exercício. Como exercício fica também uma propriedade interessante associada ao Ponto de Miquel: Demonstrar que os centros das circunferências formam um triângulo semelhante a ΔABC.

5) Seja ΔABC um triângulo acutângulo de ortocentro H. Prove que os pontos simétricos de H em relação a cada lado de ΔABC pertencem à circunferência circunscrita a ΔABC. (Nota: dizemos que o ponto Y é simétrico do ponto X em relação à reta t se XY é perpendicular a t e o ponto de interseção de XY e t é o ponto médio de XY).

Solução:

Seja C' o ponto simétrico de H em relação à AB.

Como HF = FC' então $\Delta AHF \equiv \Delta AC'F \Rightarrow$

$\angle BAC' = \angle BAD = 90^\circ - B \Rightarrow \angle AC'F = B$.

Analogamente podemos afirmar que $\Delta BHF \equiv \Delta BCF \Rightarrow$

$\angle ABC' = \angle ABH = 90^\circ - A \Rightarrow \angle ABC' = A$.

Portanto: $\angle AC'B = \angle AC'F + \angle ABC' = A + B = 180^\circ - C \Rightarrow$ o quadrilátero ACBC' é inscritível $\Rightarrow$ C' pertence circunferência circunscrita a ΔABC.

Analogamente pode-se provar que os pontos simétricos de H em relação a AC e BC também pertencem ao circuncírculo de ΔABC.

6) A diferença de dois lados opostos de um quadrilátero circunscritível a um círculo é igual a 16 m e a diferença dos outros dois lados é 8 m. Calcular os lados do quadrilátero, sabendo-se que seu perímetro é 60 m.

Solução:

Suponhamos que AB = a, BC = b, CD = c e DA = d. Pelo enunciado e pelo fato que ABCD é circunscritível temos que:

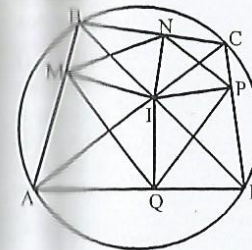
$b - d = 16$ (1) $\quad c - a = 8$ (2)

$a + b + c + d = 60$ (3) $\quad a + c = b + d$ (4)

Substituindo (4) em (3) temos que $a + c = b + d = 30$ (5).

De (1) e (5) concluímos que b = 23 e d = 7. Analogamente, de (2) e (5) concluímos que a = 19 e c = 11.

7) (IME-94) Seja ABCD um quadrilátero convexo inscrito num círculo e seja I o ponto de interseção de suas diagonais. As projeções ortogonais de I sobre os lados AB, BC, CD e DA são, respectivamente, M, N, P e Q. Prove que o quadrilátero MNPQ é circunscritível a um círculo com centro em I.

Solução:

Inicialmente note que AMIQ, DQIP, CPIN e BNIM são quadriláteros inscritíveis pois todos possuem dois ângulos opostos somando 180°.

Como AMIQ é inscritível $\Rightarrow \angle MQI = \angle MAI$, pois estes dois ângulos compreendem a mesma corda na circunferência circunscrita a AMIQ.

Perceba agora que $\angle MAI = \angle BAC = \angle BCD$, pois $\angle BAC$ e $\angle BCD$ compreendem a mesma corda na circunferência circunscrita a ABCD.

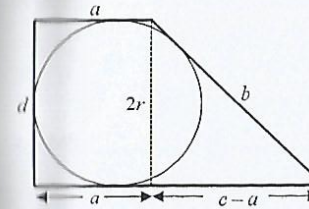
Repare agora que $\angle BCD = \angle PQI$, já que estes dois ângulos compreendem a mesma corda na circunferência circunscrita a DQIP.

Portanto, temos que $\angle MQI = \angle PQI$, ou seja, QI é a bissetriz de $\angle MQP$.

Analogamente pode-se demonstrar que PI é bissetriz de QPN, NI é bissetriz PNM e MI é bissetriz de NMQ. Desde que a bissetriz de um ângulo qualquer $X\hat{O}Y$ é o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a OX e OY são iguais, então I (que é a interseção das bissetrizes dos ângulos internos de MNPQ) é o ponto cujas distâncias a MQ, QP, PN e NM são todas iguais, ou seja, existe uma circunferência inscrita em MNPQ com centro em I.

8) (ITA-2002) Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2 cm. Se r é o raio da circunferência inscrita e a é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma $a + r$ (em cm) é igual a:

a) 12 b) 11 c) 10 d) 9 e) 8

Solução:

Inicialmente devemos notar que em um trapézio retângulo circunscritível o menor lado é a base menor.

Desde que o quadrilátero é circunscritível:

$b + d = a + c = 18$ cm.

Pelo enunciado: $b - d = 2$ cm $\Rightarrow b = 10$ cm $d = 8$ cm.

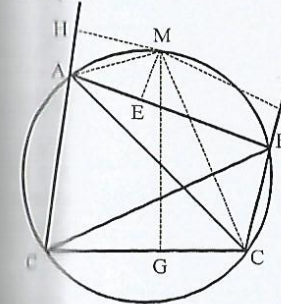
Assim: $r = d/2 = 4$ cm.

Separemos agora o trapézio em um retângulo e um triângulo através de uma reta perpendicular às bases.

Aplicando o Teorema de Pitágoras: $b^2 = (2r)^2 + (c - a)^2 \Rightarrow 100 = 64 + (c - a)^2 \Rightarrow c - a = 6$ cm.

Como $a + c = 18$ cm então $a = 6$ cm e $c = 12$ cm. Deste modo, temos que $a + r = 6 + 4 = 10$ cm.

9) Provar que em todo quadrilátero inscritível, o produto das distâncias de um ponto qualquer do circuncírculo a dois lados opostos é igual ao produto das distâncias aos outros dois lados opostos.

Solução:

E, F G e H são os pés das perpendiculares de um ponto M, sobre a circunferência, a AB, BC, CD e DA, respectivamente.

Como $\angle MCF = \angle MAE$ então $\Delta MCF \sim \Delta MAE \Rightarrow$

$\dfrac{ME}{MA} = \dfrac{MF}{MC} \Rightarrow \dfrac{ME}{MF} = \dfrac{MA}{MC}$.

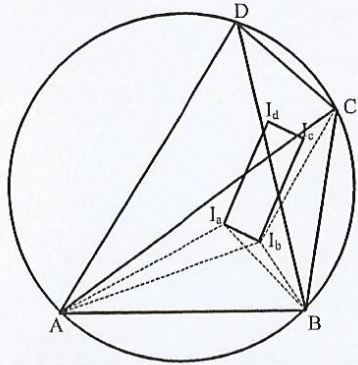
Como AMCD é inscritível então:

$\angle MCD = \angle MCG = 180^\circ - \angle MAD = \angle MAH \Rightarrow$

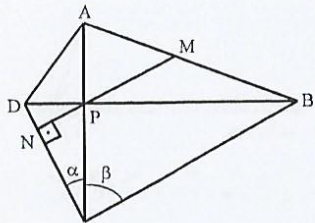
$\Delta MAH \sim \Delta MCG \Rightarrow \dfrac{MH}{MA} = \dfrac{MG}{MC} \Rightarrow \dfrac{MH}{MG} = \dfrac{MA}{MC}$.

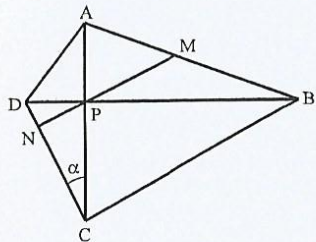
Portanto: $\dfrac{ME}{MF} = \dfrac{MH}{MG} \Rightarrow ME.MG = MF.MH$

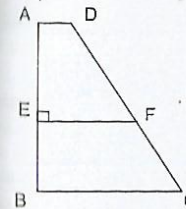
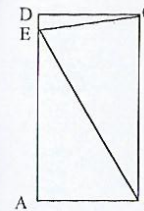
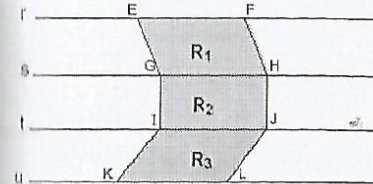
11) Seja ABCD um quadrilátero inscritível e sejam I_a, I_b, I_c, e I_d, respectivamente, os incentros dos triângulos ΔDAB, ΔABC, ΔBCD, ΔCDA. Prove que $I_aI_bI_cI_d$ é um retângulo.

Demonstração:

Desde que $\angle DAB = \angle ACB$ então
$\angle DAB + \angle DBA = \angle CAB + \angle CBA$.
Desde modo: $\angle I_cAI_d = \angle I_cAB - \angle I_dAB =$
$= (\angle DAB)/2 - (\angle CAB)/2 = (\angle CBA)/2 - (\angle DBA)/2 =$
$= \angle I_dBA - \angle I_cBA = I_cBI_c \Rightarrow$ A, B, I_d, I_c pertencem a uma mesma circunferência.
Analogamente temos que A, D, I_b, I_c também pertencem a uma mesma circunferência.
Assim: $\angle I_bI_cI_d = 360^\circ - (\angle I_dI_cA + \angle I_bI_cA) =$
$= 180^\circ - \angle I_dI_cA + 180^\circ - \angle I_bI_cA = \angle I_dBA + \angle I_bDA =$
$= (\angle CBA)/2 + (\angle ADC)/2 = 90^\circ$.
Analogamente pode-se demonstrar que os outros três ângulos de $I_aI_bI_cI_d$ são iguais a 90°.

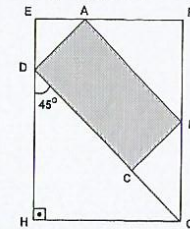
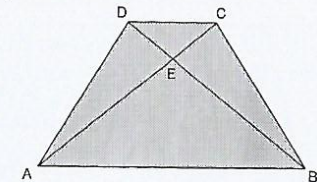
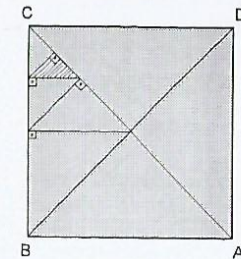
12) (Olimpíada do Cone Sul-2002) Seja *ABCD* um quadrilátero convexo tal que suas diagonais *AC* e *BD* são perpendiculares. Seja *P* a interseção de *AC* e *BD* e seja *M* o ponto médio de *AB*. Mostre que o quadrilátero *ABCD* é inscritível se, e somente se, as retas *PM* e *CD* são perpendiculares.

Solução:

Sejam $\alpha = \angle DCA$ e $\beta = \angle BCA$. Suponha que $PM \perp CD$.
Assim, temos que $\angle NPC = \angle MPA = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle MPB = \alpha$.
Como PM é mediana relativa à hipotenusa de ΔAPB, então PM = MB, ou seja, ΔPMB é isósceles $\Rightarrow \angle PBM = \alpha \Rightarrow$
$\angle PAB = 90^\circ - \alpha$.
Portanto, temos que $\Delta APB \sim \Delta PDC \Rightarrow \dfrac{AP}{BP} = \dfrac{DP}{CP} \Rightarrow$
$\dfrac{AP}{DP} = \dfrac{BP}{CP}$, ou seja, temos que $\Delta DPA \sim \Delta BPC \Rightarrow$
$\angle PAD = \angle PBC = 90^\circ - \beta$.
Assim, temos que: $\angle BAD = \angle BAP + \angle DAP = 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta$
$= 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - \angle DAC \Rightarrow$ ABCD é inscritível.

Suponha agora que ABCD é inscritível.
Perceba que $\angle DCA = \angle DBA = \alpha$, uma vez que estes dois ângulos compreendem a mesma corda AD no circuncírculo de ABCD.
Como PM é mediana relativa à hipotenusa de ΔAPB, então PM = MB, ou seja, ΔPMB é isósceles $\Rightarrow \angle BPM = \alpha \Rightarrow$
$\angle PAB = \angle PNC = 90^\circ - \alpha$.
Desde que $\angle PCN = \alpha$ e $\angle PNC = 90^\circ - \alpha$, então $\angle PNC = 90^\circ \Rightarrow$ PM e CD são perpendiculares.

Exercícios

1) (UFRN-97) Considere um terreno trapezoidal com bases BC e AD, e altura AB, medindo, respectivamente, como visto na figura, 140 m, 40 m e 180 m. Determine a área total do trapézio ABCD e quanto mede AE e EF, de modo que o terreno seja dividido em dois de mesma área.

2) (UFRN-98) Na figura abaixo, tem-se um retângulo ABCD com AB = 1m e BC = 2m. Sabendo que BE = BC, calcule a área do triângulo CDE.

3) (UFRN-2002) Na figura abaixo, r, s, t e u são retas paralelas e eqüidistantes. Os segmentos EF, GH, IJ e KL são congruentes.

Se $S(R_i)$ representa a área da região R_i, i = 1, 2, 3, então

a) $S(R_1) = S(R_2) < S(R_3)$
b) $S(R_1) = S(R_2) = S(R_3)$
c) $S(R_2) > S(R_3) > S(R_1)$
d) $S(R_1) < S(R_2) < S(R_3)$

4) (Covest-99) A figura abaixo ilustra dois retângulos, ABCD e EFGH onde AE mede 3 cm e B é o ponto médio de FG. Qual é a área do retângulo ABCD, em cm²?

5) (Covest-2002) No trapézio ABCD da figura a seguir, os lados AB e CD são paralelos e AB mede o triplo de CD. Se o triângulo CDE tem área 4, assinale a área de ABCD.

6) (Covest-2003) Qual a área do triângulo hachurado na figura, sabendo-se que o lado do quadrado ABCD vale 2 cm?

a) $\dfrac{1}{2}\text{cm}^2$ b) $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right)\text{cm}^2$ c) $\dfrac{1}{8}\text{cm}^2$
d) $\dfrac{1}{6}\text{cm}^2$ e) $\dfrac{1}{16}\text{cm}^2$

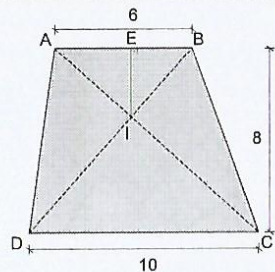
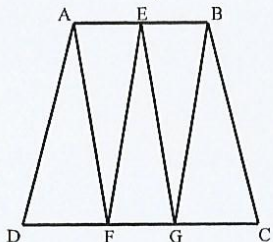
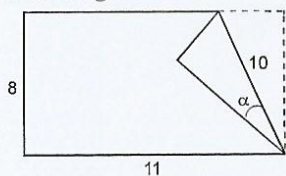
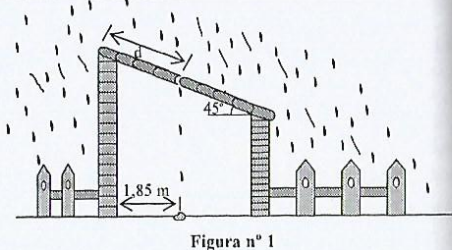
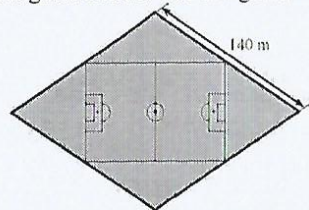
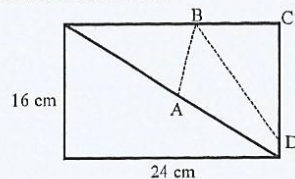
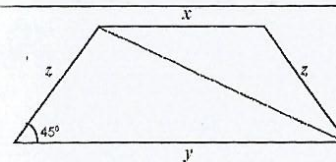
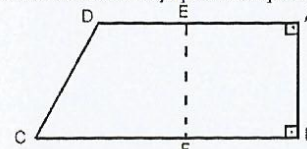
7) (Covest-2003) No trapézio ABCD, calcule a altura IE do triângulo ABI, sabendo que a altura do trapézio é 8 e que seus lados paralelos medem 6 e 10.

8) (Covest-2004) O trapézio isósceles **ABCD** da figura abaixo tem **AB** e **CD** paralelos e os pontos **E, F** e **G** são tais que **AE = EB = DF = FG = GC = 60.** Se **AD = 191**, calcule **AC.**

9) (UFPB-99) Uma folha de papel retangular é dobrada, conforme a figura ao lado. Determine o valor de $40\ tg\alpha$.

10) (UFMS-2000) Uma telha de um galinheiro quebrou. Em dias chuvosos, uma goteira produz no chão, embaixo da telha quebrada, uma pequena poça d'água, a 1,85 m de uma das paredes do galinheiro, conforme **figura nº 1.** Considerando que a espessura dessa parede é 15 cm e que **d** é a distância entre o ponto mais alto do telhado e a quebra da telha, calcular, em metros, $d^2 + 20$.

Figura nº 1

11) (UFMS-2002) Um terreno será gramado para que nele, futuramente, possa ser demarcado um campo de futebol. Esse terreno tem a forma de um losango (paralelogramo de lados iguais) cujos lados medem 140 m e cuja medida de um de seus ângulos internos é de 150 graus.

Sabendo-se que, para gramar uma área de 10 m^2, é necessário um pacote de 100 gramas de sementes, então, para gramar o terreno, serão usados

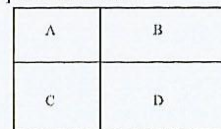
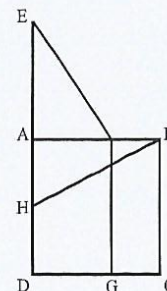
a) 98 kg de sementes. b) 196 kg de sementes.
c) 70 kg de sementes. d) 10 kg de sementes.
e) 9,8 kg de sementes.

12) (UFG-2003) A figura abaixo representa uma folha de papel retangular que mede 24 cm por 16 cm. A folha será dobrada na linha pontilhada *BD* de modo que o vértice *C* coincida com o ponto médio da diagonal do retângulo, indicado por *A*. Calcule medida do segmento *AB* e o comprimento da dobra *BD*.

13) (UFOP-2001) Um terreno com 100 m^2 de área tem a forma de um trapézio isósceles, cuja diagonal mede $10\sqrt{3}$ m, conforme figura abaixo.

Determine as dimensões *x, y* e *z* do terreno.

14) (UFOP-2002) Um terreno na forma abaixo foi deixado como herança para duas pessoas.

Deverá, portanto, ser dividido em duas partes de áreas iguais por uma reta EF, paralela ao lado AB. Sendo AD = 60m, BC = 100m e CD = 50m, DE medirá, em metros

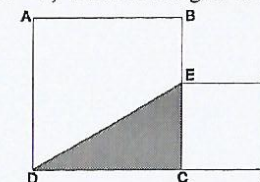
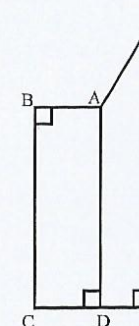
a) 10 b) 15 c) 20 d) 25

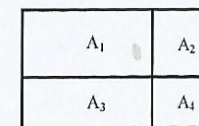
15) (UFU-98) Considere um retângulo e dois segmentos de reta paralelos aos seus lados, de forma que estes dividam este retângulo em quatro outros retângulos A, B, C e D, como na figura abaixo. Sabendo-se que os perímetros de A, B e C são, respectivamente, 2, 4 e 4 cm, encontre o perímetro de D.

A	B
C	D

16) (UFU-99) Na figura abaixo, temos que o quadrilátero ABCD é um quadrado e o triângulo AEF é retângulo isósceles. Se AH = AB/2, HE = HB e AB = 1 m, determina a razão entre as áreas do triângulo AEF e do retângulo FBCG.

17) (Mackenzie-2003) As bases de um trapézio isósceles medem 7 e 13. Se a altura do trapézio é 4, o seu perímetro é:

a) 27 b) 25 c) 20 d) 30 e) 40

18) (Mackenzie-2003) Na figura,a diferença entre as áreas dos quadrados ABCD e EFGC é 56. Se $\overline{BE} = 4$, á área do triângulo CDE vale:

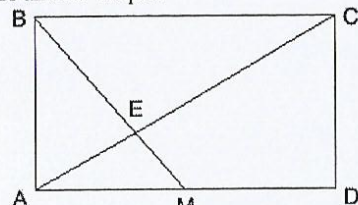
a) 18,5
b) 20,5
c) 22,5
d) 24,5
e) 26,5

19) (Mackenzie-2004) Os quadriláteros ABCD e ADEF têm áreas iguais. Se BC = 4, CE = 9/4 e EF = 6, o valor de AF é:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{6}$ c) 5/2 d) 7/3 e) $\sqrt{5}$

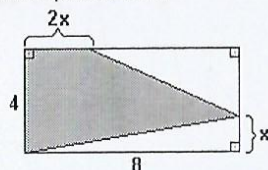
20) (PUC/SP-2004) Pretende-se dividir um salão de forma retangular em quatro salas, também retangulares, como mostra a figura abaixo.

A_1	A_2
A_3	A_4

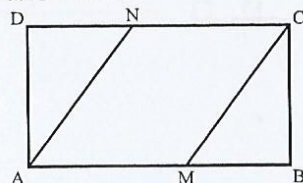
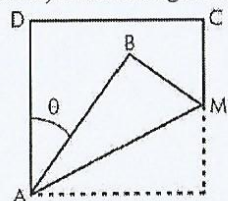
Se A_1, A_2, A_3 e A_4 são as áreas das salas pretendidas e considerando que $A_1 + A_2 + A_3 = 36$ m^2, $A_1 - A_2 = 12$ m^2 e $A_3 = 2.A_2$, a área da quarta sala, em metros quadrados, é:

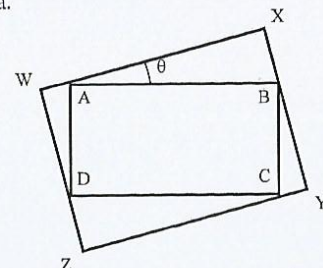
a) 4 b) 4,5 c) 4,8 d) 5 e) 5,5

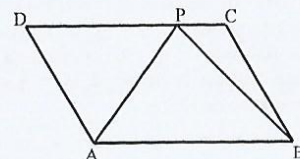
21) (FEI-2000) Na figura abaixo, ABCD é um retângulo e M é ponto médio de AD. Considerando-se **x** a medida da área do triângulo

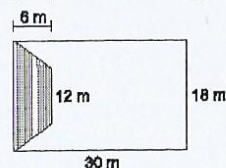
AEM e y a medida da área do triângulo AEB, é válido afirmar-se que:

a) 2x = y b) 3x = y c) 4x = y
d) x = y e) 3x = 2y

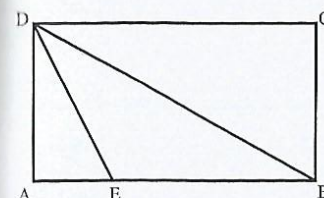
22) (ESPM-2003) Na figura abaixo, fazendo-se o valor de x variar de 0 a 4, a área da região sombreada também varia. O valor máximo que essa área poderá ter é:

a) 30 b) 24 c) 20 d) 18 e) 16

23) (FGV-2004) Na figura a seguir, ABCD é um retângulo e AMCN é um losango. Determine a medida do segmento NB, em cm, sabendo que AB = 2AD = 20 cm.

24) (UERJ-2002) Observe a figura abaixo:

Ela representa um papel quadrado ABCD, com 10 cm de lado, que foi dobrado na linha AM, em que M é o ponto médio do lado BC. Se, após a dobra, A, B, C, D e M são coplanares, determine:
a) a distância entre o ponto B e o segmento CD;
b) o valor de tg θ.

25) (UFRJ-2001) O retângulo ABCD está inscrito no retângulo WXYZ, como mostra a figura.

Sabendo que AB = 2 e AD = 1, determine o ângulo θ para que a área de WXYZ seja a maior possível.

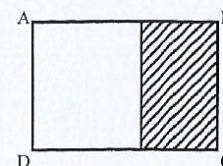
26) (UFMG-2003) No paralelogramo ABCD, da figura abaixo, o ponto P, contido no lado CD, é tal que o segmento PC mede 4 cm, os segmentos AP e PB medem 14 cm cada um e os ângulos DÂP e PÂB têm a mesma medida.

DETERMINE a medida do lado *AD*.

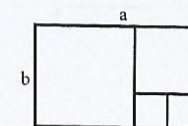
27) (Unifesp-2003) Um comício deverá ocorrer num ginásio de esportes, cuja área é delimitada por um retângulo, mostrado na figura.

Por segurança, a coordenação do evento limitou a concentração, no local, a 5 pessoas para cada 2 m^2 de área disponível. Excluindo-se a área ocupada pelo palanque, com a forma de um trapézio (veja as dimensões da parte hachurada na figura), quantas pessoas, no máximo, poderão participar do evento?
a) 2 700. b) 1 125. c) 1 620.
d) 1 050. e) 1 350.

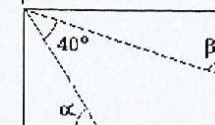
28) (Unesp-2004) Na figura, ABCD é um retângulo, BD = 6 cm, a medida do ângulo ABD é α = 30°, a medida do ângulo AÊD é β e x = BE.

Determine:
a) a área do triângulo BDE, em função de x.
b) o valor de x, quando β = 75°.

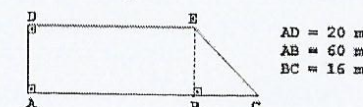
29) (Unicamp-98) O quadrilátero formado unindo-se os pontos médios dos lados de um quadrado é também um quadrado.
a) Faça uma figura e justifique a afirmação acima.
b) Supondo que a área do quadrado menor seja de 72 cm^2, calcule o comprimento do lado do quadrado maior.

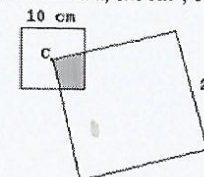
30) (Unicamp-2001) Um fio de 48cm de comprimento é cortado em duas partes, para formar dois quadrados, de modo que a área de um deles seja quatro vezes a área do outro.
a) Qual deve ser o comprimento de cada uma das partes do fio?
b) Qual será a área de cada um dos quadrados formados?

31) (Fuvest-91) O retângulo ABCD representa um terreno retangular cuja largura é 3/5 do comprimento. A parte hachurada representa um jardim retangular cuja largura é também 3/5 do comprimento. Qual a razão entre a área do jardim e a área total do terreno?

a) 30% b) 36% c) 40% d) 45% e) 50%

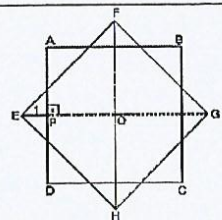
32) (Fuvest-92) O retângulo abaixo de dimensões a e b está decomposto em quadrados. Qual o valor da razão a/b?

a) 5/3 b) 2/3 c) 2 d) 3/2 e) 1/2

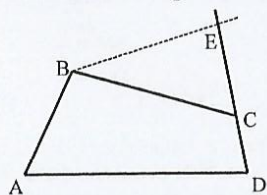
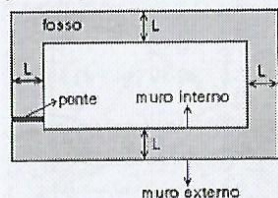
33) (Fuvest-97) No retângulo abaixo, o valor, em graus, de α + β é:

a) 50 b) 90 c) 120 d) 130 e) 220

34) (Fuvest-99) Dois irmãos herdaram um terreno com a seguinte forma e medidas:

Para dividir o terreno em duas partes de mesma área, eles usaram uma reta perpendicular a $\overline{AB}$. Para que a divisão seja feita corretamente, a distância dessa reta ao ponto A, em metros, deverá ser:
a) 31 b) 32 c) 33 d) 34 e) 35

35) (Fuvest-99) Os quadrados da figura têm lados medindo **10 cm** e **20 cm**, respectivamente. Se **C** é o centro do quadrado de menor lado, o valor da área hachurada, em $\mathbf{cm^2}$, é:

a) 25 b) 27 c) 30 d) 35 e) 40

36) (Fuvest-2000) Um trapézio retângulo tem bases **5** e **2** e altura **4**. O perímetro desse trapézio é:
a) 13 b) 14 c) 15 d) 16 e) 17

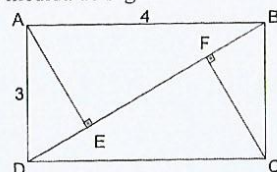
37) (Fuvest-2001) Na figura abaixo, os quadrados **ABCD** e **EFGH** têm, ambos. Lados e a cento **O**. Se **EP = 1**, então a é:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) 2 e) $\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}$

38) (Fuvest-2001) Na figura abaixo, a reta r é paralela ao segmento AC, sendo E o ponto de interseção de r com a reta determinada por D e C. Se as áreas dos triângulos ACE e ADC são 4 e 10, respectivamente, e a área do quadrilátero ABED é 21, então a área do triângulo BCE é:

39) (Fuvest-2002) Um senhor feudal construiu um fosso, circundado por muros, em volta de seu castelo, conforme a planta abaixo, com uma ponte para atravessá-lo. Em um certo dia, ele deu uma volta completa no muro externo, atravessou a ponte e deu uma volta completa no muro interno. Esse trajeto foi completado **5320** passos. No dia seguinte, ele deu duas voltas completas no muro, externo, atravessou a ponte e deu uma volta completa no muro interno, completando esse novo trajeto em **8120** passos. Pode-se concluir que a largura **L** do fosso, em passos, é:

a) 36 b) 40 c) 44 d) 48 e) 50

40) (ESSA-2001) Um trapézio ABCD é retângulo em A e D e suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares. Sabendo que suas bases $\overline{DC}$ e $\overline{AB}$ medem 1 cm e 9 cm, respectivamente, calcule a medida (em cm) do lado $\overline{AD}$.

a) $\sqrt{10}$ b) $2\sqrt{2}$ c) 3 d) 9 e) 10

41) (Epcar-2001) Na figura abaixo, ABCD é um retângulo. A medida do segmento EF é

a) 0,8
b) 1,4
c) 2,6
d) 3,2

42) (Epcar-2003) Num quadrado ABCD de lado 3 cm, os pontos P e Q dividem a diagonal $\overline{AC}$, nessa ordem, em partes iguais. A distância de P ao vértice B é um número x que dividido por $(\sqrt{5}+1)$ resulta

a) $\frac{5+\sqrt{5}}{4}$ b) $\frac{5-\sqrt{5}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ d) $\frac{5\sqrt{5}-5}{4}$

43) (Colégio Naval-79/80) A área máxima do retângulo que se pode inscrever no triângulo retângulo de catetos com **3 cm** e **4 cm** de maneira que dois lados do retângulo estejam sobre os catetos e um vértice do retângulo sobre a hipotenusa é, em cm^2:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 4,5 e) 3,5 cm^2

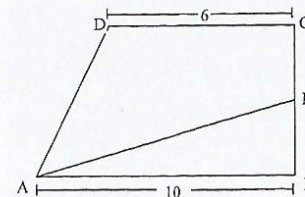
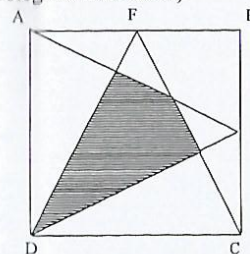
44) (Colégio Naval-80/81) As bases de um trapézio isósceles medem **8 cm** e **4 cm** e a altura **6 cm**. As diagonais desse trapézio dividem-no em quatro triângulo. A área, em $\mathbf{cm^2}$, de um dos triângulos que não contêm nenhuma das bases é:

a) 8 b) 6 c) 9 d) 10 e) 12

45) (Colégio Naval-86/87) As bases de um trapézio medem 3 cm e 9 cm. Os segmentos determinados pelas diagonais do trapézio sobre a base media, são proporcionais aos números:

a) 1, 1, 1 b) 1, 2, 1 c) 1, 3, 1
d) 1, 4, 1 e) 2, 3, 4

46) (Colégio Naval-87/88) O trapézio ABCD da figura é retângulo. A bissetriz do ângulo $\hat{A}$ intercepta $\overline{BC}$ no seu ponto médio M. A altura do trapézio é igual a:

a) $2\sqrt{15}$
b) $8\sqrt{15}$
c) $6\sqrt{15}$
d) $4\sqrt{15}$
e) $5\sqrt{15}$

47) (Colégio Naval-90/91)

No quadrado ABCD de área S da figura acima, os pontos E e F, são médios. A área da parte hachurada é:

48) (Colégio Naval-94/95) Um retângulo é obtido unindo-se os pontos médios de um trapézio retângulo ABCD, de bases AB = 32 e CD = 8. A altura BC é igual a:

a) 8 b) 10 c) 12 d) 16 e) 20

49) (Colégio Naval-96/97) O número de trapézios distintos que se pode obter dispondo de 4, e apenas 4, segmentos de reta medindo, respectivamente, 1 cm, 2 cm, 4 cm e 5 cm é:

a) nenhum b) um c) dois d) três e) quatro

50) (Colégio Naval-2000/2001) A, B, C e D são vértices consecutivos de um quadrado e PAB é um triângulo eqüilátero, sendo P interno ao quadrado ABCD. Qual é a medida do ângulo PCB?

a) 30° b) 45° c) 60° d) 75° e) 90°

51) (Colégio Naval-2000/2001) Considere três quadrados de bases AB, CD e EF, respectivamente. Unindo-se o vértice A com F, B com C e D com E, observa-se que fica formado um triângulo retângulo. Pode-se afirmar que:

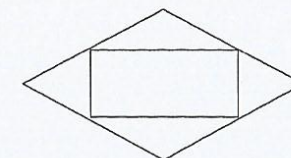
I – O perímetro do quadrado de maior lado é igual à soma dos perímetros dos outros dois quadrados.

II – A área do quadrado de maior lado é igual à soma das áreas dos outros dois quadrados.

III – A diagonal do quadrado maior é igual à soma das diagonais dos outros dois quadrados.

Logo, apenas:

a) A afirmativa I é verdadeira.
b) A afirmativa II é verdadeira.
c) A afirmativa III é verdadeira.
d) As afirmativas I e II são verdadeiras.
e) As afirmativas II e III são verdadeiras.

52) (Colégio Naval-2001/2002)

Considere um retângulo inscrito em um losango, conforme a figura acima. Se as diagonais do losango medem, respectivamente, 8cm e 12cm e a área do retângulo é $24cm^2$, então o perímetro desse retângulo, em cm, é igual a:

a) 28 b) 24 c) 22 d) 20 e) 18

53) (Colégio Naval-2001/2002) As dimensões de um retângulo são, em metros, indicadas por x e y. Sua área aumenta $52m^2$ quando acrescenta-se 2m a x e 4m a y. Sua superfície diminui $52m^2$ quando subtrai-se 2m de x e 8m de y. Qual o valor de x?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

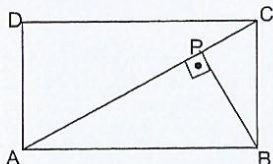
54) (Colégio Naval-2001/2002) Considere um quadrado ABCD e dois triângulos eqüiláteros ABP e BCQ, respectivamente, interno e externo ao quadrado. A soma das medidas dos ângulos $A\hat{D}P$, $B\hat{Q}P$ e $D\hat{P}Q$ é igual a:

a) 270° b) 300° c) 330° d) 360° e) 390°

55) (Colégio Naval-2002/2003) Em um trapézio, cujas bases medem **a e b**, os pontos **M** e **N** pertencem aos lados não-paralelos. Se $\overline{MN}$ divide esse trapézio em dois outros trapézios equivalentes, então a medida do segmento $\overline{MN}$ corresponde a.

a) Média aritmética de a e b.
b) Média geométrica das bases.
c) Raiz quadrada da média aritmética de $\mathbf{a^2}$ e $\mathbf{b^2}$.
d) Raiz quadrada da média harmônica de $\mathbf{a^2}$ e $\mathbf{b^2}$.

e) Média harmônica de **a** e **b**.

56) (AFA-94) No retângulo **ABCD**, $\overline{BC}$ e $\overline{PC}$ medem, respectivamente, **5cm** e **3cm**. Qual a área, em **cm²**, do triângulo **ABP**?

a) 32/3 b) 16 c) 19 d) 62/3

57) (AFA-98) Dois vértices de um triângulo eqüilátero pertencem a dois lados de um quadrado cuja área é 1 m². Se o terceiro vértice do triângulo coincide com um dos vértices do quadrado, então, a área do triângulo, em m², é

a) $2\sqrt{3} - 1$ b) $2\sqrt{3} + 1$

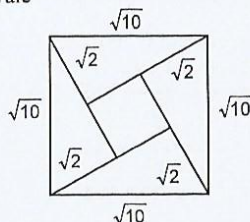
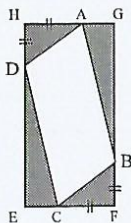
c) $-3 + 2\sqrt{3}$ d) $3 + 2\sqrt{3}$

58) (AFA-99) A área do quadrado menor, da figura abaixo, vale

a) $\sqrt{2}$.

b) 2 .

c) $\sqrt{5}$.

d) $\sqrt{8}$.

59) (AFA-2003 Fem) Em recente reforma nos jardins da AFA, um canteiro gramado retangular medindo 3 m por 5 m foi reformado e recebeu, em seu interior, flores ornamentais ocupando o quadrilátero ABCD na maior área possível, preservando o resto do gramado, conforme figura abaixo.

Sabendo-se que os triângulos AHD e BCF são isósceles e congruentes, a superfície S do gramado que foi retirada do canteiro original para receber as flores, em m², é tal que S/2 vale

a) 3,5 b) 4,0 c) 4,5 d) 5,0

60) (AFA-2003 Fem) Em um quadrado ABCD de lado k, colocam-se os pontos P e Q sobre os lados BC e CD, respectivamente, de forma que PC = 3PB e QD = 2QC. É correto afirmar que a razão entre as áreas dos triângulos PCD e PCQ, nessa ordem, é um número

a) quadrado perfeito. b) irracional.

c) par. d) ímpar.

61) (Escola Naval-92) Um trapézio retângulo tem bases **4** e **6**. A distância do ponto de interseção das diagonais ao lado que é perpendicular às bases vale:

a) 2 b) 2,2 c) 2,4 d) 2,5 e) $2\sqrt{2}$

62) (Escola Naval-94) Os lados de um paralelogramo medem **4cm** e **6cm** e uma de suas diagonais mede **8cm**. O comprimento da outra diagonal é:

a) $2\sqrt{10}$ cm b) 8 cm c) 10 cm

d) $10\sqrt{2}$ cm e) $2\sqrt{42}$ cm

63) (ITA-88) Num losango ABCD, a soma dos ângulos obtusos é o triplo da soma das medidas dos ângulos agudos. Se a sua diagonal menor mede d cm então sua aresta medirá:

a) $\dfrac{d}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ b) $\dfrac{d}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ c) $\dfrac{d}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

d) $\dfrac{d}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}$ e) $\dfrac{d}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$

64) (ITA-93) A diagonal menor de um paralelogramo divide um dos ângulos internos em dois outros, um α e outro 2α. A razão entre o lado menor e o maior do paralelogramo, é:

a) $1/\cos 2\alpha$ b) $1/\text{sen } 2\alpha$ c) $1/(2\text{sen } \alpha)$

d) $1/(2\cos \alpha)$ e) $\text{tg } \alpha$

65) (ITA-2003) Considere um quadrado ABCD. Sejam E o ponto médio do segmento $\overline{CD}$ e F um ponto sobre o segmento $\overline{CE}$ tal que $m(\overline{BC}) + m(\overline{CF}) = m(\overline{AF})$. Prove que $\cos \alpha = \cos 2\beta$, sendo os ângulos $\alpha = B\hat{A}F$ e $\beta = E\hat{A}D$.

66) (IME-64) Provar que, em qualquer trapézio, a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados dos lados não paralelos mais o dobro do produto das bases.

67) (IME-65) Dado o trapézio de bases b = 20, B = 30 e lados a = 12, c = 10, dividir a área desse trapézio por uma reta paralela às bases, de modo que as áreas resultantes sejam proporcionais a 3 e 7, sendo B a área da base maior. Calcular a distância y da reta à base da área maior.

68) (IME-98) Quatro retas se interceptam formando quatro triângulos conforme figura abaixo. Prove que os círculos circunscritos aos quatro triângulos possuem um ponto em comum.

69) (IME-86/87) Seja ABCD um quadrilátero circunscritível. Demonstre que os círculos inscritos nos triângulos ABC e ACD têm, com a diagonal AC, um mesmo ponto em comum.

70) Pelo vértice A de um paralelogramo ABCD, traça-se uma secante que corta a diagonal BD em E e os lados CB e CD em F e G, respectivamente. Demonstrar que EA² = EF x EG.

71) Pelo vértice C de um paralelogramo ABCD, traça-se uma reta que divide a diagonal BD em duas partes, sendo uma delas o quádruplo da outra. Mostrar que essa secante divide o lado AD em duas partes, sendo uma o triplo da outra.

72) Em um trapézio ABCD com AB || CD, AB = 20, CD = 3, ∠ABC = 32° e ∠BAD = 58°. Calcule a distância entre os pontos médios de AB e CD.

73) Sejam D e E pontos sobre os lados AC e AB, respectivamente, de um triângulo ABC. Sabe-se que o perímetro do triângulo ABC vale 10 cm e a base BC mede 4 cm. Determine o perímetro do triângulo ADE sabendo que o quadrilátero BCDE é circunscritível.

74) AB e CD são as bases de um trapézio e I é o ponto de interseção das diagonais. Provar que a área do triângulo AID é igual à área de BIC e que a área AID é media geométrica das áreas de AIB e CID.

75) Sejam a e b as bases de um trapézio e seja d o segmento paralelo às bases passando pelo concurso das diagonais.
Prove que $d = 2a.b/(a-b)$.

76) Seja ABCD um trapézio cujos bases medem a e b, cujos lados não paralelos medem c e d. Prove que as diagonais deste trapézio medem

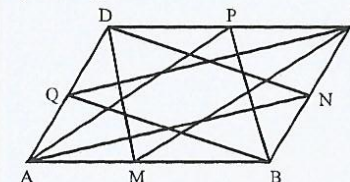
$$m = \sqrt{a.b + \frac{a.c^2 - b.d^2}{a-b}} \quad \text{e}$$

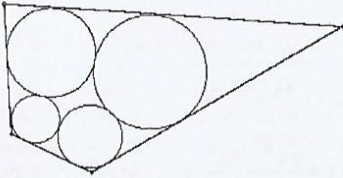
$$n = \sqrt{a.b + \frac{a.d^2 - b.c^2}{a-b}}$$

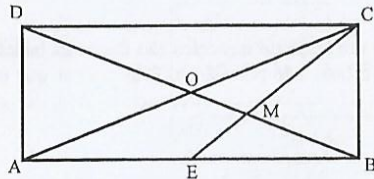
77) Seja ABCD um trapézio cujas bases medem a e b e cujas diagonais medem m e n. Sendo ℓ o comprimento do segmento que une os meios das duas bases, demonstre que: $4\ell^2 = 2(m^2 + n^2) - (a+b)^2$.

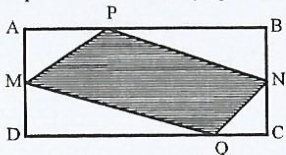
78) Em um trapézio isósceles são dados as bases a e c e o lado não paralelo b. Demonstrar que o raio da circunferência circunscrita é igual a

$$b\sqrt{\frac{ac+b^2}{(2b+c-a)(2b+a-c)}}.$$

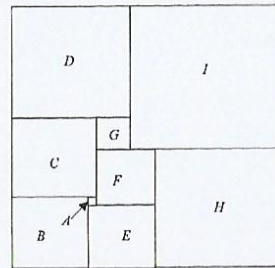
79) (OBM-79) Seja um paralelogramo ABCD e sejam M, N, P e Q os pontos médios, respectivamente, dos lados AB, BC, CD e DA. Unindo cada vértice do paralelogramo aos pontos médios dos lados não adjacentes, obtemos o octógono estrelado ANDMCQBPA. Mostre que a área deste octógono é 3/5 da área do paralelogramo.

80) Seja P um ponto no interior de ΔABC. Sejam D, E e F os pés das perpendiculares desde P à BC, CA e AB, respectivamente. Se os três quadriláteros AEPF, BFPD e CDPE são circunscritíveis, prove que P é o encontro das bissetrizes de ΔABC.

81) Quatro circunferências estão situadas no interior de quadrilátero convexo de tal modo que cada uma é tangente a dois lados do quadrilátero e a outras duas circunferências.

Sabendo-se este quadrilátero é circunscritível, prove que ao menos duas circunferências possuem igual ao raio.

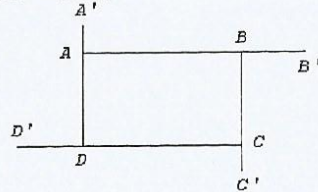
82) (Pará-2000) Se ABCD é um retângulo com AB = 10, CB = 4 e AE = EB, qual a área do triângulo OCM?

a) 2 b) $2\frac{1}{3}$ c) $2\frac{2}{3}$ d) 3 e) $3\frac{1}{3}$

83) (Pará-2001) ABCD é um retângulo, M e N são os pontos médio dos lados AD e BC, respectivamente. P é um ponto sobre o lado AB que pode ocupar qualquer posição sobre este lado. Analogamente, Q é um ponto sobre o lado CD, que também pode andar sobre este lado. Determine quais devem ser as posições de P e Q sobre seus segmentos suportes de modo que a área do quadrilátero MPNQ seja máxima.

84) (Pará-2003) Seja ABCD um retângulo e AC uma diagonal. Traçam-se desde B e desde D perpendiculares à diagonal AC, que a intersectam em P e Q, respectivamente. Sabe-se que os pontos P e Q dividem AC em três segmentos iguais, de comprimento 1. Determinar a área do retângulo ABCD.

85) (OBM Jr.-95) ABCD é um quadrilátero convexo; M e N são os pontos médios dos lados AB e CD. Prove que se o segmento MN divide o quadrilátero em dois de mesma área, então ABCD é um trapézio.

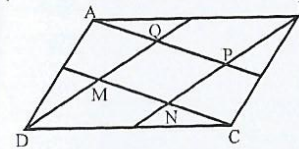
86) (OBM-2000) O retângulo ao lado está dividido em 9 quadrados, *A, B, C, D, E, F, G, H* e *I*. O quadrado *A* tem lado 1. Qual é o lado do quadrado *I*?

87) (Cabri-99) Seja *ABCD* um quadrado de lado 5. Seja *P* um ponto em seu interior tal que *PA* = 3 e *PB* = 4. Achar os comprimentos de *PC* e de *PD*.

88) (Cabri-99) Seja *ABCD* um retângulo tal que *AB* = 2 e *BC* = 1. Seja *M* o ponto médio de *CD*. Achar a distância de *M* à reta *AC*.

89) (Argentina-95) Seja *ABCD* um retângulo e *A', B', C'* e *D'* nos prolongamentos de seus lados tais que *AA'* = *k.AD* ; *BB'* = *k.AB* ; *CC'* = *k.BC* ; *DD'* = *k.CD*.

Determinar *k* de modo que a área do quadrilátero *A'B'C'D'* seja 25 vezes a área do retângulo *ABCD*.

90) (Cabri-2001) Um trapézio *ABCD* tem os lados *AB* e *CD* paralelos e os ângulos ∠*DAB* e ∠*ABC* obtusos. Sabe-se também que *AB* = 3, *BC* = 10, *CD* = 24 e *AD* = *17*. Achar a área de ABCD.

91) (Novo México-90) Suponha que o quadrilátero ABCD está circunscrito a uma circunferência e que BC = 11 cm, CD = 9 cm e DA = 15 cm. Qual é o comprimento de AB?

92) (Novo México-91) Retas são traçadas unindo os vértices de um paralelogramo aos pontos médios dos lados, como indicado na figura, formando um paralelogramo menor MNPQ de área 7 cm^2 no centro. Qual é a área do paralelogramo original ABCD?

93) (Novo México-91) Suponha que as diagonais AC e BD de um trapézio isósceles ABCD (AB || CD e ∠BAD = ∠ABC) concorrem em P. Se as áreas do ΔPAB e ΔPCD são 36 cm^2 e 25 cm^2, respectivamente, qual é a área do trapézio ABCD.

94) (Bélgica-2000) Um quadrilátero ABCD está circunscrito a uma circunferência. Se |AB| = 4, |BC| = 5 e |CD| = 3, então |AD| vale:
a) 1 b) 2 c) 2,4 d) 3 e) 3,75

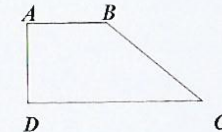
95) (Inglaterra-2002) O quadrilátero ABCD está inscrito em uma circunferência. As diagonais AC e BD interceptam-se em Q. Os lados DA, prolongados desde A, e CB, prolongados desde B, encontram-se em P. Dado que CD = CP = DQ, prove que ∠CAD = 60°.

96) (Rússia-74) Dado um quadrado ABCD, sejam P e Q pontos nos lados AB e BC, respectivamente, de modo que |BP| = |BQ|. Seja H o pé da perpendicular ao segmento PC passando por B. Prove que o ângulo ∠DHQ é reto.

97) (Rússia-64) O quadrilátero ABCD está circunscrito sobre um círculo com centro O. Prove que a soma dos ângulos ∠AOB e ∠COD é igual a 180°.

98) (Noruega-97) Seja ABCD um trapézio com AB e CD paralelos, ∠D = 2∠B, AD = 5 e CD = 2. Determine AB.

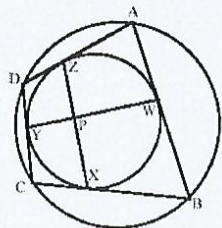
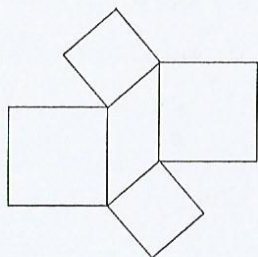
99) (Yakutsk-2001) Uma tangente L à circunferência inscrita de um losango ABCD encontra os lados AB e BC nos pontos E e F, respectivamente. Prove que AE.CF é independente da escolha de L.

100) (Maio-96) Um terreno *(ABCD)* tem forma de trapézio retangular. O ângulo em *A* mede 90° e o ângulo em *D* mede 90°. *AB* mede 30*m*; *AD* mede 20*m* e *DC* mede 45*m*. Este terreno tem que ser dividido em dois terrenos de área iguais traçando uma paralela ao lado *AD*. A que distância de *D* deve-se traçar a paralela?

101) (Maio-2003) Seja *ABCD* um retângulo de lados *AB* = 4 e *BC* = 3. A perpendicular à diagonal *BD* traçada por *A* corta *BD* no ponto *H*. Chamamos de *M* o ponto médio de *BH* e de *N* o ponto médio de *CD*. Calcule a medida do segmento *MN*.

102) (Índia-97) Um trapézio possui diagonais perpendiculares e altura 10. Determine a área do trapézio se uma diagonal mede 13.

103) (Rússia-96) Os pontos E e F são dados no lado BC de um quadrilátero ABCD (com E mais perto de B do que F). Sabe-se que ∠BAE = ∠CDF e ∠EAF = ∠FDE. Prove que ∠FAC = ∠EDB.

104) (Wisconsin-2001) O quadrilátero ABCD está inscrito em uma circunferência e também possui uma circunferência inscrita. Se W, X, Y e

Z são os pontos de tangência da menor circunferência com os lados do quadrilátero, prove que $\overline{WY}$ e $\overline{XZ}$ são perpendiculares.

105) (OBM-2003) Na figura a seguir, o paralelogramo tem lados de medida 12cm e 4cm e área 40cm². Sejam P, Q, R e S os centros dos quadrados construídos externamente sobre os quatro lados desse paralelogramo. Sabendo que o quadrilátero $PQRS$ é um quadrado, calcule a sua área.

106) (OBM-2003) Seja $ABCD$ um losango. Sejam E, F, G e H pontos sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, e tais que as retas EF e GH são tangentes à circunferência inscrita no losango. Prove que as retas EH e FG são paralelas.

107) (Argentina-2000) Seja $ABCD$ um losango de lado 61 tal que suas diagonais AC e BD verificam que $AC = 98 + BD$. Achar a área do losango.

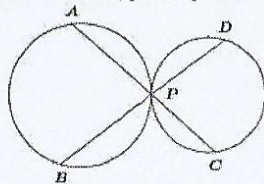
108) (Torneio das Cidades-85) No quadrilátero ABCD sabe-se que AB = BC, $\angle ABC = 100^\circ$ e $\angle CDA = 130^\circ$. Prove que B é o centro da circunferência que passa pelos pontos A, C e D.

109) (Torneio das Cidades-89) Sabe-se que uma circunferência Γ pode ser inscrita no trapézio ABCD. Prove que as duas circunferências construídas tendo como diâmetros os lados oblíquos do trapézio são tangentes e o ponto de tangência é o centro de Γ.

110) (Torneio das Cidades-93) Seja O o centro da circunferência que é tangente ao lado AC de um triângulo ABC e ais prolongamentos dos lados BA e BC. D é o centro da circunferência que passa pelos pontos A, B e O. Prove que os pontos A, B, C e D formam um quadrilátero inscritível.

111) (Báltica-93) Um quadrilátero convexo ABCD está inscrito em uma circunferência com centro O. Os ângulos AOB, BOC, COD e DOA, tomados em alguma ordem, são iguais aos ângulos do quadrilátero ABCD. Prove que ABCD é um quadrado.

112) (Polônia-97) As medianas AD, BE e CF do triângulo ABC intersectam-se em G. Os quadriláteros AFGE e BDGF são inscritíveis. Prove que o triângulo ABC é eqüilátero.

113) (J.I.R. McKnight-92) Duas circunferências são tangentes em P. As retas AC e BD são traçadas passando por P. Se ABCD é um quadrilátero inscritível, prove que AC = BD.

114) (Olimpíada Internacional-85) Uma circunferência possui centro no lado AB de um quadrilátero inscritível. Os outros três lados são tangentes à circunferência. Prove que AD + BC = AB.

115) (OBM-2001) As peças de um jogo chamado Tangram são construídas cortando-se um quadrado em sete partes, como mostra o desenho: dois triângulos retângulos grandes, um triângulo retângulo médio, dois triângulos retângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo. Se a área do quadrado grande é 1, qual é a área do paralelogramo?

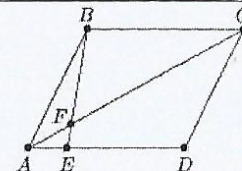
116) (Seletiva Brasileira Cone Sul-95) Seja MNPQ um quadrado de lados MN, NP, PQ, QM. Sejam A e X pontos em QM, B e Y em MN e C e Z em NP tais que os triângulos ABC e XYZ sejam equiláteros. Prove que AC e XZ intersectam-se em seus pontos médios.

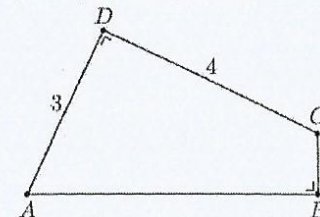
117) (Seletiva Brasileira Cone Sul-2003) As diagonais de um trapézio inscrito em uma circunferência de centro **O** encontram-se no ponto M e formam um ângulo de **60°**. Sabe-se que **MO = 2**. Qual é a diferença entre as medidas das bases?

118) (Uruguai-2001) ABCD é um quadrilátero no qual os ângulos A e C medem o mesmo. A bissetriz do ângulo B corta o circuncírculo de ABDC em L e a bissetriz do ângulo D corta o circuncírculo de ΔABD em F. Demonstrar que o quadrilátero que tem por vértices os pontos D, L, B e F é um paralelogramo.

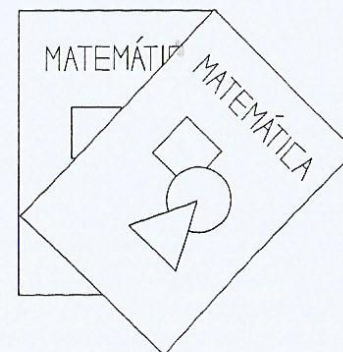
119) (Uruguai-98) Seja ABCD um quadrilátero cujos vértices estão em uma circunferência, exteriormente ao quadrilátero se formam os retângulos ABTR, BCJS, CDUX e ADYZ de tal forma que BT = CD, CJ = AD, DU = AB; AZ = BC. Demonstrar que o quadrilátero que tem por vértices os centros dos retângulos é também um retângulo.

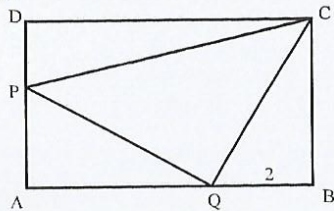
120) (Uruguai-2000) Um paralelogramo ABCD com ângulo agudo DAB é dado. A bissetriz do ângulo DAB corta a reta CD em L e a reta BC em K. Seja O o circuncentro do triângulo LCK. Prove que o quadrilátero DBCO é inscritível.

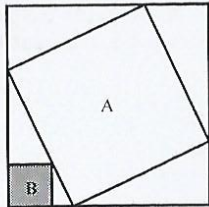
121) (Bélgica-2003) Conecta-se o vértice B de um paralelogramo ABCD com o ponto E no lado AD de tal modo que AE = AD/4. O segmento de reta BE intersecta a diagonal AC no ponto F. A razão AF/AC vale:

a) 1/8 b) 1/6 c) 1/5 d) 1/4 e) $1/2\sqrt{2}$

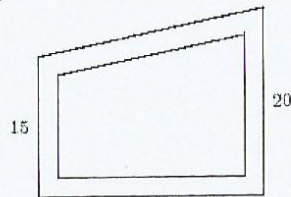
122) (Bélgica-2001) Dado o quadrilátero ABCD com ângulos retos em B e D, sabe-se que |BC| = 1, |CD| = 4 e |DA| = 3. Qual a área de ABCD?

a) 8 b) $6+\sqrt{6}$ c) 8,5 d) 17 e) $12+2\sqrt{6}$

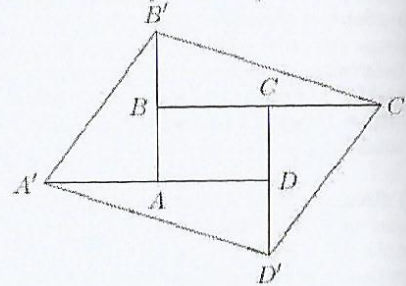
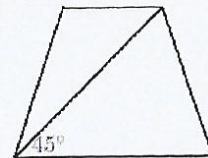
123) (Bulgária-2000) O quadrilátero ABCD está inscrito em uma circunferência com diâmetro BD. Seja M o ponto simétrico de A com relação à BD e seja N o ponto de interseção das retas AM e BD. A reta passando por N que é paralela a AC intersecta CD e BC em P e Q, respectivamente. Prove que os pontos P, C, Q e M são vértices de um retângulo.

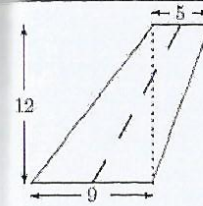
124) (Espírito Santo-2004) Dois livros iguais foram colocados um sobre o outro como mostra a figura abaixo. A área da parte do livro de baixo, que está à mostra, é maior, igual ou menor do que a área da parte encoberta?

125) (Espírito Santo-2004) Num paralelogramo $ABCD$, seja M o ponto médio do lado CD e H o ponto pertencente à reta AM tal que o ângulo $\angle AHB = 90°$. Mostre que o triângulo HCB é isósceles.

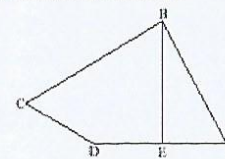
126) (Noruega-96) Na figura, o quadrilátero ABCD é um retângulo, P pertence ao lado AD e Q ao lado AB. Os triângulos PAQ, QBC e PCD possuem mesma área, e BQ = 2. Qual o valor de AQ?

a) 7/2 b) $\sqrt{7}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $1+\sqrt{5}$ e) nda

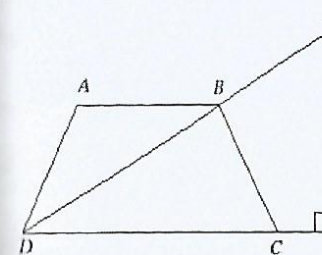
127) (Noruega-96) Dados três quadrados como na figura, onde o maior quadrado possui área 1 e o intermediário possui área A. Determine a área B do menor quadrado.

a) A/8 b) $A^2/2$ c) $A^2/4$
d) A(1 – A) e) $(1 - A)^2/4$

128) (Portugal-2001) O trapézio da figura seguinte

tem bases com comprimentos 15m e 20m e área que mede 210m². Além disso, o lado menor do trapézio é perpendicular às bases. No interior deste trapézio constrói-se um segundo trapézio, com lados paralelos ao primeiro, e tal que cada lado do novo trapézio está a uma distância de 2m do correspondente lado paralelo do primeiro trapézio. Quanto mede a área do segundo trapézio ?

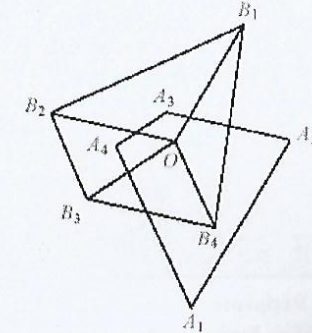
129) (Portugal-2000) A medida da área do retângulo [ABCD] é 11 cm². Se prolongarmos os lados [AB] para cima, [BC] para a direita, [CD] para baixo e [DA] para a esquerda por forma a duplicarmos a medida do comprimento de cada lado obtemos, unindo os extremos dos segmentos, um novo quadrilátero [A'B'C'D']. Quanto mede a área de [A'B'C'D'] ?

130) (Portugal-98) A diagonal de um trapézio isósceles mede 16 metros e forma com a base do trapézio um ângulo de 45°.

Quanto mede a área do trapézio?

131) (Portugal-2000) A figura ao lado representa um trapézio cujas bases medem 9 cm e 5 cm, respectivamente, e cuja altura mede 12 cm. Os dois vértices unidos pela linha a ponteado estão na vertical um do outro. O segmento a tracejado une os pontos médios das duas bases. Quanto mede este segmento?

132) (Cone Sul-91) Sejam A, B e C três pontos não colineares (não alinhados) e E (≠ B) um ponto qualquer que não pertença à reta AC. Construa os paralelogramos ABCD (nesta ordem) e AECF (também nesta ordem). Demonstre que BE // DF.

133) (Santa Catarina-2004) Considere o quadrilátero ABCD da figura em que $\overline{AB} = 2$, $\overline{AE} = \overline{DE} = 1$, $\overline{BE} \perp \overline{AD}$, $\angle EBC = 60°$ e $\angle DCB = 60°$. Qual é a área de ABCD?

134) (Rússia-72) Dados um retângulo ABCD, ponto M médio de AD e ponto N médio de BC. Tomemos um ponto P no prolongamento de DC a partir de D. Seja Q a interseção de PM e AC. Prove que os ângulos ∠QNM e ∠MNP são iguais.

135) (Panamá-2002) Na figura, o trapézio isósceles ABCD tem lados de comprimento AD = BC = 5, AB = 4 e DC = 10. O ponto C está em DF e B é o ponto médio da hipotenusa DE do triângulo ΔDEF. O comprimento do segmento CF é:

a) 3,25 b) 3,50 c) 3,75 d) 4,00 e) 4,25

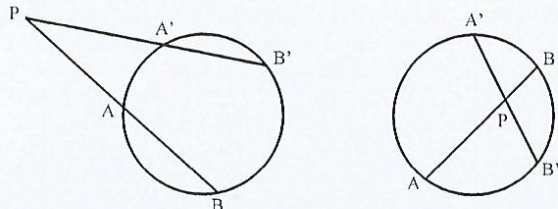
136) (Canadá-74) Seja ABCD um retângulo com BC = 3AB. Mostre que se P e Q são pontos no lado BC com BP = PQ = QC, então ∠DBC + ∠DPC = ∠DQC.

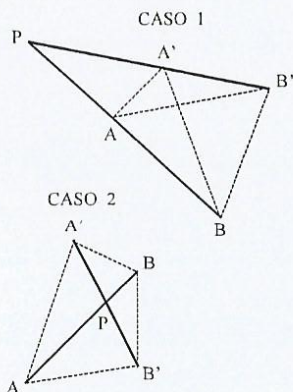
137) (Canadá-82) No diagrama, OB_i é paralelo a igual em comprimento a A_iA_{i+1} para i = 1, 2, 3 e 4 ($A_5 = A_1$). Mostre que a área de $B_1B_2B_3B_4$ é duas vezes a área de $A_1A_2A_3A_4$.

138) (Torneio das Cidades-2000) Sejam ABCD um paralelogramo, M o ponto médio do lado CD e H o pé da perpendicular de B em relação à reta AM, Prove que o triângulo BCH é isósceles.

139) (Seletiva Brasileira Cone Sul-94) Seja ABCD um quadrilátero inscritível, M o ortocentro de ABC e N o ortocentro de ABD. Prove que MNDC é um paralelogramo.

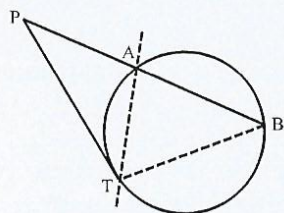
Área e Relações Métricas no Círculo

6.1) RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

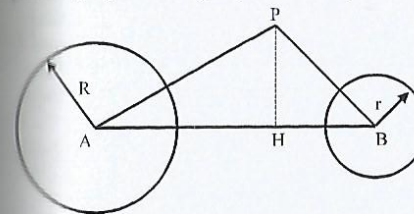
6.1.1) Duas retas secantes à circunferência: "Se de um ponto P traçamos duas secantes à uma circunferência, encontrando esta nos pontos A, B, A' e B', de acordo com uma das figuras abaixo, então temos que $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PA'}.\overline{PB'}$."

Demonstração:
Inicialmente trace $\overline{AB'}$ e $\overline{A'B}$. Como $\angle PAB' = \angle PA'B$ e $\angle APA' = \angle BPB'$ então $\Delta PAB' \sim \Delta PA'B$.
Assim: $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB'}} = \dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PA'}.\overline{PB'}$

Teorema Recíproco: "Considere quatro pontos quaisquer A, B, A', B' em um plano, três a três não alinhados. Seja P a interseção de $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$. Se $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PA'}.\overline{PB'}$, então A, B, A' e B' estão sobre uma mesma circunferência."

Demonstração:
Caso 1: Como $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PA'}} = \dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}$ e $\angle APA' = \angle B'PB$ então
$\Delta APA' \sim \Delta B'PB \Rightarrow \angle PA'A = \angle PBB' \Rightarrow$
$180^\circ - \angle AA'B' = \angle ABB' \Rightarrow$
o quadrilátero AA'B'B é inscritível.

Caso 2: Como $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PA'}} = \dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}$ e $\angle APA' = \angle B'PB$ então
$\Delta APA' \sim \Delta B'PB \Rightarrow$
$\angle AA'B' = \angle ABB'$ e $\angle BAA' = \angle BB'A'$
$\angle AB'B = \angle AB'A' + \angle BB'A' = \angle ABA' + \angle BAA' =$
$180^\circ - \angle AA'B \Rightarrow$ AA'BB' é inscritível.

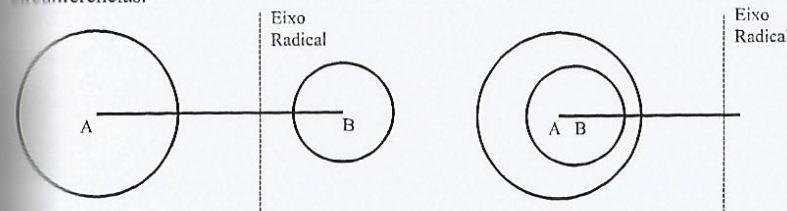
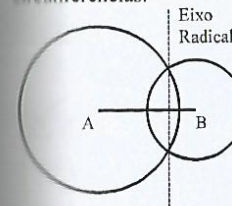
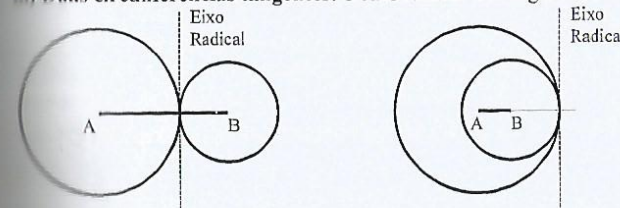
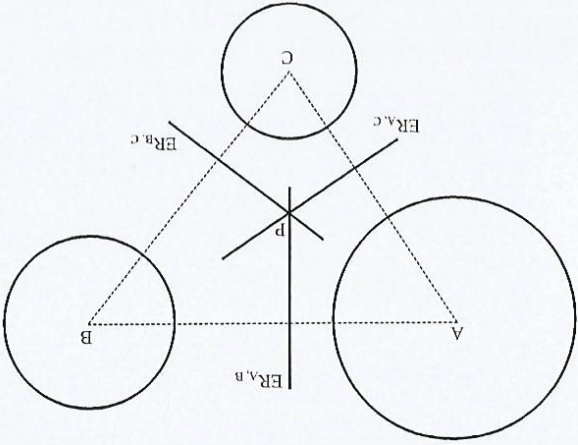
6.1.2) Uma reta secante e outra tangente à circunferência: "Se de um ponto P traçamos uma tangente e uma secante a uma circunferência, de acordo com a figura abaixo, então $\overline{PT}^2 = \overline{PA}.\overline{PB}$."

Demonstração:
Trace $\overline{AT}$ e $\overline{BT}$. Como $\angle PTA = \angle PBT$ e $\angle APT = \angle TPB \Rightarrow$
$\Delta PTA \sim \Delta PBT \Rightarrow \dfrac{\overline{PT}}{\overline{PA}} = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PT}} \Rightarrow \overline{PT}^2 = \overline{PA}.\overline{PB}$

6.1.3) Potência de Ponto: Dado um ponto P e uma circunferência λ, de centro O e raio R, dá-se o nome de potência de P em relação a λ ao valor de $PO^2 - R^2$. Note que, para um dado ponto P, sua potência é constante. Ainda: P é interior à circunferência $\Leftrightarrow$ $Pot_\lambda P = -PA.PB < 0$.

6.1.4) Eixo Radical: Dadas duas circunferências, definimos Eixo Radical como o lugar geométrico dos pontos que possuem igual potência de ponto em relação a essas duas circunferências.

Considere duas circunferências distintas, uma de centro A e raio R e outra de centro B e raio r, como indicado na figura ao lado.
Sejam P um ponto tal que $Pot_{(A)} P = Pot_{(B)} P$ e H a sua projeção ortogonal sobre AB.
Assim: $PA^2 - R^2 = PB^2 - r^2 \Rightarrow$
$AH^2 + PH^2 - R^2 = BH^2 + PH^2 - r^2 \Rightarrow$
$R^2 - r^2 = AH^2 - BH^2 = (AH - BH)(AH + BH) \Rightarrow$
$(AH - BH).AB = R^2 - r^2$

Como AB, R e r são valores constantes, então AH – BH também será constante, implicando que, para todo ponto P que possui igual potência de ponto em relação às duas circunferências, a projeção ortogonal de P sobre AB é constante. Desta forma, o lugar geométrico procurado é uma reta perpendicular à reta que une os centros das circunferências.

6.1.5) Posições Relativas:

i) Duas circunferências interiores ou exteriores: o eixo radical não interseca nenhuma das circunferências.

ii) Duas circunferências secantes: o eixo radical é a reta que passa pelos pontos de interseção das duas circunferências.

iii) Duas circunferências tangentes: o eixo radical é a tangente comum

6.1.6) Centro Radical: Dados três circunferências distintas, denominamos de "Centro Radical" ao ponto que possui igual potência de ponto em relação às três circunferências.

Por exemplo, considere três circunferências de centros A, B e C (não colineares). Tracemos o eixo radical de A e B e também de B e C. Considere que o ponto P é a interseção de $ER_{A,B}$ e $ER_{B,C}$. Como P pertence à $ER_{A,B}$ então P possui igual potência de ponto em relação às circunferências de centros A e B. Analogamente, P possui igual potência de ponto em relação às circunferências de centros B e C. Concluímos, portanto, que P é o ponto do plano que possui igual potência de em relação às três circunferências, ou seja, P pertence à $ER_{A,C}$. Denominamos P de "Centro Radical".

6.1.6.1) Propriedades do Centro Radical

i) O centro radical é o único ponto do plano de onde se pode traçar tangentes de mesmo comprimento às três circunferências.

Demonstração:
P é o centro radical em relação a três circunferências de centro A, B e C e raios respectivamente iguais a R_A, R_B e R_C se e somente se $PA^2 - R_A^2 = PB^2 - R_B^2 = PC^2 - R_C^2$.
Por outro lado, observe que, pelo teorema de Pitágoras, cada um dos valores da igualdade acima são iguais ao quadrado dos segmentos tangentes que podemos traçar a partir de P em relação às três circunferências.

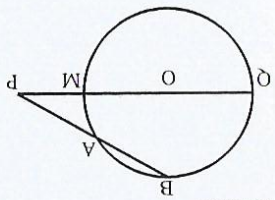
ii) O centro radical é o centro da única circunferência ortogonal às três circunferências dadas.

Demonstração:
A partir da propriedade anterior, trace a circunferência cujo centro é o centro radical e que passa pelos seis pontos de tangência obtidas traçando, a partir de P, os pares de tangentes em relação a cada uma das três circunferências. Esta circunferência é ortogonal as três circunferências dadas.

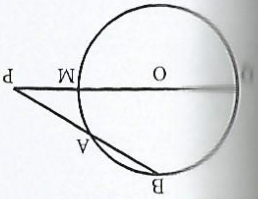
Exemplos:

1) (Colégio Naval-82) Seja P um ponto exterior a um círculo de centro O e raio R e tal que $\overline{OP} = R\sqrt{3}$. Traça-se por P a secante PAB ao círculo. Se PA = R, $\overline{AB}$ é igual a:

a) R b) R/2 c) $R\sqrt{3}$ d) 2R e) $R\sqrt{2}$

Solução:

$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PM}.\overline{PQ} \Rightarrow R(\overline{AB} + R) = (R\sqrt{3} - R)(R\sqrt{3} + R) \Rightarrow$
$R.\overline{AB} + R^2 = 3R^2 - R^2 \Rightarrow \overline{AB} = R$.

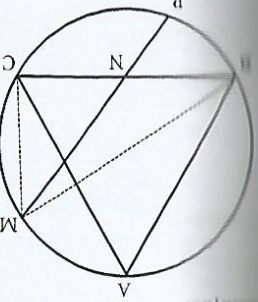
(IME-65) Por um ponto distante 7 cm do centro de uma circunferência de 5 cm de raio traça-se uma secante de modo que sua parte externa é 2/3 da secante total. Calcular o comprimento da secante.

Solução:

Seja $x = \overline{PB}$. Assim:

$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PM}.\overline{PQ} \Rightarrow \frac{2x}{3}.x = (7-5)(7+5) \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow$
$x = 6$ cm

(Colégio Naval-2002) Considere um triângulo equilátero ABC, inscrito em um círculo de raio R. Os pontos M e N são, respectivamente, os pontos médios do arco menor AC e do segmento BC. Se a reta MN também intersecta a circunferência desse círculo no ponto P, P ≠ M, então NP mede:

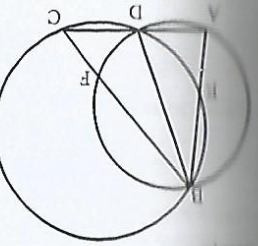
a) $\frac{R\sqrt{7}}{2}$ b) $\frac{3R\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{3R\sqrt{7}}{14}$ d) $\frac{R\sqrt{5}}{7}$ e) $\frac{R\sqrt{5}}{3}$

Solução:

Seja L o lado do triângulo equilátero ΔABC. Pela Lei dos Senos em ΔABC: $\frac{L}{\text{sen}\,60^o} = 2R \Rightarrow L = \sqrt{3}R$

Como M é o ponto médio do menor arco AC, então BC é um diâmetro do círculo ⇒ ΔBMC é retângulo com ângulo reto em C ⇒
$BM^2 = CM^2 + BC^2 \Rightarrow 4R^2 = CM^2 + 3R^2 \Rightarrow CM = R$
Como ΔMCN é retângulo em C: $MN^2 = CM^2 + CN^2 \Rightarrow$
$MN^2 = R^2 + \frac{3R^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{7}R}{2}$

Portanto: $MN.NP = BN.CN \Rightarrow \frac{\sqrt{7}R}{2}.NP = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow NP = \frac{3R\sqrt{7}}{14}$

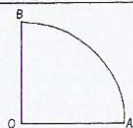
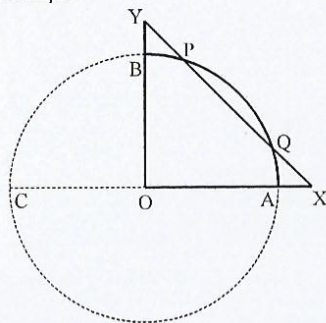
(Olimpíada de St. Petersburg-96) Seja BD a bissetriz do ângulo B em um triângulo ABC. O circuncírculo do triângulo BDC encontra AB em E, enquanto que o circuncírculo do triângulo ABD encontra BC em F. Prove que AE = CF.

Solução:

Aplicando Potência de Ponto:
AE.AB = AD.AC e CF.CB = CD.CA.

Portanto: $\frac{AE}{CF} = \frac{AD}{CD}.\frac{BC}{AB}$.

Pelo Teorema da Bissetriz temos que: $\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{AD}{CD}.\frac{BC}{AB} = 1$.

Assim, AE = CF.

(Maio-99) A figura representa a quarta parte de um círculo de raio 1. No arco AB, consideram-se os pontos P e Q de forma tal que a reta PQ seja paralela a reta AB. Sejam X e Y os pontos de interseção da reta PQ com as retas OA e OB respectivamente. Calcular $\overline{PX}^2 + \overline{PY}^2$.

Solução:

Pela simetria da construção, temos que $\overline{QX} = \overline{PY}$, $\overline{OX} = \overline{OY}$ e $\overline{PX} = \overline{QY}$.

Como XY é paralelo a AB, então $\overline{XY} = \sqrt{2}.\overline{OX}$ $\Rightarrow$ $\overline{PX} + \overline{PY} = \sqrt{2}(1 + \overline{AX})$.

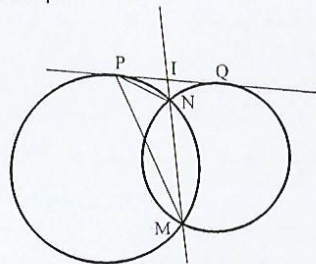
Construa o resto da circunferência. Seja C o ponto onde OX encontra novamente a circunferência.

Assim: $\overline{QX}.\overline{PX} = \overline{AX}.\overline{CX}$ $\Rightarrow$ $\overline{PX}.\overline{PY} = \overline{AX}(2 + \overline{AX})$

Portanto: $\overline{PX}^2 + \overline{PY}^2 = (\overline{PX} + \overline{PY})^2 - 2.\overline{PX}.\overline{PY} =$

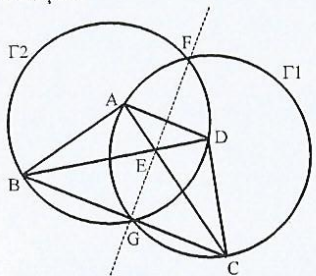
$= 2 + 4.\overline{AX} + 2.\overline{AX}^2 - 4.\overline{AX} - 2.\overline{AX}^2$ $\Rightarrow$ $\overline{PX}^2 + \overline{PY}^2 = 2$

6) (Olimpíada da Inglaterra-2000) Sejam *P* e *Q* os pontos de tangência da tangente comum a dois círculos C_1 e C_2 que se intersectam nos pontos *M* e *N* sendo *N* mais próximo de *PQ* do que *M*. Mostre que os triângulos *MNP* e *MNQ* possuem áreas iguais.

Solução:

Como IM e IP são, respectivamente, uma secante e uma tangente ao círculo C_1, então $IP^2 = IN.IM$. Analogamente, para o círculo C_2, temos que $IQ^2 = IN.IM$. Assim, concluímos que IP = IQ, ou seja, I é o ponto médio do segmento PQ.

Assim, a distância m do ponto P a reta suporte de MN e a distância n do ponto Q a reta suporte de MN são iguais. Desde que a área do triângulo MNP é igual a MN.m/2 e a área do triângulo MNQ é igual a MN.n/2, então temos que as áreas destes triângulos são iguais.

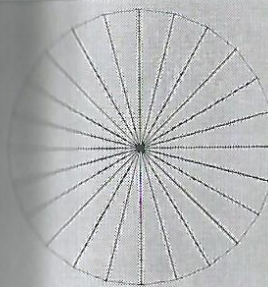
7) (Olimpíada do Cone Sul/Banco-2002) Seja *ABCD* um quadrilátero inscritível e *E* a interseção das diagonais *AC* e *BD*. Se *F* é um ponto qualquer e as circunferências Γ1 e Γ2 circunscritas a *FAC* e a *FBD* se intersectam novamente em *G*, mostre que *E*, *F*, *G* são colineares.

Solução:

Inicialmente repare que, devido ao fato de Γ1 e Γ2 serem concorrentes, a reta FG é o eixo radical de Γ1 e Γ2.

Além disso, $Pot_{\Gamma 1}\,E = -\,EA.EC$ e $Pot_{\Gamma 2}\,E = -\,EB.ED$.

Por outro lado, como ABCD é um quadrilátero inscritível, então podemos afirmar que EA.EC = EB.ED, e assim concluímos que $Pot_{\Gamma 1}\,E = Pot_{\Gamma 2}\,E$, implicando que o ponto E pertença ao eixo radical de Γ1 e Γ2, que é a reta FG. Logo, E, F e G são colineares.

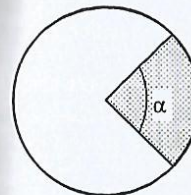
6.2) ÁREAS DE REGIÕES CIRCULARES

6.2.1) Círculo

Note que quando tomamos polígonos regulares com um número maior de lados, estamos cada vez mais aproximando-o de um círculo. Como podemos separar um polígono regular de n lados em n triângulos isósceles congruentes, temos que a área deste polígono é igual a $S = \frac{n.\ell_n.h}{2}$, onde ℓ_n é o lado do polígono regular de n lados e h é a altura de cada triângulo, que nada mais é que a distância entre o centro do polígono regular e cada lado.

Uma vez que $n.\ell_n$ é igual ao perímetro do polígono, então podemos escrever que $S = \frac{p_n.h}{2}$

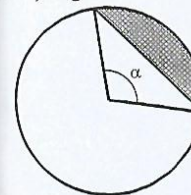
Um círculo pode ser encarado como um polígono regular com um número infinito de lados, fazendo com que p_n seja o perímetro da circunferência e h seja o raio. Assim:

$$S_{círculo} = \frac{2\pi R.R}{2} \Rightarrow S_{círculo} = \pi R^2$$

6.2.2) Setor Circular

Como a área do setor varia linearmente com o ângulo central:

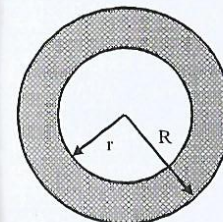
$$\frac{S}{\alpha} = \frac{\pi R^2}{2\pi} \Rightarrow S = \frac{\alpha R^2}{2}$$

Obs: α em radianos

6.2.3) Segmento Circular

Fazendo a área do setor circular menos a área do triângulo correspondente:

$$S = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{R^2.\text{sen}\,\alpha}{2} \Rightarrow S = \frac{R^2}{2}(\alpha - \text{sen}\,\alpha)$$

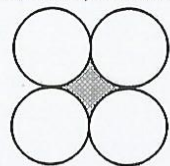
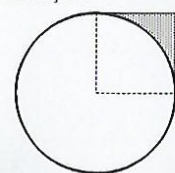
Obs: α em radianos

6.2.4) Coroa Circular

Subtraindo a área dos dois círculos:

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow S = \pi(R^2 - r^2)$$

Exemplos:

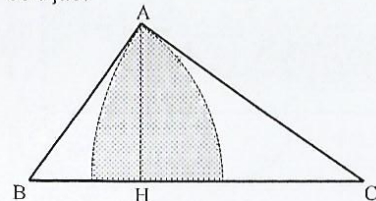
1) (UFRN-97) Quatro círculos, todos com raio unitário e cujos centros são vértices de um quadrado, são tangentes exteriormente, dois a dois. A área da parte hachurada é:

A) $\frac{\pi}{2}$
B) $2\sqrt{3} - \sqrt{11}$
C) $3\sqrt{2} - 11$
D) $4 - \pi$
E) $5 - \pi$

Solução:

Tomemos apenas um quarto da figura. Claramente a área total S_T é igual a quatro vezes a área destacada na figura ao lado. Esta área pode ser calculada subtraindo a área de um quadrado de lado 1 de um quarto de circunferência de raio 1. Assim:

$$S_T = 4\left(R^2 - \frac{\pi R^2}{4}\right) = 4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 4 - \pi$$

2) (Colégio Naval-91) Os lados do triângulo medem: $AB = 2$; $AC = 2\sqrt{3}$ e $BC = 4$. A área da intersecção entre o círculo de centro B e raio $\overline{BA}$, o círculo de centro C e raio $\overline{CA}$ e o triângulo ABC, é:

a) $\frac{3\pi}{2} - 2\sqrt{3}$ b) $\frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}$ c) $\frac{5\pi}{4} - 2\sqrt{3}$ d) $\frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3}$ e) $\frac{6\pi}{5} - 2\sqrt{3}$

Solução:

Inicialmente notemos que ΔABC é retângulo, uma vez que $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Deste modo, os dois círculos traçados são ortogonais.

Assim: $\operatorname{sen} B = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B = \pi/3$ e $C = \pi/6$

$AH.BC = AB.AC \Rightarrow AH.4 = 2.2\sqrt{3} \Rightarrow AH = \sqrt{3}$

$$S_T = \frac{\hat{B}}{2}\overline{AB}^2 - \frac{\overline{AB}.\overline{AH}}{2}\operatorname{sen}(\pi/6) + \frac{\hat{C}}{2}\overline{AC}^2 - \frac{\overline{AC}.\overline{AH}}{2}\operatorname{sen}(\pi/3) \Rightarrow$$

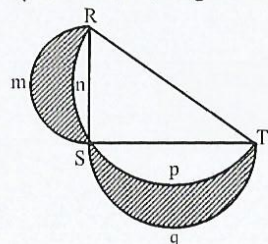
$$S_T = \frac{\pi}{6}(2)^2 - \frac{2.\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\pi}{12}(2\sqrt{3})^2 - \frac{2\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_T = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_T = \frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

3) (AFA-2003) Na figura, RST é um triângulo retângulo em S. Os arcos RnST, RmS e SqT são semicircunferências cujos diâmetros são, respectivamente, RT, SR e ST. A soma das áreas das figuras hachuradas está para a área do triângulo RST na razão.

a) 1/3

b) 1

c) 1/2

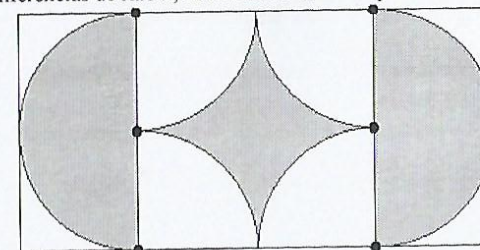
d) 3/2

Solução:

Sejam $\overline{RS} = 2x$ e $\overline{TS} = 2y \Rightarrow \overline{RT} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$. Assim, $S_{\Delta RST} = 2xy$.

A soma das áreas hachuradas vale:

$$S = S_{RmS} + S_{SqT} + S_{\Delta RST} - S_{RnSpT} = \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi y^2}{2} + 2xy - \frac{\pi(x^2 + y^2)}{2} \Rightarrow S = 2xy.$$

Deste modo, como $S_{\Delta RST} = S$, então a razão vale 1.

4) (IBMEC-2005) Considere que os ângulos de todos os cantos da figura abaixo são retos e que todos os arcos são arcos de circunferências de raio 2, com centros sobre os pontos em destaque.

A área da região sombreada é igual a

a) 4 b) 4π c) 16 d) 16π e) 64

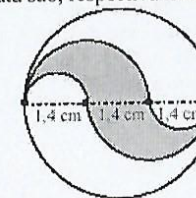
Solução:

A parte central é equivalente a um quadrado de lado 4 menos quatro quadrantes de raio 2:

$S_1 = (4)^2 - \pi(2)^2 = 16 - 4\pi$.

Unindo as áreas das extremidades obtemos um círculo de raio 2: $S_2 = \pi(2)^2 = 4\pi$.

Logo: $S_1 + S_2 = 16$.

5) (UFLA-2005) Uma das faces de uma medalha circular tem o desenho ao lado. A região hachurada é de ouro e a não-hachurada é de prata. Sabendo que os contornos das áreas hachuradas são semicírculos, as áreas das superfícies de ouro e de prata são, respectivamente, em cm^2:

Solução:

Inicialmente observe que a reta pontilhada é uma linha de simetria. Assim, a área de ouro é igual a duas vezes a área de um semicírculo de raio 1,4 cm menos a área de um semicírculo de raio 0,7 cm:

$$S_{ouro} = 2\left[\frac{\pi}{2}(1,4)^2 - \frac{\pi}{2}(0,7)^2\right] = 1,47\pi.$$

A área de prata é igual à área total menos a área de ouro:

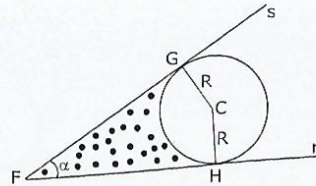
$S_{prata} = \pi(2,1)^2 - 1,47\pi = 2,94\pi$.

6) (UECE-2005) Na figura as semi-retas r e s são tangentes ao círculo de raio 1 m. Se $\alpha = 60^o$, a área da região pigmentada é igual a:

a) $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)\text{m}^2$

b) $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\text{m}^2$

c) $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\text{m}^2$

d) $\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\right)\text{m}^2$

Solução:

Como $\angle FGC + \angle FHC = 180°$ então FGCH é um quadrilátero inscritível.

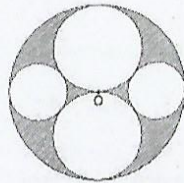
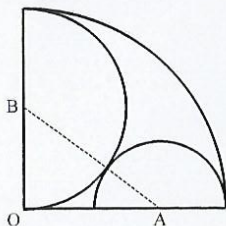
Assim, se $\angle GFH = 60°$ então $\angle GCH = 120°$.

Observe agora que FC é a bissetriz de $\angle GFH$. Portanto, temos que $\angle CFH = 30°$.

Assim, $FH = R.\text{cotg } 30° \Rightarrow FH = \sqrt{3}$ m.

A área pedida é igual a área do triângulo FGH menos a área do segmento circular delimitado pela corda GH: $S = \frac{FG.FH.\text{sen}60°}{2} - \left(\frac{2\pi}{3}\frac{R^2}{2} - \frac{R.R.\text{sen}120°}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ m².

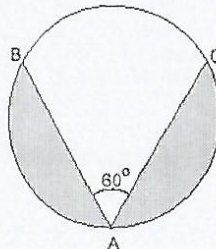
7) (UFOP-2004) Na figura a seguir, a maior circunferência representada tem diâmetro 12 cm. Sendo assim, a área sombreada, em cm², vale"

a) 10π
b) 16π
c) $27\pi/2$
d) $135\pi/2$

Solução:

Observando figura, temos que o raio da circunferência interna maior é igual a R = 3 cm. Uma vez que a figura possui duas linhas de simetria, vamos analisar somente um quarto dela para calcular o raio da circunferência menor. Repare que OB = R, AB = R + r e OA = 2R – r.

Pelo Teorema de Pitágoras: $(R + r)^2 = R^2 + (2R - r)^2 \Rightarrow$

$R^2 + 2rR + r^2 = R^2 + 4R^2 - 4rR + r^2 \Rightarrow r = \frac{2R}{3} = 2$ cm.

Assim: $S = \pi(2R)^2 - 2[\pi(R)^2 + \pi(r)^2] = 36\pi - 2[9\pi + 4\pi] = 10\pi$

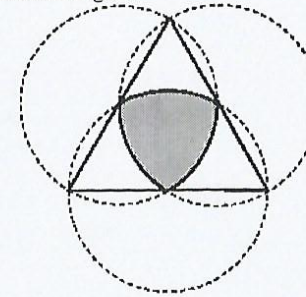
8) (UFPE-2004) Na figura abaixo, o ângulo **BAC** mede **60°** e **AB = AC**. Se a circunferência tem raio 6, qual o valor da área da região hachurada?

Solução:

O ângulo central correspondente ao ângulo inscrito $\angle BAC$ é igual à $2\angle BAC = 120°$.

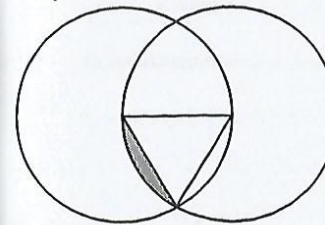
Como os arcos AB e AC são iguais, chamando-os de α temos: $2\alpha + 120° = 360° \Rightarrow \alpha = 120°$.

Assim, as áreas hachuradas são dois segmentos circulares de ângulo central 120° e raio 6. Logo:

$$S = 2\left[\frac{2\pi}{3}\frac{6^2}{2} - \frac{6.6.\text{sen}120°}{2}\right] = 2\left[12\pi - 9\sqrt{3}\right] = 24\pi - 18\sqrt{3}.$$

9) (Unifor-2002) Na figura abaixo têm-se um triângulo eqüilátero de lado 2 m e três circunferências cujos diâmetros são os três lados desse triângulo.

A área da região sombreada, em metros quadrados, é igual a

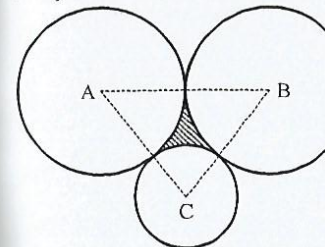
a) $\frac{\pi+\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{2\pi-\sqrt{3}}{2}$ e) $\pi-\sqrt{3}$

Solução:

A região hachurada é composta de um triângulo equilátero de lado igual a 1 m mais de três segmentos circulares de ângulo central 60° e raio 1 m. Portanto:

$$S = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + 3\left[\frac{\pi}{3}\frac{R^2}{2} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right] = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right] = \frac{\pi-\sqrt{3}}{2}.$$

10) (ITA-99) Duas circunferências C_1 e C_2, ambas com 1 m de raio, são tangentes. Seja C_3 outra circunferência cujo raio mede $(\sqrt{2}-1)$ m e que tangencia externamente C_1 e C_2. A área, em m², da região limitada e exterior às três circunferências dadas, é:

a) $1-\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{6}$ c) $(\sqrt{2}-1)^2$ d) $\frac{\pi}{16}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$ e) $\pi(\sqrt{2}-1)-1$

Solução:

Os lados de ΔABC são:

$a = b = R + r = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$ e $c = 2R = 2$.

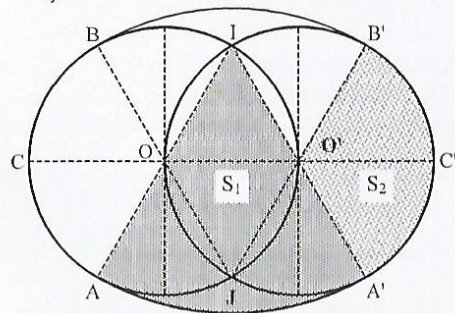
Uma vez que $c^2 = a^2 + b^2$ e $a = b$ então ΔABC é retângulo isósceles $\Rightarrow A = B = 45°$ e $C = 90°$.

Assim: $S = \frac{a.b}{2} - 2\left(\frac{\pi.R^2}{8}\right) - \frac{\pi.r^2}{4} \Rightarrow$

$$S = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi(1)^2}{4} - \frac{\pi(\sqrt{2}-1)^2}{4} \Rightarrow$$

$$S = 1 - \frac{\pi(1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1)}{4} \Rightarrow S = 1 - \pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

11) (IME-76/77) Traçam-se dois círculos de raio r e centros em O e O' (cada um passando pelo centro do outro), que se cortam em I e J. Com centro em I e raio 2r traça-se um arco de círculo que tangencia (O) em A e (O') em A'. Com centro em J e raio 2r traça-se um arco de círculo que tangencia (O) em B e (O') em B'. Em (O) o diâmetro dO tem a outra extremidade em C; em (O') o diâmetro dO' tem a outra extremidade em C'. Os arcos AA', A'C'B', B'B e BCA formam uma oval com quatro centros. Pede-se a área desta oval em função de r.

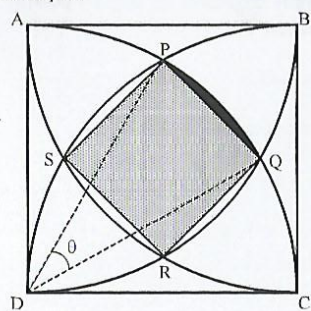
Solução:

Note que, pela simetria da construção, temos que as áreas dos setores OBCA e O'A'C'B' são iguais (S_1), bem como as áreas dos setores IAA' e JB'B também são iguais (S_2). Assim, a área da oval é igual a $S = 2.S_1 + 2.S_2 - 2.S_{\Delta IOO'}$.

Além do mais, $\Delta IAA'$ é equilátero (lado 2r), ou seja, $\angle AIA' = \pi/3$ e $\angle A'O'B' = 2\pi/3$. Portanto:

$$S = 2\frac{\pi.(2r)^2}{6} + 2\frac{\pi(r)^2}{3} - 2.\frac{r^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$S = \left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2$$

12) (OBM-81 banco) Dado um quadrado de lado x, com centro em cada vértice traçam-se 4 circunferências de raio x. Determinar a área do quadrilátero curvilíneo interior ao quadrado dado.

Solução:

O quadrilátero curvilíneo PQRS pode ser decomposto no quadrado PQRS mais quatro segmentos circulares iguais.

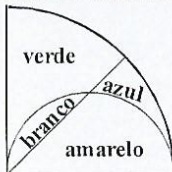
Como $DP = PC = DC = x \Rightarrow \Delta DPC$ é equilátero $\Rightarrow$ $\angle PDC = 60^\circ \Rightarrow \angle QDC = 60^\circ - \theta$.

Analogamente $\angle PDA = 60^\circ - \theta \Rightarrow \theta = 30^\circ$.

Assim: $PQ = 2.x.\text{sen } 15^\circ = 2.x\sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}} = x\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Portanto: $S = PQ^2 + 4.\left(\frac{\pi}{12}x^2 - \frac{x^2.\text{sen}(\pi/6)}{2}\right) \Rightarrow$

$$S = x^2(2 - \sqrt{3}) + \frac{\pi}{3}x^2 - x^2 \Rightarrow S = \left(3 - 3\sqrt{3} + \pi\right)\frac{x^2}{3}$$

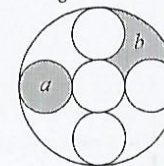
13) (OBM-2002) Um grande painel na forma de um quarto de círculo foi composto com 4 cores, conforme indicado na figura ao lado, onde o segmento divide o setor em duas partes iguais e o arco interno é uma semicircunferência. Qual é a cor que cobre a maior área?

Solução:

Sejam x, y, z e w as áreas das regiões branca, amarela, azul e verde, respectivamente.

Seja R o raio do semi-círculo. Temos $x + y = \frac{\pi R^2}{2}$ e $y + z = x + w = \frac{1}{8}\pi(2R)^2 = \frac{\pi R^2}{2}$.

Assim, $x + y = y + z = x + w$, logo $x = z$ e $y = w$.

Como x é a área de um segmento circular de ângulo 90° e raio R, $x = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)R^2$ e $y = \left(\frac{\pi + 2}{4}\right)R^2$. Assim $x = z < y = w$.

14) (OBM-2005) Na figura, todas as circunferências menores têm o mesmo raio r e os centros das circunferências que tocam a circunferência maior são vértices de um quadrado. Sejam a e b as áreas cinzas indicadas na figura. Então a razão $\frac{a}{b}$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 1 d) $\frac{3}{2}$ e) 2

Solução:

O raio da circunferência maior pode ser calculado obsrevando-se que: $2R = 6r \Rightarrow R = 3r$.

Evidentemente $a = \pi r^2$. Uma vez que b é uma das quatro áreas exteriores a circunferência maior em relação às 5 circunferências manores: $b = \frac{\pi(3r)^2 - 5(\pi r^2)}{4} = \pi r^2$.

Assim, temos que $\frac{a}{b} = 1$.

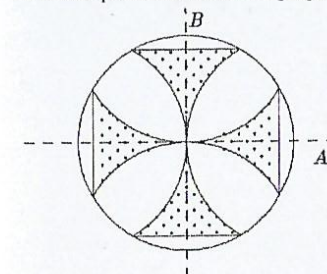
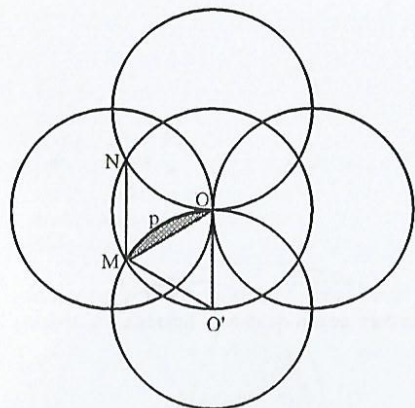
15) (Olimpíada da Bélgica-90) Calcule a área da região hachurada, sabendo que todos os arcos possuem raio R e que A e B são eixos perpendiculares.

Solução:

Completemos as circunferências de todos os arcos, obtendo a figura ao lado. A área a ser calculada é igual a quatro vezes a área do triângulo OMN menos oito vezes a área do segmento circular OpM, hachurado na figura ao lado.

Claramente, ΔOMN e ΔOO'M são triângulos equiláteros de lado R. Assim:

$$S = 4\left(\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) - 8\left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow$$

$$S = \left(3\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right)R^2$$

16) (Olimpíada Báltica-96) Na figura abaixo você vê três semi-circunferências. A circunferência C é tangente à duas das semi-circunferências e à reta PQ perpendicular ao diâmetro AB. A área da região hachurada é 39π, e a área da circunferência C é 9π. Determine o comprimento do diâmetro AB.

Solução:

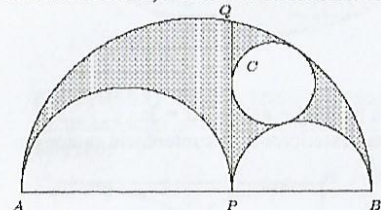
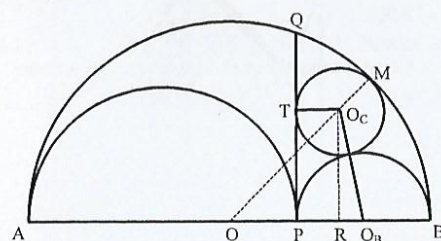
Sejam R_A e R_B os raios das semi-circunferências de diâmetros AP e BP, R_C o raio da circunferência C, O e O_B os respectivos centros das circunferências de diâmetros AB e BP e O_C o raio da circunferência C.

Assim, em C: $9\pi = \pi R_C^2 \Rightarrow R_C = 3$

Como $\Delta O_B O_C R$ é retângulo:

$(R_B + 3)^2 = \overline{RO_C}^2 + (R_B - 3)^2 \Rightarrow$

$R_B^2 + 6R_B + 9 = \overline{RO_C}^2 + R_B^2 - 6R_B + 9 \Rightarrow$

$\overline{RO_C}^2 = 12R_B$

Como a área da região hachurada é igual a 39π:

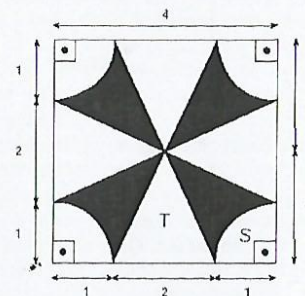
$$39\pi = \frac{\pi(R_A + R_B)^2}{2} - \frac{\pi R_A^2}{2} - \frac{\pi R_B^2}{2} - 9\pi \Rightarrow R_A.R_B = 48$$

Uma vez que ΔOO_CR é retângulo: $(R_A + R_B - 3)^2 - (R_A + 3 - R_B)^2 = 12R_B \Rightarrow$

$(2R_B - 6)(2R_A) = 12R_B \Rightarrow 4R_AR_B - 12R_A = 12R_B \Rightarrow R_A + R_B = 16 \Rightarrow R_A = 12 \;\; R_B = 4 \Rightarrow$

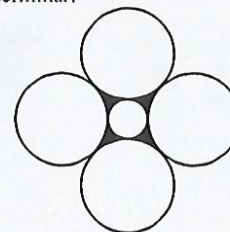
$\overline{AB} = 2(R_A + R_B) = 32$.

Exercícios

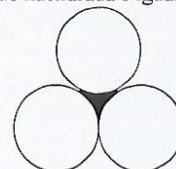
1) (UFCar-2001) Considere a região **R**, pintada de preto, exibida a seguir, construída no interior de um quadrado de lado medindo 4cm.

Sabendo-se que os arcos de circunferência que aparecem nos cantos do quadrado têm seus centros nos vértices do quadrado e que cada raio mede 1cm, pede-se:

a) a área, em cm^2, da região interna ao quadrado, complementar à região **R**;

b) a área, em cm^2, da região **R**.

2) (Fuvest-2004) Na figura ao lado, cada uma das quatro circunferências externas tem mesmo raio r e cada uma delas é tangente a outras duas e à circunferência interna C. Se o raio de C é igual a 2, determinar:

a) o valor de r.

b) a área da região hachurada.

3) (UFRN-95) Na figura abaixo, os três círculos têm raios iguais a 4m e são tangentes dois a dois. A área da região hachurada é igual a:

a) $(12\sqrt{2} - 6\pi)m^2$ b) $(16\sqrt{3} - 8\pi)m^2$

c) $(8\sqrt{3} - 3\pi)m^2$ d) $(3\sqrt{3} - 4\pi)m^2$

e) $(6\sqrt{5} - 3\pi)m^2$

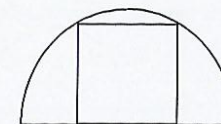
4) (UFRN-96) A figura abaixo mostra um quadrado inscrito num semicírculo de raio **r**. Sabendo que a área do quadrado é **36cm²**, podemos afirmar que o valor de r é:

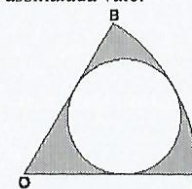
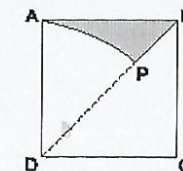
a) 45cm

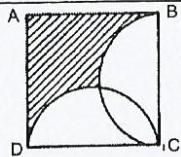
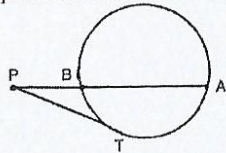
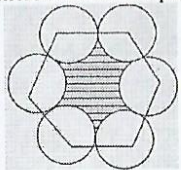
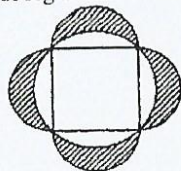
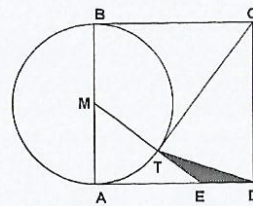
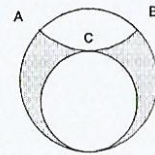
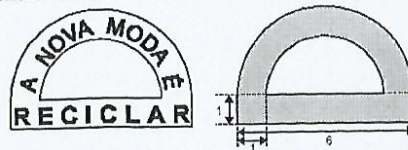
b) $9\sqrt{5}$ cm

c) $5\sqrt{3}$ cm

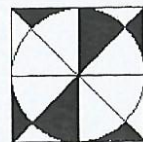
d) $3\sqrt{5}$ cm

e) $2\sqrt{5}$ cm

5) (Mackenzie-2000) O arco de circunferência AB mede 60° e tem centro O. Observadas as condições de tangência da figura, se o círculo inscrito tem raio 4, a área assinalada vale:

a) 6π b) 7π c) 8π d) 9π e) 12π

6) (Mackenzie-2001) Na figura, ABCD é um quadrado e o arco AP tem centro em D. Se a área assinalada mede $\frac{4-\pi}{8}$, o perímetro do quadrado é igual a:

a) 2 b) $4\sqrt{2}$ c) 4 d) $\sqrt{2}$ e) 8

7) (Covest-93) Na figura abaixo ABCD é um quadrado de lado 4cm e as semicircunferências tem centros nos pontos médios dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$. Qual o inteiro mais próximo da área (em cm^2) da região hachurada?

8) (Covest-93) Na figura abaixo, o segmento tangente $\overline{PT}$ e a corda $\overline{AB}$ medem 20cm. Qual o inteiro mais próximo da medida de $\overline{PB}$?

9) (Covest-94) A região hachurada, na figura abaixo, é obtida eliminando do interior do hexágono regular de lado 4 cm a sua interseção com os 6 círculos de raio 2cm, de centros nos vértices deste hexágono, respectivamente. Se S cm^2 é o valor da área da região hachurada, determine o número inteiro mais próximo de S.

10) (Covest-96) Num círculo inscreve-se um quadrado de lado 7cm. Sobre cada lado do quadrado, considera-se a semi-circunferência exterior ao quadrado com centro no ponto médio do lado e raio 3,5cm, como na figura abaixo. Calcule a área de região hachurada.

11) (Covest-99) Na ilustração a seguir **ABCD** é um quadrado de lado **10**, a circunferência tem raio **5** e centro no ponto médio **M** de **AB** e **CT** é tangente à circunferência em **T**. Calcule a área do triângulo hachurado **TED**.

12) (Covest-2000) Na figura, a circunferência maior tem raio 5, o arco ACB, de uma circunferência de raio 5, mede 90°. A circunferência menor é tangente à maior e ao arco ACB no seu ponto médio. Qual a área da região colorida?

13) (Espm-99) A figura à esquerda é o emblema de uma campanha ambiental feita por uma loja de roupas. Esse emblema foi feito a partir da figura à direita, cuja parte inferior é um retângulo e a parte superior é formada por duas semi-circunferências concêntricas.

Se as medidas indicadas são dadas em centímetros, a área da região sombreada, em centímetros quadrados, é igual a

a) $6 + 9\pi/2$ b) $6 + 7\pi/2$ c) $6 + 5\pi/2$
d) $3 + 5\pi$ e) $3 + 5\pi/2$

14) (Unesp-2003) Uma empresa tem o seguinte logotipo:

Se a medida do raio da circunferência inscrita no quadrado é 3 cm, a área, em cm^2, de toda a região pintada de preto é

a) $9 - 9\pi/4$ b) $18 - 9\pi/4$ c) $18 - 9\pi/2$
d) $36 - 9\pi/4$ e) $36 - 9\pi/2$

15) (Unicamp-2001) Considere três circunferências em um plano, todas com o mesmo raio $r = 2$ cm e cada uma delas com centro em um vértice de um triângulo eqüilátero cujo lado mede 6 cm. Seja C a curva fechada de comprimento mínimo que tangencia externamente as três circunferências.
a) Calcule a área da parte do triângulo que está fora das três circunferências.
b) Calcule o comprimento da curva C.

16) (Colégio Naval-80) Um triângulo retângulo tem os catetos com **2 cm** e **6 cm**. A área do círculo que tem o centro sobre a hipotenusa e tangente os dois catetos é de:

a) $\frac{9\pi}{4}$ cm^2 c) $\frac{16\pi}{9}$ cm^2 e) 18π cm^2
b) $\frac{25\pi}{9}$ cm^2 d) 20π cm^2

17) (Colégio Naval-80) Do ponto **P** exterior a uma circunferência tiramos uma secante que corta a circunferência nos pontos **M** e **N** de maneira que $\overline{PN} = 3x$ e $\overline{PM} = x - 1$. Do mesmo ponto **P** tiramos outra secante que corta a mesma circunferência em **R** e **S**, de maneira que $\overline{PR} = 2x$ e $\overline{PS} = x + 1$. O comprimento do segmento da tangente à circunferência tirada do mesmo ponto **P**, se todos os segmentos estão medidos em **cm** é:

a) $\sqrt{40}$ cm c) $\sqrt{34}$ cm e) 8 cm
b) $\sqrt{60}$ cm d) 10 cm

18) (Colégio Naval-80) Duas circunferências são tangentes exteriores em **P**. Uma reta tangencia essas circunferências nos pontos **M** e **N** respectivamente. Se $\overline{PM} = 4$ **cm** e $\overline{PN} = 2$ **cm**, o produto dos raios dessas circunferências dá:

a) 8 cm^2 b) 4 cm^2 c) 5 cm^2 d) 10 cm^2 e) 9 cm^2

19) (Colégio Naval-81) Pela extremidade A de um diâmetro $\overline{AB}$ de uma circunferência de raio **R**, traça-se uma tangente. Com centro na extremidade **B**, descreve-se um arco de raio **4R**, que intercepta a tangente no ponto **C**. Traça-se $\overline{BC}$ que encontra a circunferência dada em **E**. O valor de $\overline{AB}$ é:

a) 0,25 R b) 0,5R c) 0,75 R d) 0,8R e) R

20) (Colégio Naval-82) A área da coroa circular determinada pelos círculos inscrito e circunscrito a um hexágono regular de área $54\sqrt{3}$ cm^2, é:

a) 6π cm^2 b) 9π cm^2 c) 12π cm^2
d) 18π cm^2 e) 27π cm^2

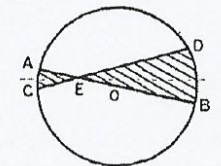
21) (Colégio Naval-82) De um pedaço quadrado de metal corta-se uma peça circular de diâmetro máximo e desta peça circular corta-se outro quadrado de lado máximo. A quantidade de material desperdiçado é:

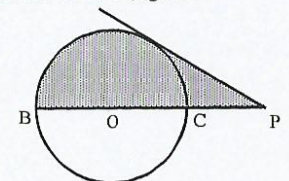
a) 1/4 da área do quadrado primitivo.
b) 1/2 da área do círculo.
c) 1/3 da área do quadrado primitivo.
d) 1/4 da área do círculo.
e) 1/2 da área do quadrado primitivo.

22) (Colégio Naval-82) A área do segmento circular determinado por uma corda de $6\sqrt{3}$ cm e sua flecha de 3 cm, é:

a) $(12\pi + 9\sqrt{3})$ cm^2 b) $(12\pi - 9\sqrt{3})$ cm^2
c) $(12\pi + 3\sqrt{3})$ cm^2 d) $(12\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2
e) $(12\pi - 6\sqrt{3})$ cm^2

23) (Colégio Naval-83) Na figura, o diâmetro $\overline{AB}$ mede $8\sqrt{3}$ cm e a corda CD forma um ângulo de 30° com $\overline{AB}$. Se E é ponto médio de $\overline{AO}$, onde **O** é o centro do círculo, a área da região hachurada mede:

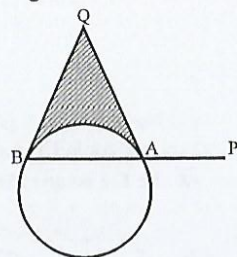
a) $(8\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2
b) $(10\pi + \sqrt{13})$ cm^2
c) $(18\pi + 2\sqrt{3})$ cm^2
d) $(27\pi - 3\sqrt{2})$ cm^2
e) $(8\pi + 3\sqrt{3})$ cm^2

24) (Colégio Naval-84) O círculo de centro **O** da figura abaixo tem $\sqrt{6}$ cm de raio. Sabendo que $\overline{PA}$ é tangente à circunferência e que a medida do segmento $\overline{PC}$ é igual a $\sqrt{6}$ cm, a área hachurada é, em cm^2, aproximadamente, igual a

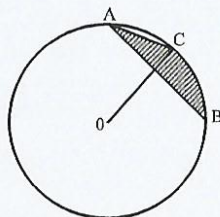
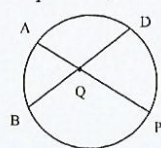
a) 10
b) 10,5
c) 11
d) 11,5
e) 12

25) (Colégio Naval-84) As retas $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes a circunferência de raio R nos pontos A e B respectivamente. Se $\overline{PA} = 3x$ e **x** é a distância do ponto A à reta $\overline{PB}$, então R é igual a:

a) $3(3-2\sqrt{2})x$ b) $3(3+2\sqrt{2})x$ c) $3x$
d) $2(2+3\sqrt{3})x$ e) x

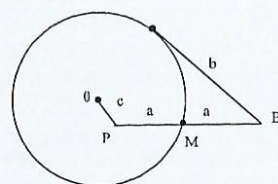
26) (Colégio Naval-84) A secante (r) à uma circunferência de 6 cm de raio determina uma corda AB de $8\sqrt{2}$ cm de comprimento. A reta (s) é paralela a (r) e tangência a circunferência no menor arco AB. A distância entre (r) e (s) é de:
a) 6 cm b) 10 cm c) 5 cm d) 4 cm e) 7 cm

27) (Colégio Naval-85) A figura abaixo tem-se: $\overline{QB}$ e $\overline{QA}$ são tangentes ao circulo de raio 2 a medida do segmento $\overline{PA}$ é $2\sqrt{3}$ e a potência do ponto P em relação ao circulo é igual a 24. A área hachurada da figura é igual a:

a) $\frac{4}{3}(2\sqrt{3}-\pi)$
b) $\frac{4}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$
c) $\frac{4}{3}(\sqrt{3}-\pi)$
d) $\frac{4}{3}(4\sqrt{3}-\pi)$
e) $\frac{4}{3}(6\sqrt{3}-\pi)$

28) (Colégio Naval-87) Na figura abaixo, $\overline{\mathbf{AB}}$ e $\overline{\mathbf{AC}}$ são, respectivamente, os lados do quadrado e do octógono regular inscrito no círculo de centro **0** e raio **r**. A área hachurada é dada por:

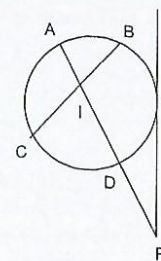
a) $\frac{r^2}{2}(\pi+4-2\sqrt{2})$
b) $\frac{r^2}{8}(\pi+4+2\sqrt{2})$
c) $\frac{r^2}{8}(4-\pi+\sqrt{2})$
d) $\frac{r^2}{8}(4+2\sqrt{2}-\pi)$
e) $\frac{r^2}{8}(\pi-4+2\sqrt{2})$

29) (Colégio Naval-89) Considere as cordas $\overline{AP}=13$ e $\overline{BD}=12$ de uma circunferência, que se interceptam no ponto Q; e um ponto C da corda $\overline{AP}$, tal que ABCD seja um paralelogramo. Determinado este ponto C, $\overline{AC}$ mede:
a) 8
b) 9
c) 10
d) 12
e) 18

30) (Colégio Naval-90) Os lados do triângulo medem: $AB=2$; $Ac=2\sqrt{3}$ e $BC=4$. A área da intercessão entre o círculo de centro B e raio $\overline{BA}$, o círculo de centro C e raio $\overline{CA}$ e o triângulo ABC, é:

a) $\frac{3\pi}{2}-2\sqrt{3}$ b) $\frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}$ c) $\frac{5\pi}{4}-2\sqrt{3}$
d) $\frac{5\pi}{3}-2\sqrt{3}$ e) $\frac{6\pi}{5}-2\sqrt{3}$

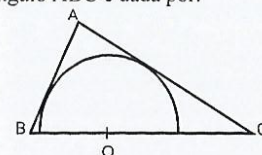
31) (Colégio Naval-90)

Dados:
Centro 0
P ponto interior qualquer
Med ($\overline{PM}$) = Med ($\overline{MB}$) = a
AB é tangente ao circulo em A

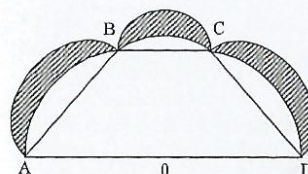
O raio do circulo da figura acima, onde $a^2 = bc$ é igual a:
a) $|a+c-b|$ b) $|2a+c-b|$ c) $|a+b-c|$
d) $|2a-c|$ e) $|b-c|$

32) (Colégio Naval-94) Na figura ao lado, $\overline{PA}$ é um secante ao circulo, $\overline{PT}$ é uma tangente ao circulo e $\overline{BC}$ é uma corda do circulo. Qual das relações abaixo sempre está válida ?

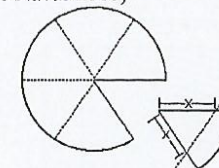
a) $\frac{\overline{PD}}{\overline{PT}}=\frac{\overline{PT}}{\overline{PA}}$
b) $\frac{\overline{PD}}{\overline{PT}}=\frac{\overline{PT}}{\overline{AD}}$
c) $\frac{\overline{CT}}{\overline{BT}}=\frac{\overline{AT}}{\overline{DT}}$
d) $\frac{\overline{PT}}{\overline{CT}}=\frac{\overline{TB}}{\overline{PT}}$
e) $\frac{\overline{PD}}{\overline{BT}}=\frac{\overline{CT}}{\overline{PA}}$

33) (Colégio Naval-95) Sejam C_1 e C_2 dois círculos ortogonais de raios R_1 e R_2. A distância entre os centros é π. A soma das áreas dos círculos é igual a:

a) $\frac{3\pi^2}{2}$ b) $\frac{\pi^2}{4}$ c) π^2 d) π^3 e) $\frac{5\pi^2}{4}$

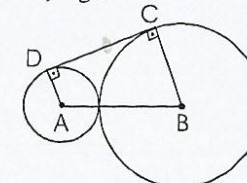
34) (Colégio Naval-95) Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, o ponto O é o centro do semi-círculo de raio **r**, tangente aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Sabendo-se que $\overline{OB} = r\sqrt{3}$, a área do triângulo ABC é dada por:

a) $\frac{r^2}{3}(2\sqrt{2}+4)$; b) $\frac{r^2}{4}(2\sqrt{3}+4)$;
c) $\frac{r^2}{4}(3\sqrt{2}+2)$; d) $\frac{r^2}{4}(3\sqrt{2}+4)$;
e) $\frac{r^2}{3}(4\sqrt{2}+4)$.

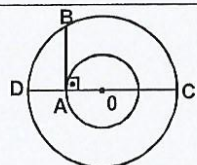
35) (Colégio Naval-96) Na figura abaixo, tem-se um semicírculo de centro **O** e diâmetro **AD** e os semicírculos de diâmetros **AB, BC, CD** e centros $\mathbf{O_1}$, $\mathbf{O_2}$, e $\mathbf{O_3}$ respectivamente. Sabendo que **AB = BC = CD** e que **AO = R**, a área hachurada é igual a:

a) $\frac{R^2(3\sqrt{3}-\pi)}{4}$ b) $\frac{R^2}{8}(6\sqrt{3}-\pi)$ c) $\frac{\pi R^2}{4}$
d) $\frac{\pi R^2}{16}(2\sqrt{3}+\pi)$ e) $\frac{R^2(5\sqrt{3}-2\pi)}{24}$

36) (Colégio Naval-97) Define-se como potência de um ponto P em relação a um círculo, C, de centro O e raio r, como sendo o quadrado da distância de P a O, menos o quadrado de r. Qual é a potência de um dos vértices do hexágono regular circunscrito a um círculo de raio r, em relação a este círculo?
a) $2r^2/3$ b) $r^2/2$ c) $r^2/3$ d) $r^2/4$ e) $r^2/6$

37) (Colégio Naval-2000)

Uma pizza circular de raio 30 cm foi dividida em 6 partes iguais para seis pessoas. Contudo, uma das pessoas resolveu repartir ao meio o seu pedaço, como mostra a figura acima. O valor de x é:

a) $10\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$ b) $10\sqrt{\frac{3\pi}{3}}$ c) $10\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$
d) $10\sqrt{\frac{3\pi}{\sqrt{3}}}$ e) $10\sqrt{\frac{5\pi}{\sqrt{3}}}$

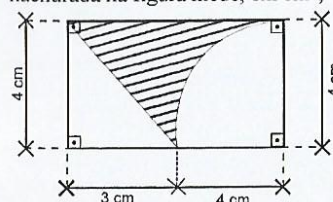
38) (EPCAr-98) Na figura, A e B são os centros de duas circunferências tangentes exteriormente. Os raios são R = 1 m e R' = 4 m. CD é uma tangente comum às duas curvas. A área do trapézio ABCD, medida em m^2, é igual a

a) 8 b) 10 c) 12 d) 16

39) (EPCAr-99) Na figura abaixo, $\overline{AB} = 1$, o raio do círculo maior é R, e o do menor é r.

A área da coroa circular é igual a

a) 1 b) $\pi/2$ c) π d) 2π

40) (EPCAr-2000) P é um ponto da corda CD do círculo de centro O. Se CP = 9 cm, PD = 5 cm e o raio mede 9 cm, então o valor de OP é

a) 4 cm b) 5 cm c) 6 cm d) 7 cm

41) (EPCAr-2000) - A área da superfície hachurada na figura mede, em cm^2,

a) $3 + 2\pi$ b) $6 + 4\pi$ c) $28 - 6\pi$ d) $22 - 4\pi$

42) (EPCAr-2001) De um ponto P exterior a uma circunferência, traçam-se uma secante PB de 32 cm, que passa pelo seu centro, e uma tangente PT cujo comprimento é de 24 cm. O comprimento dessa circunferência, em cm, é

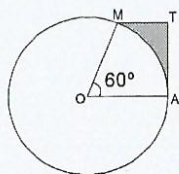
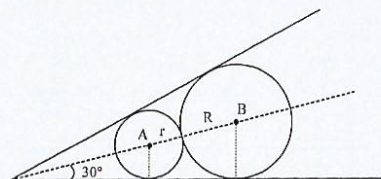
a) 14π b) 12π c) 10π d) 8π

53) (EPCAr-2001) Na figura, O é o centro do círculo de raio r, AT é tangente ao círculo e MT é perpendicular a AT. Então, a área hachurada é

a) $\frac{r^2}{24}\left(9\sqrt{3} - 4\pi\right)$

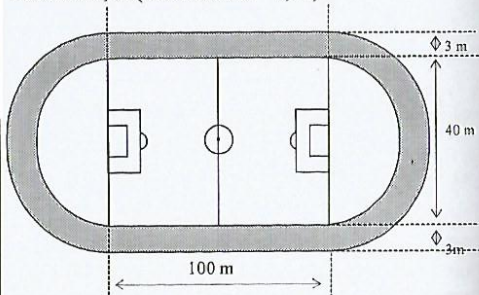
b) $\frac{r^2}{24}\left(15\sqrt{3} - 4\pi\right)$

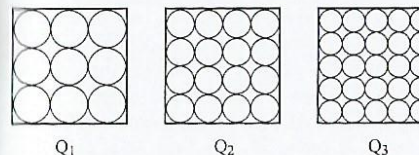
c) $\frac{r^2}{24}\left(6\sqrt{3} - 4\pi\right)$

d) $\frac{r^2}{24}\left(4\sqrt{3} - 4\pi\right)$

44) (EPCAr-2002) Considere dois círculos de raios (r) e (R) centrados em A e B, respectivamente, que são tangentes externamente e cujas retas tangentes comuns formam um ângulo de 60°. A razão entre as áreas do círculo maior e do menor é

a) 9 b) 3 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{9}$

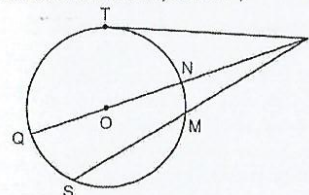
45) (EPCAr-2002) $\overline{AB} = 20$ cm é um diâmetro de um círculo de centro O e T é um ponto da tangente ao círculo em A, tal que $\overline{AT} = \overline{AB}$. A reta determinada por O e T intercepta o círculo em C e D, tal que $\overline{TC} < \overline{TD}$. O segmento TD mede

a) $10\sqrt{5} - 10$ b) $10 - \sqrt{5}$
c) $10\sqrt{5} + 10$ d) $20 - 10\sqrt{5}$

46) (EPCAr-2002) Em torno de um campo de futebol, conforme figura abaixo, construiu-se uma pista de atletismo com 3 metros de largura, cujo preço por metro quadrado é de R$ 500,00. Sabendo-se que os arcos situados atrás das traves dos gols são **semicírculos** de mesma dimensão, o custo total desta construção que equivale à área hachurada, é: (Considere $\pi = 3{,}14$)

a) R$ 300.000,00 c) R$ 502.530,00
b) R$ 464.500,00 d) R$ 667.030,00

47) (EPCAr-2003) Nas figuras abaixo, os quadrados Q_1, Q_2 e Q_3 têm lados com mesmo comprimento **x** e as circunferências em cada quadrado têm o mesmo diâmetro x_1, x_2 e x_3, respectivamente. Sejam S_1, S_2 e S_3 as áreas totais ocupadas pelo conjunto de circunferências em cada quadrado Q_1, Q_2 e Q_3, respectivamente.

Marque a alternativa correta.

a) $S_3 > S_1$ c) $S_1 = S_2 = S_3$
b) $S_1 < S_2$ d) $S_2 < S_3$

48) (EPCAr-2004) Na figura abaixo, **T** é ponto de tangência, **PQ** e **PS** são secantes ao círculo de centro **O** e $\overline{MS} = 6$ cm. Se **PN**, **PM** e **PT** são respectivamente proporcionais a 1, 2 e 3, então a área do círculo vale, em cm^2,

a) $51{,}84\pi$ b) $70{,}56\pi$ c) $92{,}16\pi$ d) $104{,}04\pi$

49) (EPCAr-2004) O comprimento da circunferência de um círculo de raio R_1 é igual ao comprimento de um arco de 30° da circunferência de um círculo de raio R_2. Se a área do primeiro é igual a 2, então a área do segundo é

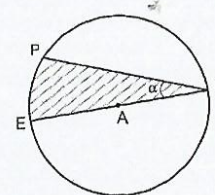
a) 288 b) 144 c) 72 d) 48

50) (EPCAr-2004) Os pontos **EPC** pertencem à circunferência de centro **A** e raio $r = 2$. A área da região hachurada, sabendo-se que o ângulo α mede $\frac{\pi}{12}$ rad e que a corda **PC** mede $\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$, é igual a

a) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$

b) $1 + \frac{\pi}{3}$

c) $\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$

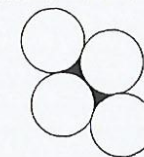
d) $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$

51) (EEAR-2002) Seja AB o diâmetro de uma circunferência. Por A traça-se uma tangente à circunferência, que encontra o prolongamento de uma corda MN paralela ao diâmetro, num ponto P. Sabendo que PM mede 9 cm (M está mais próximo de P do que N) e que o raio do círculo vale 12,5 cm, então a distância do centro à corda MN, em cm, mede

a) 8 b) 10 c) 12 d) 15

52) (EEAR-2002) Numa circunferência de centro C e raio 20 cm, considere a corda $\overline{AB}$, cujo ponto médio é M. Se CM = 10 cm, então a medida de $\overline{AB}$ é, em cm,

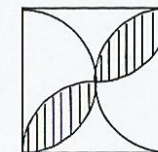
a) $15\sqrt{5}$ b) $20\sqrt{3}$ c) 15 d) 20

53) (AFA-94) Na figura, todos os círculos têm raio **r**. Qual a área da parte hachurada?

a) $r^2\left(2\sqrt{3} - \pi\right)$
b) $r^2\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$
c) $r^2\left(4\sqrt{3} - \pi\right)$
d) $r^2\left(5\sqrt{3} - \pi\right)$

54) (AFA-98) Um círculo com área 100π cm^2 possui uma corda de 16 cm. Qual a área, em cm^2, do maior círculo tangente a essa corda e a esse círculo em pontos distintos?

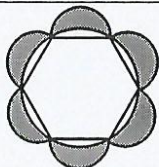
a) 36π b) 49π c) 64π d) 81π

55) (AFA-99) Na figura abaixo, o lado do quadrado é 1 cm. Então, a área da região hachurada, em cm^2, é

a) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. b) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$.
c) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$. d) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$.

56) (Escola Naval-93/94) Três circunferências de raios r, 2r e 3r são tais que, cada uma delas tangencia exteriormente as outras duas. O triângulo, cujos vértices são os centros dessas circunferências, tem área:

a) r^2 b) $\sqrt{3}\,r^2/2$ c) $4r^2$ d) $6r^2$ e) $12r^2$

57) (ITA-81) Na figura abaixo, temos um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio r e 6 outras semicircunferências com centros nos pontos médios dos lados do hexágono e cujos diâmetros são iguais aos lados do hexágono. calcule a área da superfície hachurada.

a) $(\sqrt{3} - \pi/6).r^2$
b) $(\sqrt{2} - \pi/4).r^2$
c) $((3\sqrt{3})/2 - \pi/4).r^2$
d) $((\sqrt{3})/2 - \pi/6).r^2$
e) $((\sqrt{2})/2 - \pi/4).r^2$

58) (ITA-95) Considere C uma circunferência centrada em O e raio $2r$, e t a reta tangente a C num ponto T. Considere também A um ponto de C tal que $A\hat{O}T = \theta$ é um ângulo agudo. Sendo B o ponto de t tal que o segmento AB é paralelo ao segmento OT, então área do trapézio $OABT$ é:
a) $r^2(2\cos\theta - \cos 2\theta)$ b) $r^2(2\text{sen}\theta - \cos\theta)$
c) $2r^2(4\cos\theta - \text{sen}2\theta)$ d) $2r^2(2\text{sen}2\theta - \cos 2\theta)$
e) $r^2(4\text{sen}\theta - \text{sen}2\theta)$

59) (ITA-99) Duas circunferências de raios iguais a 9 m e 3 m são tangentes externamente num ponto C. Uma reta tangencia estas duas circunferências nos pontos distintos A e B. A área, em m², do triângulo ABC é:
a) $27\sqrt{3}$ b) $27\sqrt{3}/2$ c) $9\sqrt{3}$ d) $27\sqrt{2}$ e) $27\sqrt{2}/2$

60) (ITA-2004) Duas circunferências concêntricas C_1 e C_2 têm raios de **6 cm** e $6\sqrt{2}$ **cm**, respectivamente. Seja $\overline{AB}$ uma corda de C_2, tangente à C_1. A área da menor região delimitada pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco $\overline{AB}$ mede, em **cm²**.
a) $9(\pi - 3)$ b) $18(\pi + 3)$ c) $18(\pi - 2)$
d) $18(\pi + 2)$ e) $16(\pi + 3)$

61) (IME-65) Divida a área de um círculo de raio R, em n partes equivalentes, por meio de circunferências concêntricas de raios $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_i, \ldots, r_{n-1}$, estabelecer o valor de r_i em função de R, n e i.

62) (IME-89/90) Seja AB um diâmetro de um círculo de centro O e raio R. Sobre o prolongamento de AB escolhemos um ponto P (PB < PA). Partindo de P tomamos uma secante que corta o círculo nos pontos M e N (PM < PN), de modo que PM = AN = R. a) Mostre que a corda MB é um lado de um polígono regular inscrito de dezoito lados. B) Encontre uma equação (do 3° grau) que determina a distância de P ao centro do círculo em função de R.

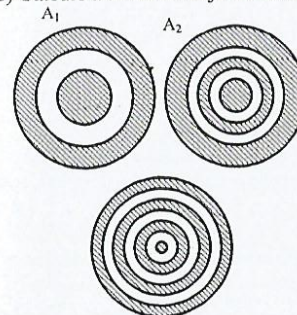
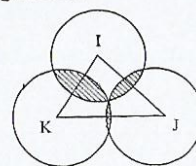
63) (IME-84/85) Dá-se um triângulo retângulo isósceles de catetos AB = AC = l. Descreve-se um quarto de círculo (Q) de centro A, ligando os vértices B a C. Com diâmetro BC, descreve-se um semi-círculo (S) exterior ao triângulo e que não contém A. Traçam-se duas semi-circuferências de diâmetros AB e AC, (S_B) e (S_C), ambas passando pelo ponto D, meio de BC. Seja M a superfície compreendida entre (Q) e (S). Seja N a superfície compreendida entre (Q) e o arco BD de (S_B) e o arco CD de (S_C). Seja P a superfície limitada pelos arcos AD de (S_C) e AD de (S_B).
Demonstre que :
a) A área M é igual a área do triângulo ABC
b) As áreas de N e P são iguais.

64) (IME-86/87) Sobre uma reta r marcam-se, nesta ordem, os pontos A, B, C e D. Em um dos semiplanos determinados por r, traçam-se as semi-circunferências de diâmetros AB, CD e AD; no outro semiplano traça-se a semicircunferência de diâmetro BC. Calcule a razão entre a área delimitada por estas semicircunferências e a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos médios das semi-circunferências. Mostre que esta razão independe dos pontos A, B, C e D.

65) (IME-87/88) Seja o semi-círculo de diâmetro AB = 2R e r sua tangente em A. Liga-se um ponto P da reta r ao ponto B, interceptando o semi-círculo no ponto C. a) demonstre que o produto PB.BV é constante; b) determine o lugar geométrico do ponto médio AC, quando O desloca-se sobre a tangente; c) seja AP = PB/2, calcule a área da porção do triângulo PAB situada no exterior do semi-círculo.

66) (IME-87/88) Dado um círculo de raio R e centro O, constrói-se 3 círculos iguais de raio r, tangentes dois a dois, nos pontos E, F, G e tangentes interiores ao círculo dado. Determine, em função de R, o raio destes círculos e a área da superfície EFG, compreendida entre os três círculos e limitada pelos arcos EG, GF e FE.

67) (IME-88/89) Numa circunferência de centro O e diâmetro AB = 2R, prolonga-se o diâmetro AB até um ponto M, tal que BM = R. Traça-se uma secante MNS tal que MN = NS, onde N e S são os pontos de interseção da secante com a circunferência. Determine a área do triângulo MOS.

68) (IME-90/91) No plano, considere um disco de raio R, chame este conjunto de A_0. Divida um raio de A_0 em três segmentos congruentes e retire de A_0 a coroa circular de raios R/3 e 2R/3, chame este conjunto de A_1. O conjunto A_1 contém um disco de raio R_1 = R/3, divida um raio deste disco em três segmentos congruentes e, mais uma vez, retire de A_1 a coroa circular de raios $R_1/3$ e $2R_1/3$, chame este conjunto de A_2. Continue este processo indefinidamente e seja A o conjunto resultante.
a) Calcule a área do conjunto A_n obtido após a n-ésima etapa do processo descrito acima.
b) Calcule a área do conjunto resultante A.

69) (IME-94/95) Três círculos de mesmo raio "R" se interceptam dois a dois, como é mostrado na figura abaixo, constituindo três áreas comuns que formam um trevo. Determine o perímetro do trevo e sua área em função de "R" e da área "S" do triângulo IJK.

70) (IME-87/88) Seja o semi-círculo de diâmetro AB = 2R e r sua tangente em A. Liga-se um ponto P da reta r ao ponto B, interceptando o semi-círculo no ponto C.
a) Demonstre que o produto PB.PC é constante.
b) Seja AP = PB/2, calcule a área da porção do triângulo PAB situada no exterior do semi-círculo.

71) Dadas duas circunferências secantes e uma tangente comum que as toca em T e T', demonstrar que a secante comum corta o segmento TT' em seu meio.

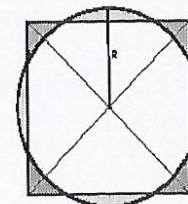
72) Dadas duas circunferências secantes, demonstrar que as tangentes traçadas de um mesmo ponto da reta que passa pelos pontos comuns são iguais.

73) Pela extremidade A do diâmetro AB traça-se uma corda de 5 m e pela extremidade B uma corda de 7 m. A projeção da primeira corda sobre o diâmetro mede 3 m. Calcular a projeção da segunda corda.

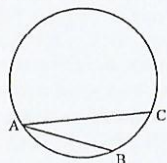
74) Dois círculos de raios R e r se tangenciam exteriormente e t é uma reta tangente comum exterior aos dois círculos. Determine o raio do maior círculo tangente exteriormente aos dois círculos dados e tangente à reta t.

75) Seja C uma semicircunferência de diâmetro AB. Por um ponto Q de AB (Q ≠ A e Q ≠ B) traçam-se duas semicircunferências C_1 e C_2 (interiores a C) de diâmetros AQ e BQ, respectivamente. Seja P o ponto onde a perpendicular a AB passando por Q corta a semicircunferência C (P ≠ Q). Seja M o ponto onde AP corta C_1 (M ≠ A) e seja N o ponto onde BP corta C_2 (N ≠ B). a) Demonstre que MN é tangente a C_1 e C_2. b) Determine o valor de MN em função de QA e QB.

76) Dois círculos cujos raios medem R e r, tangenciam-se externamente. Calcular a área do trapézio ABCD, formado pelas tangentes comuns AB e CD e pelas cordas de contrato AD e BC.

77) (Goiás-2004) Considere um quadrado cuja diagonal mede 2 cm e um círculo de raio R, como na figura abaixo. Determine R tal que a área da região do círculo que está fora do quadrado seja igual à área região do quadrado que está fora do círculo.

78) (OBM-82) Construa geometricamente o segmento de reta de comprimento $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$, conhecendo-se os segmentos a e b.

79) (OBM-97) Um gramado tem a forma de um quadrado com 10m de lado. Uma corda tem um dos extremos fixado em um dos vértices, e no outro extremo está amarrado um bode. Se o bode consegue comer metade da grama, então o comprimento da corda é de aproximadamente:
a) 8 m b) 7,5 m c) 7 m d) 6,5 m e) 6 m

80) (OBM-99) A circunferência abaixo tem raio 1, o arco AB mede 70^0 e o arco BC mede 40^0. A área da região limitada pelas cordas AB e AC e pelo arco BC mede:

a) $\pi/8$
b) $\pi/9$
c) $\pi/10$
d) $\pi/12$
e) $\pi/14$

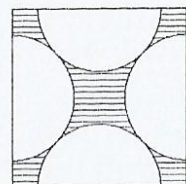
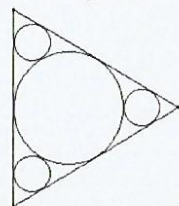
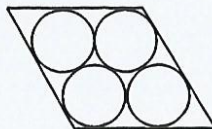
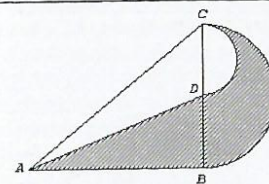
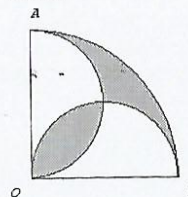
81) (OBM-2002) Seja ABC um triângulo inscrito em uma circunferência de centro O e P um ponto sobre o arco AB que não contém C. A perpendicular traçada por P à reta BO intersecta AB em S e BC em T. A perpendicular traçada por P a AO intersecta AB em Q e AC em R. Prove as duas afirmações a seguir:
a) PQS é um triângulo isósceles
b) $PQ^2 = QR.ST$

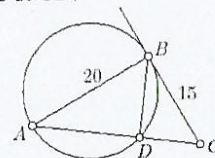
82) (México-88) Considere duas circunferências tangentes exteriormente e de raios distintos. Suas tangentes comuns formam um triângulo. Calcule a área deste triângulo em função dos raios das circunferências.

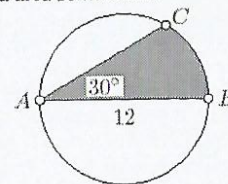
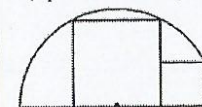
83) (Portugal-99) Se duas cordas paralelas de uma circunferência, de comprimento 10 mm e 14 mm, distarem 6 mm uma da outra, quanto mede a corda eqüidistante dessas duas?

84) (Bulgária-96) Um triângulo ABC com circunraio R é dado. Sejam R_1 e R_2 são os raios das circunferências k_1 e k_2, respectivamente, que passam por C e são tangentes à reta AB em A e B, respectivamente. a) Prove que $R_1R_2 = R^2$. b) Determine o raio da circunferência que é tangente a k_1, k_2 e a reta AB, em função de R, a = BC, b = AC e c = BC.

85) (Bélgica-92) A figura abaixo mostra um quadrado de lado 1 e quatro semi-círculos de igual comprimento e que possuem uma posição de simetria com relação à tangência um dos outros. A área da região hachurada é:

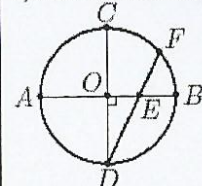
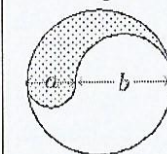
a) $\frac{\pi}{2}$
b) $1-\frac{\pi}{4}$
c) $4-\pi$
d) $\sqrt{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

86) (Cabri-98) Na figura, sabe-se que o triângulo é equilátero. Se os círculos pequenos têm área 5, qual é a área do círculo grande?

87) (Cabri-2001) A figura abaixo é formada por 4 circunferências de igual raio, tangentes entre si e tangentes aos lados do paralelogramo. Se o raio das circunferências é 1cm, achar a área do paralelogramo.

88) (Ñandú-96) O triângulo ABC é retângulo em B e tem 50 cm^2 área. D é o ponto médio de BC e AB = 12,5 cm. Os arcos BC e CD são semi-circunferências. Qual é a área da região hachurada?

89) (Ñandú-96) O arco AB é um quarto de uma circunferência de centro O e raio 10cm. Os arcos OA e OB são semi-circunferências. Qual é a área da região sombreada?

90) (Alabama-2000) Cada um de dois círculos possui área 2π. A distância entre seus centros é 2. Determine a área comum a ambos os círculos.

91) (Alabama-2000) Em um círculo, o diâmetro AB mede 20 e a tangente BC mede 15. Qual o comprimento de CD?

92) (Alabama-2000) Em um círculo, um setor possuindo um arco de 10° possui área de 25π. Qual é o raio do círculo?

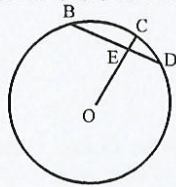
93) (Alabama-2000) O diâmetro AB de um círculo é 12 e a medida do ângulo ∠CAB é 30°. Determine a área sombreada.

94) (High School Contest-96) Dois quadrados estão inscritos em uma semi-circunferência como indicado na figura. Se a área do quadrado menor é 25, qual a área do quadrado maior?

95) (Indiana University-96) Quatro moedas de diâmetro d são colocadas com seus centros nos quatro vértices de um quadrado de lado d. A porcentagem da área do quadrado que é coberta pelas moedas é:
a) 60 a 70 b) 70 a 80 c) 80 a 90 d) 90 a 100

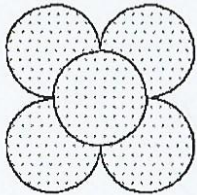
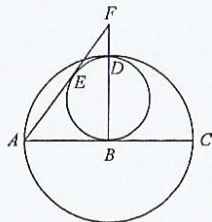
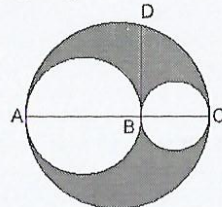
96) (Indiana University-96) Uma circunferência de raio r é tangente aos lados AB, AD e CD de um retângulo ABCD a passa pelo ponto médio da diagonal AC. A área do retângulo é:
a) $3\pi r^2$ b) $12r$ c) $2r + r^2$ d) $8r^2$ e) $8\pi r$

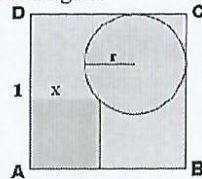
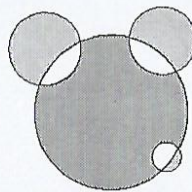
97) (Ahsme-95) Na figura, AB e CD são diâmetros de um círculo com centro O, AB ⊥ CD, a corda DF intersecta AB em E. Se DE = 6 e EF = 2, então a área do círculo é:

a) 23π
b) $47\pi/2$
c) 24π
d) $49\pi/2$
e) 25π

98) (Ahsme-98) A figura mostra a união de um círculo e dois semi-círculos de diâmetros a e b, todos os centros são colineares. A razão entre a área da região hachurada e a área em branco é:

a) $\sqrt{\frac{a}{b}}$
b) a/b
c) a^2/b^2
d) (a + b)/2b
e) $(a^2 + 2ab)/(b^2 + 2ab)$

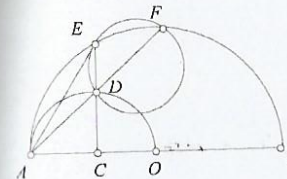
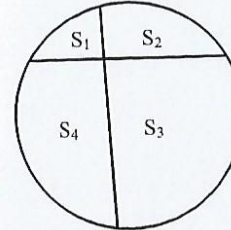
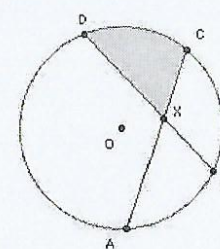
99) (Manitoba-2002) A, B, C e D são pontos de uma circunferência. AB é um diâmetro. CD é perpendicular a AB e encontra AB em E. Se AB e CD são inteiros e $\overline{AE} - \overline{EB} = \sqrt{7}$, determine $\overline{AE}$.

100) (Canadá-71) DEB é uma corda tal que DE = 3 e EB = 5. Seja O o centro do círculo. Trace OE e prolongue OE até cortar o círculo em C. Dado EC = 1, encontre o raio do círculo.

101) (Bélgica-2000) O diâmetro de uma circunferência com centro m é 110 cm. Um ponto p pertencente a uma corda divide a corda em pedaços de 30 e 60 cm. Então |pm| (em cm) mede:
a) 28 b) 30 c) 32 d) 33 e) 35

102) (Portugal-98) Na figura seguinte, todos os arcos são arcos de circunferências de raio 1. A circunferência central passa pelos pontos de contato (tangência) dos arcos de circunferência periféricos. Quanto mede a área da região sombreada?

103) (Hong Kong-95) Na figura, AC é o diâmetro de uma circunferência C_1 de raio unitário, tendo B como centro. Outra circunferência C_2 tangencia AC em B e a circunferência C_1 em D. Uma tangente à circunferência C_2, traçada desde A, intersecta C_2 em E e o prolongamento de BD em F. Calcule AF.

104) (Yucatán-2000) Na figura, AC é um diâmetro e BD ⊥ AC. Determine o valor da área hachurada sabendo que BD = 1.

105) (Bélgica-98) Três círculos de raio 1 intersectam-se de modo que cada um passa pelo centro dos outros dois círculos. Qual é a área da região comum aos três círculos?

106) (Cone Sul-91) Dado um quadrado ABCD de lado 1, e um quadrado interior de lado x, achar (em função de x) o raio da circunferência que é tangente a dois dos lados do quadrado ABCD e que passa por um vértice do quadrado interior, tal como se indica na figura.

107) (África do Sul-2002) Os diâmetros de quatro círculos mostrados na figura são 6, 4, 4, e 2. Se v é área sombreada da região interior ao círculo maior e w é a soma das áreas sombreadas das regiões dos três círculos menores, então:

a) 2v = w
b) 3v = w
c) v = w
d) 2v = 3w
e) v = 2w

108) (British Columbia College-2002) O diâmetro AD de um círculo é perpendicular ao lado BC de um triângulo eqüilátero ABC, com D pertencendo a BC. Se o comprimento de BC é 4, determine a área do círculo que está externa ao triângulo.

109) (Espanha-2003) Trace um semi-círculo com centro em O e diâmetro AB e, em seu interior, outro, com diâmetro OA. Trace por um ponto C de OA uma reta perpendicular a tal raio OA, que cortará o semi-círculo pequeno em D e o grande em E e, finalmente, a reta AD que cortará o semi-círculo grande em F. Demonstre que o círculo circunscrito ao triângulo DEF é tangente à corda AE em E.

110) (Rio Grande do Norte-2003) Na figura abaixo, a distância do centro O do círculo C às cordas AB e CD são 4 cm e 3 cm, respectivamente. Sendo S_1, S_2, S_3 e S_4 as medidas das áreas das regiões determinadas pelos segmentos e pela linha da circunferência, verifique que $(S_1 + S_3) - (S_2 + S_4) = 48$.

111) (Aime-95) O é o centro da circunferência. AC = BD = 78, OA = 42, OX = 18. Determine a área da região hachurada.

112) (Aime-2002) O triângulo APM possui ∠A = 90° e perímetro 152. Uma circunferência de centro O (em AP) e raio 19 tangencia AM em A e PM em T. Calcule o valor de OP.

113) (Portugal-2004) Com centro em cada um dos vértices de um triângulo equilátero com 2 cm de lado, desenham-se três círculos com $\sqrt{2}$ cm de raio. Qual é a área da interseção dos três círculos?

114) (Canadian Open Challenge-96) O triângulo ABC é retângulo em A. O círculo com centro em A e raio AB corta BC em AC internamente em D e E, respectivamente. Se BD = 20 e DC = 16, determine AC^2.

115) (Panamá-2004) Seja P um ponto exterior de uma circunferência C de centro O e raio 1 e B um ponto sobre a circunferência. Assumimos que os segmentos PO e OB são perpendiculares. Se A é um ponto no segmento PB que está em C e PO = 2, o valor da razão PA/AB é:

a) 1/2 b) 1 c) 3/2 d) 2 e) 5/2

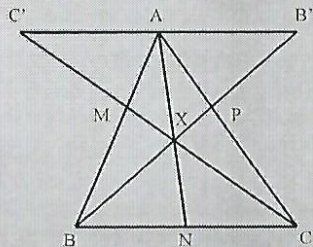
Triângulos: Pontos Clássicos e Cevianas

7.1) TEOREMA DE CEVA

"Seja ABC um triângulo qualquer e sejam M, N e P, respectivamente, pontos sobre os lados AB, BC e AC. AN, BP e CM são concorrentes se e somente se $\frac{AM}{MB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CP}{PA}=1$."

Demonstração:

($\Rightarrow$) "Se AN, BP e CM são concorrentes então $\frac{AM}{MB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CP}{PA}=1$"

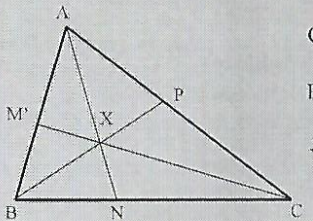
Inicialmente trace uma reta paralela a BC passando por A. Prolongue CM e BP até cortar r, respectivamente, em C' e B'.

Como $\Delta AMC' \sim \Delta BMC$ então $\frac{AM}{MB}=\frac{AC'}{BC}$.

Como $\Delta BPC \sim \Delta B'PA$ então $\frac{CP}{PA}=\frac{BC}{AB'}$

Como $\Delta XBC \sim \Delta XB'C'$: $\frac{BN}{NC}=\frac{AB'}{AC'}$

Portanto: $\frac{AM}{MB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CP}{PA}=\frac{AC'}{BC}.\frac{AB'}{AC'}.\frac{BC}{AB'}=1$

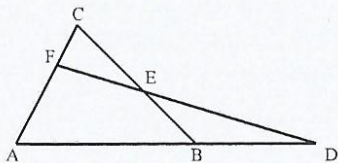
($\Leftarrow$) "Se $\frac{AM}{MB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CP}{PA}=1$ então AN, BP e CM são concorrentes."

Tracemos inicialmente AN e BP, que se cortam em X. Agora tracemos a reta CX, que corta AB em M'.

Como AN, BP, e CM' são concorrentes então $\frac{AM'}{M'B}.\frac{BN}{NC}.\frac{CP}{PA}=1$.

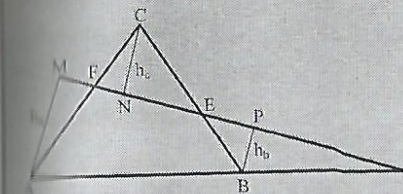
Portanto: $1=\frac{AM}{MB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CP}{PA}=\frac{AM'}{M'B}.\frac{BN}{NC}.\frac{CP}{PA} \Rightarrow$

$\frac{AM}{MB}=\frac{AM'}{M'B} \Rightarrow M=M'$

7.2) TEOREMA DE MENELAUS

"Considere a figura abaixo:

Se os pontos D, E e F estão alinhados então $\frac{AD}{BD}.\frac{BE}{EC}.\frac{CF}{FA}=1$"

Demonstração:

Tracemos por A, B e C as alturas respectivas aos triângulos AFD, CFE e BDE.

Desde que AM, BP e CN são perpendiculares ao segmento MD, então esses três segmentos são paralelos. Assim:

i) $\Delta AMD \sim \Delta BPD \Rightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{h_a}{h_b}$;

ii) $\Delta BPE \sim \Delta CNE \Rightarrow \frac{BE}{EC}=\frac{h_b}{h_c}$;

iii) $\Delta AMF \sim \Delta CNF \Rightarrow \frac{CF}{FA}=\frac{h_c}{h_a}$.

Multiplicando: $\frac{AD}{BD}.\frac{BE}{EC}.\frac{CF}{FA}=\frac{h_a}{h_b}.\frac{h_b}{h_c}.\frac{h_c}{h_a}=1$

7.2.1) Teorema Recíproco de Menelaus:

"Se D, E e F são pontos sobre as retas suportes dos lados AB, BC e AC, respectivamente, e $\frac{AD}{BD}.\frac{BE}{EC}.\frac{CF}{FA}=1$ então D, E e F estão alinhados"

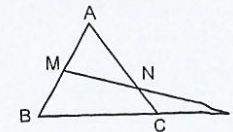
Demonstração:

Suponha que a reta ED corta o lado AC em F'. Pelo Teorema de Menelaus temos que $\frac{AD}{BD}.\frac{BE}{EC}.\frac{CF'}{F'A}=1$.

Como $\frac{AD}{BD}.\frac{BE}{EC}.\frac{CF}{FA}=1$ então temos que $\frac{F'A}{CF'}=\frac{FA}{CF} \Rightarrow F=F' \Rightarrow$ D, E e F estão alinhados.

Exemplos:

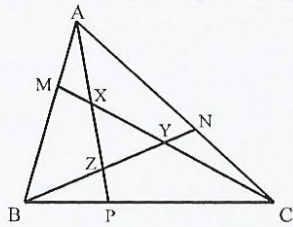
1) (AFA-99) Na figura abaixo o perímetro do triângulo equilátero ABC é 72 cm, M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{CE}$ = 16 cm. Então, a medida do segmento CN, em cm, é um sétimo de

a) 48.
b) 49.
c) 50.
d) 51.

Solução:

Como o perímetro de ΔABC é 72 cm então seu lado mede 18 cm. Aplicando o Teorema de Menelaus tomando como referência o triângulo ΔABC e a transversal ME:

$1=\frac{AM}{BM}.\frac{CN}{AN}.\frac{BE}{CE}=1.\frac{CN}{18-CN}.\frac{16+18}{16} \Rightarrow 34.CN=16(18-CN) \Rightarrow 17.CN=144-4.CN \Rightarrow$

$21.CN=144 \Rightarrow CN=\frac{48}{7}$ cm.

2) Em um triângulo ABC tomam-se os pontos M, N e P sobre os lados AB, AC e BC, respectivamente, de modo que AB = 3AM, AC = 3CN e BC = 3BP. Determine a razão entre área do triângulo XYZ (determinado pelas interseções de AP, BN e CM) e a área do triângulo ABC.

Solução:
Inicialmente designemos por S o valor da área do triângulo ABC.
Aplicando o Teorema de Menelaus em relação ao triângulo ΔAPC e a transversal BN.

$$1=\frac{NA}{NC}.\frac{PZ}{AZ}.\frac{BC}{BP}=2.\frac{PZ}{AZ}.3 \Rightarrow \frac{PZ}{AZ}=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{PZ}{AP}=\frac{1}{7}.$$

Analogamente, pode-se demonstrar que $\frac{NY}{BN}=\frac{1}{7}$ e $\frac{MX}{CM}=\frac{1}{7}$.

Como os triângulos ΔBPZ e ΔABP possuem um lado comum BP, então: $\frac{S_{\Delta BPZ}}{S_{\Delta ABP}}=\frac{PZ}{AP}=\frac{1}{7}$

Da mesma forma, como ΔABP e ΔABC possuem o lado AB comum, então: $\frac{S_{\Delta ABP}}{S}=\frac{BP}{BC}=\frac{1}{3}$

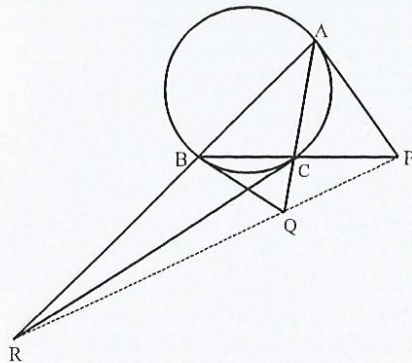
Deste modo, concluímos que $S_{\Delta BPZ}=\frac{S}{21}$. Analogamente: $S_{\Delta CNY}=\frac{S}{21}$ e $S_{\Delta AMX}=\frac{S}{21}$.

Assim: $\frac{S}{3}=S_{\Delta AMX}+S_{BZXM}+S_{\Delta BPZ}=\frac{S}{21}+S_{BZXM}+\frac{S}{21} \Rightarrow S_{BZXM}=\frac{5.S}{21}$.

Analogamente: $S_{AXYN}=\frac{5.S}{21}$ e $S_{CYZP}=\frac{5.S}{21}$.

Finalmente:

$$S=S_{\Delta XYZ}+(S_{\Delta AMX}+S_{\Delta BPZ}+S_{\Delta CNY})+(S_{AXYN}+S_{BZXM}+S_{CYZP})=S_{XYZ}+3.\frac{S}{21}+3.\frac{5.S}{21} \Rightarrow \frac{S_{XYZ}}{S}=\frac{1}{7}.$$

3) (IME-90) Prove que as tangentes ao círculo circunscrito a um triângulo, passando nos seus vértices, interceptam os lados opostos em três pontos colineares.
Solução:

Como $\angle BAC$ e $\angle QBC$ compreendem a mesma corda na circunferência então $\angle BAC=\angle QBC$.

Assim: $\Delta ABQ \sim \Delta BCQ \Rightarrow \frac{AQ}{BQ}=\frac{BA}{BC}$.

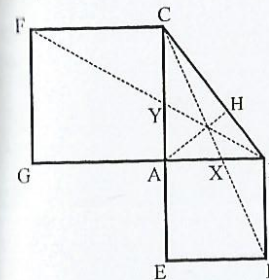
Analogamente $\angle BCR=\angle BAC \Rightarrow \Delta CRB \sim \Delta ARC \Rightarrow \frac{CR}{AR}=\frac{BC}{AC}$.

Finalmente $\angle CAP=\angle ABC \Rightarrow \Delta CAP \sim \Delta ABP \Rightarrow \frac{PC}{BP}=\frac{AC}{BA}$.

Multiplicando as três expressões obtidas:

$$\frac{AQ}{BQ}.\frac{CR}{AR}.\frac{PC}{BP}=\frac{BA}{BC}.\frac{BC}{AC}.\frac{AC}{BA}=1$$

Portanto, pelo Teorema Recíproco de Menelaus, temos que P, Q e R são colineares.

4) (IME-87/88) Sobre os catetos AB e AC de um triângulo ABC, constroem-se dois quadrados ABDE e ACFG. Mostre que os segmentos CD, BF e altura AH são concorrentes.
Solução:

Como $\Delta ACH \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{HC}{AC}=\frac{AC}{BC} \Rightarrow HC=\frac{b^2}{a}$.

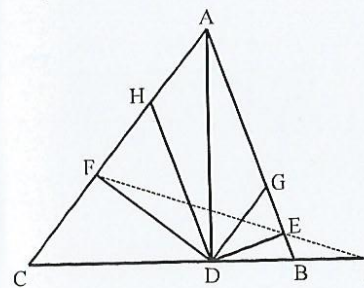
Analogamente $HB=\frac{c^2}{a}$.

Desde que $\Delta BYA \sim \Delta BFG \Rightarrow \frac{YA}{FG}=\frac{AB}{GB} \Rightarrow YA=\frac{b.c}{b+c}$.

Como $CY+YA=b \Rightarrow CY=\frac{b^2}{b+c}$.

Uma vez que $\Delta CXA \sim \Delta CDE \Rightarrow \frac{AX}{ED}=\frac{CA}{CE} \Rightarrow AX=\frac{b.c}{b+c}$

Como $AX+XB=c \Rightarrow XB=\frac{c^2}{b+c}$. Repare agora que: $\frac{AX}{XB}.\frac{BH}{HC}.\frac{CY}{YA}=\frac{\frac{b.c}{b+c}}{\frac{c^2}{b+c}}.\frac{\frac{c^2}{a}}{\frac{b^2}{a}}.\frac{\frac{b^2}{b+c}}{\frac{b.c}{b+c}}=1$, ou seja, pelo Teorema de Ceva os segmentos DC, EF e AH são concorrentes.

5) Em um triângulo ABC, suponha que AD é altura. Suponha que perpendiculares, a partir de D, encontram os lados AB e AC em E e F, respectivamente. Suponha que G e H são pontos de AB e AC, respectivamente, tais que DG || AC e DH || AB. Supondo que EF e GH encontram-se em A*:
a) Prove que A* pertence a BC;
b) Definindo B* e C* de forma análoga, prove que A*, B* e C* são colineares.
Solução:

Como DE é altura do triângulo retângulo ΔADB:

$AD^2=AE.AB$ e $BD^2=EB.AB \Rightarrow \frac{AE}{EB}=\frac{AD^2}{BD^2}$.

Analogamente: $\frac{CF}{FA}=\frac{CD^2}{AD^2}$.

Suponha que A* é o ponto onde EF encontra BC.
Aplicando o Teorema de Menelaus em ΔABC com relação à transversal EFA*:

$$1=\frac{BA^*}{CA^*}.\frac{CF}{FA}.\frac{AE}{EB}=\frac{BA^*}{CA^*}.\frac{CD^2}{AD^2}.\frac{AD^2}{BD^2} \Rightarrow \frac{BA^*}{CA^*}=\frac{BD^2}{CD^2}$$

Como DG || AC temos que $\frac{AG}{GB}=\frac{CD}{DB}$, e desde que DH || AB temos $\frac{CH}{HA}=\frac{CD}{DB}$.

Assim: $\frac{BA^*}{CA^*}.\frac{CH}{HA}.\frac{AG}{GB}=\frac{BA^*}{CA^*}.\frac{CD}{DB}.\frac{CD}{DB}=\frac{BA^*}{CA^*}.\frac{CD^2}{BD^2}=1$.

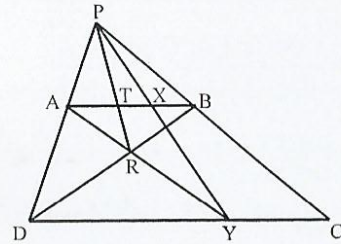
Portanto, pelo Teorema Recíproco de Menelaus, temos que H, G e A* são colineares.
b) Em ΔABC, sejam P e R os pés das alturas relativas a B e C, respectivamente. Efetuando cálculos análogos aos realizados no item anterior, encontramos que $\frac{AB^*}{CB^*}=\frac{AP^2}{CP^2}$ e $\frac{AC^*}{BC^*}=\frac{AR^2}{BR^2}$.

Como as alturas de ΔABC são concorrentes, pelo Teorema de Ceva temos: $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

Deste modo, pode-se observar que: $\frac{BA^*}{CA^*}\cdot\frac{CB^*}{B^*A}\cdot\frac{AC^*}{C^*B}=\left(\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AR}{RB}\right)^2=1$.

Portanto, pelo Teorema Recíproco de Menelaus, temos que A*, B* e C* são colineares.

6) Seja ABCD um trapézio com AB ∥ CD, e seja X um ponto no segmento AB. Admitamos que P = CB ∩ AD, Y = CD ∩ PX, R = AY ∩ BD e T = PR ∩ AB. Prove que $\frac{1}{AT}=\frac{1}{AX}+\frac{1}{AB}$.

Solução:

Pelo Teorema de Menelaus em ΔABD: $\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BR}{RD}\cdot\frac{DP}{PA}=1$.

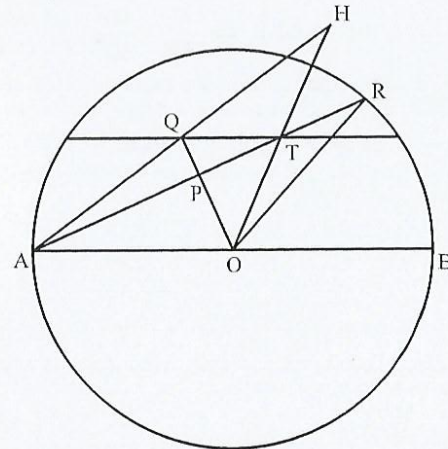
Como $\Delta ABR \sim \Delta YDR$ e $\Delta PDY \sim \Delta PAX$, então:

$$\frac{BR}{RD}=\frac{AB}{DY} \text{ e } \frac{DP}{PA}=\frac{DY}{AX}$$

Deste modo: $\frac{TB}{AT}=\frac{AB}{DY}\cdot\frac{DP}{PA}=\frac{AB}{DY}\cdot\frac{DY}{AX}=\frac{AB}{AX}$.

Assim: $\frac{AB}{AT}=\frac{TB}{AT}+1=\frac{AB}{AX}+1 \Rightarrow \frac{1}{AT}=\frac{1}{AX}+\frac{1}{AB}$.

7) (Cone Sul-97) Seja C uma circunferência de centro O, AB um diâmetro dela e R um ponto qualquer em C distinto de A e de B. Seja P a interseção da perpendicular traçada por O a AR.
Sobre a reta OP marca-se Q, de maneira que QP é a metade de PO, Q não pertence ao segmento OP.
Por Q traçamos a paralela a AB que corta a reta AR em T. Chamamos H a interseção das retas AQ e OT.
Provar que H, R e B são colineares.

Solução:

Inicialmente observemos que $\Delta APO \sim \Delta TPQ$:

$$\frac{AO}{TQ}=\frac{AP}{TP}=\frac{PO}{QP}$$

Como PO = 2.QP então AO = 2.QT e AP = 2.TP.

Desde que $\Delta HAO \sim \Delta HQT$ temos: $\frac{HO}{HT}=\frac{AO}{QT}$.

Como AO = 2.QT então HO = 2.HT

Como O é o centro da circunferência e OP é perpendicular à corda AR, então AP = RP ⇒ 2.TP = RT + TP ⇒ TP = RT

Desenvolvendo RA como soma de suas partes:

RA = RT + TP + PA = RT + RT + 2.RT ⇒

RA = 4.RT

Sabe-se também que BA = 2.BO

Daí $\frac{HT}{HO}\cdot\frac{RA}{RT}\cdot\frac{BO}{BA}=\frac{1}{2}.4.\frac{1}{2}=1$.

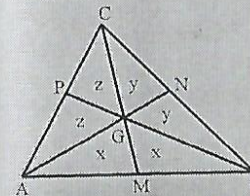
Deste modo, pelo Teorema Recíproco de Menelaus, (aplicado ao triângulo ΔAOT), concluímos que H, R e B são colineares.

7.3) MEDIANA E BARICENTRO

7.3.1) Definição: Mediana é o segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.

7.3.2) Teorema: "As três medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto denominado de baricentro (G)"

Demonstração:
Sejam M, N e P os pontos médios, respectivamente, dos lados AB, BC e AC, ou seja, AM = MB, BN = NC e CP = PA. Tracemos as três medianas: AN, BP e CM. Como $\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$, pelo Teorema de Ceva temos que estas três medianas são concorrentes.

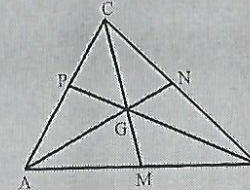
7.3.3) Teorema: "As três medianas dividem um triângulo em seis triângulos menores de mesma área"

Demonstração:
Observe que os triângulos AGM e BGM possuem a mesma altura relativa ao vértice G e que suas bases são iguais, uma vez que AM = BM. Desta forma as áreas dos triângulos AGM e BGM são iguais. Analogamente concluímos que as áreas dos triângulos CGN e BGN são iguais, bem como as áreas dos triângulos CGP e AGP também são iguais.

Da mesma forma outros pares de triângulos possuem a mesma base e a mesma altura:
i) ACM e BCM; ii) ABP e CBP; iii) BAN e CAN.

Concluímos, portanto, que:

$$\begin{aligned}2z+x&=2y+x\\2x+y&=2z+y \quad\Leftrightarrow\quad x=y=z\\2y+z&=2x+z\end{aligned}$$

7.3.4) Teorema: "Se G é o baricentro do triângulo ABC, então $\frac{AG}{GN}=\frac{CG}{GM}=\frac{BG}{GP}=2$."

1ª Demonstração:

Considere o triângulo ACM e a transversal BP.
Pelo Teorema de Menelaus:

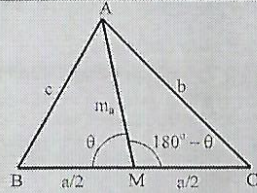
$$1=\frac{AB}{MB}\cdot\frac{MG}{CG}\cdot\frac{CP}{PA}=2.\frac{MG}{CG}.1 \Rightarrow \frac{CG}{GM}=2$$

As outras duas relações são demonstradas de forma análoga.

2ª Demonstração:
Tracemos as três medianas do triângulo.
Já foi demonstrado que os triângulos ΔGAM, ΔGBM, ΔGBN, ΔGCN, ΔGCP e ΔGAP possuem todos a mesma área. Designando estas áreas por x, temos que: $\frac{CM}{CG}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABG}}=\frac{6x}{2x}=3$.

Desde que CM = CG + GM ⇒ $3=\frac{CG+GM}{CG}=1+\frac{GM}{CG} \Rightarrow \frac{GM}{CG}=2$

As outras duas relações são demonstradas de forma análoga.

7.3.5) Comprimento da Mediana

Lei dos cossenos em ΔABM: $c^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - 2.\frac{a}{2}.m_a.\cos\theta = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - a.m_a.\cos\theta$ (1)

Lei dos cossenos em ΔACM: $b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - 2.\frac{a}{2}.m_a.\cos(180° - \theta) = \frac{a^2}{4} + m_a^2 + a.m_a.\cos\theta$ (2)

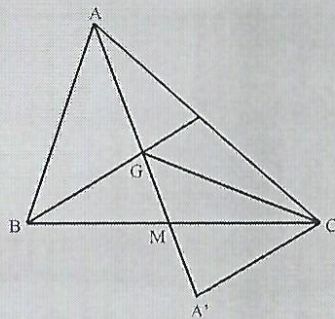
Somando (1) e (2) obtemos: $b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2 \Rightarrow m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}$

Da mesma forma pode-se demonstrar que: $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2) - b^2}$ $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2) - c^2}$

7.3.6) Teorema: "Se ABC é um triângulo de lados a, b e c e medianas m_a, m_b e m_c então $4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$."

Demonstração:
Pelo cálculo do comprimento de cada uma das medianas temos que:
$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4m_a^2$ $2a^2 + 2b^2 = c^2 + 4m_c^2$ $2a^2 + 2c^2 = b^2 + 4m_b^2$
Somando todas estas equações obtemos $4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

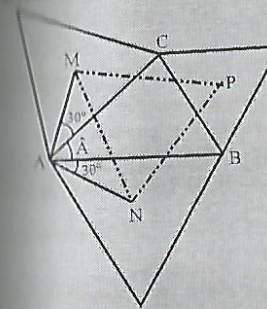
7.3.7) Teorema: "A razão entre a área de um triângulo ABC e a área do triângulo cujos lados são as medianas de ABC é igual a 4/3."

Demonstração:

Tracemos a mediana AM = m_a e seja G o baricentro de ABC. Prolonguemos AM até A' de modo que MA' = GM = $m_a/3$. Desta forma temos que GA' = $2m_a/3$ e GC = $2m_c/3$.
Como BC e GA' se cortam ao meio então BGCA' é um paralelogramo, ou seja, CA' || BG e CA' = BG = $2m_b/3$
Como GA' = $2m_a/3$, GC = $2m_c/3$ e CA' = $2m_b/3$ então o triângulo CGA' é semelhante ao triângulo cujos lados são as medianas de ABC.
Como a razão de semelhança é 2:3, para a área temos que:
$$\frac{S_{GCA'}}{S_{medianas}} = \frac{4}{9}$$
Como as medianas dividem um triângulo em seis partes iguais:
$S_{ABC} = 6.S_{GCM} = 3.S_{GCA'}$
Portanto: $\frac{S_{ABC}}{3.S_{medianas}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{medianas}} = \frac{4}{3}$.

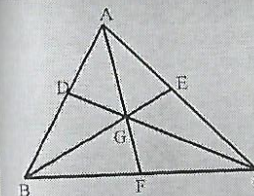
7.3.8) Teorema: "Se duas medianas de um triângulo ABC são iguais então ABC é isósceles."

Demonstração:
Suponhamos que $m_a = m_b \Rightarrow m_a^2 = m_b^2 \Rightarrow b^2/2 + c^2/2 - a^2/4 = a^2/2 + c^2/2 - b^2/4 \Rightarrow 3b^2/4 = 3a^2/4 \Rightarrow$ $a = b \Rightarrow$ ABC é isósceles.

7.3.9) Teorema de Napoleão: "Tome um triângulo arbitrário. Com base em cada um dos lados, construímos (externamente) um triângulo equilátero. Os baricentros desses três triângulos equiláteros são vértices de um triângulo equilátero."

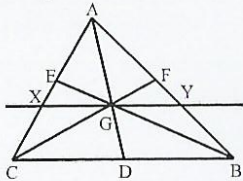
Demonstração:

Aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo ABC para o ângulo Â:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c}$$
Se S é a área de ABC temos que $S = \frac{b.c.\text{sen}\,\hat{A}}{2} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{A} = \frac{2.S}{b.c}$
Como AM é igual a 2/3 da mediana do triângulo equilátero construído sobre AC então $AM = \frac{b\sqrt{3}}{3}$. Analogamente $AN = \frac{c\sqrt{3}}{3}$.
Aplicando agora a Lei dos Cossenos no triângulo AMN:
$$MN^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2.b.c.\cos(60° + \hat{A})}{3} \Rightarrow$$
$$MN^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2.b.c}{3}\left(\frac{1}{2}.\cos\hat{A} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\text{sen}\,\hat{A}\right) \Rightarrow$$
$$MN^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{b.c}{3}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2.b.c} - \frac{2\sqrt{3}.S}{bc}\right) = \frac{2.b^2 + 2.c^2 - b^2 - c^2 + a^2 + 4\sqrt{3}.S}{6} \Rightarrow$$
$$MN^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}.S}{6}$$
Fazendo cálculos análogos encontramos que $PN^2 = PM^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}.S}{6}$, ou seja, o MNP é equilátero.

7.3.10) Teorema: "Em um triângulo, o maior lado corresponde a menor mediana".

Demonstração:

Vamos assumir que AC > AB. Mostraremos que BE < CD.
ΔAFB e ΔAFC são dois triângulos que possuem dois lados de mesmo comprimento (BF = CF e AF = AF). Assim, devido a AC > AB, segue que ∠AFC > ∠AFB.
ΔGFB e ΔGFC também são dois triângulos que possuem dois lados de mesmo comprimento. Uma vez que ∠GFC > ∠GFB temos que GC > GB.
Como GC = 2.CD/3 e GB = 2.BE/3 ⇒ BE < CD.

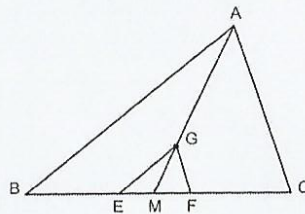
Exemplos:

1) (Colégio Naval-84/85) Um trapézio é obtido cortando-se um triângulo escaleno de área S por uma reta paralela a um dos lados do triângulo que passa pelo baricentro do mesmo. A área do trapézio é:
a) 5S/9 b) 4S/9 c) 2S/3 d) S/3 e) S/2

Solução:

Considere que a reta que passa pelo baricentro G e é paralela a BC intercepta os lados AC e AB em X e Y respectivamente.

Como $\Delta AXY \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{AXY}}{S} = \left(\frac{AX}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AG}{AD}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow$

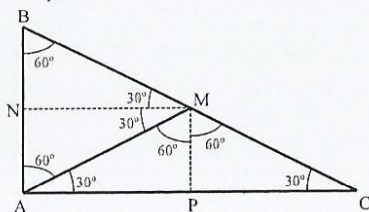
$S - S_{XYBC} = \frac{4S}{9} \Rightarrow S_{XYBC} = \frac{5S}{9}$.

2) (AFA-2005) Considere o triângulo ABC, de lados $\overline{AB} = 15$, $\overline{AC} = 10$, $\overline{BC} = 12$ e seu baricentro G. Traçam-se GE e GF paralelos a AB e AC, respectivamente, conforme a figura abaixo. O perímetro do triângulo GEF é um número que, escrito na forma de fração irredutível, tem a soma do numerador com o denominador igual a:

a) 43 b) 35 c) 38 d) 40

Solução:

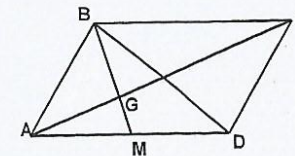
Uma vez que $\Delta GEM \sim \Delta ABM$ então temos $\frac{GE}{AB} = \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$. Portanto, a razão de semelhança entre os triângulos GEM e ABM é 1/3. Como $\Delta GEF \sim \Delta ABC$ e GE/AB = 1/3, temos que a razão de semelhança entre os triângulos GEF e ABM é 1/3. Desta forma, o perímetro de ΔGEF é igual a 1/3 do perímetro de ΔABC: $2p_{\Delta GEF} = \frac{15+10+12}{3} = \frac{37}{3} \Rightarrow x = 37 + 3 = 40$.

3) (UECE-2002) A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede 1 cm e forma com um dos catetos um ângulo de 30°. O perímetro do triângulo é igual a:
a) $(3+\sqrt{3})$cm b) $(3-\sqrt{3})$cm c) $(3\sqrt{3}+1)$cm d) $(3\sqrt{3}-1)$cm

Solução:

Como a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo possui comprimento igual à metade da hipotenusa, temos que os triângulos AMB e AMC são isósceles. Assim, temos que BM = AM = CM = 1 cm. Uma vez que $\angle MAC = 30°$ então $\angle ABM = \angle BAM = 60°$. Do mesmo modo, $\angle CAM = \angle ACM = 30°$.

Traçando as alturas MN e MP dos triângulos isósceles AMB e AMC temos que AB = 2BN e AC = 2AP. Logo, o perímetro de ABC é dado por:

$2p_{ABC} = BC + AB + AC = 2 + 2.\text{sen } 30° + 2.\text{sen } 60° = 3 + \sqrt{3}$ cm.

4) (UFRR-2004) Na figura abaixo ABCD é um paralelogramo. O ponto M é médio de AD e a medida do ângulo $B\hat{A}D = 60°$.

Sabendo que o segmento AD mede 12cm e que o segmento CD mede 9cm, o comprimento do segmento AG, em centímetros, é igual a:
a) $\sqrt{21}$; b) $\sqrt{37}$; c) $\sqrt{41}$; d) $6\sqrt{3}$; e) $3\sqrt{13}$.

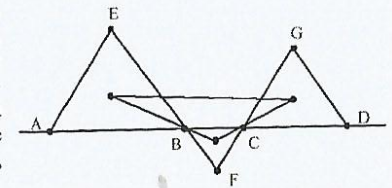
Solução:

Se $\angle BAD = 60$o então $\angle ADC = 120$o. Aplicando a Lei dos Cossenos em ΔADC:
$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2.AD.CD.\cos(120°) = 144 + 81 - 2.12.9.(-0,5) = 333 \Rightarrow AC = 3\sqrt{37}$.
Seja P a interseção das diagonais AC e BD. Como as diagonais de um paralelogramo se cortam em seus respectivos pontos médios, então AP é mediana de ΔABD. Uma vez que BM é mediana de ΔABD, podemos concluir que G é baricentro de ΔABD. Assim: $AG = \frac{2}{3}AP = \frac{2}{3}\frac{AC}{2} = \frac{AC}{3} \Rightarrow AG = \sqrt{37}$.

5) (Colégio Naval-88/89) As medianas traçadas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, medem $\sqrt{7}$ cm e $\sqrt{23}$ cm. A medida da mediana traçada do ângulo reto é:
a) $5\sqrt{2}$ cm b) $4\sqrt{2}$ cm c) $3\sqrt{2}$ cm d) $2\sqrt{2}$ cm e) $\sqrt{6}$ cm

Solução:

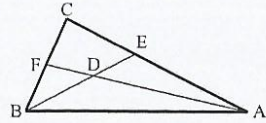
Suponha que AB e AC são os catetos e BC é a hipotenusa. Assim, temos as equações:
i) $2b^2 + 2c^2 = 4m_a^2 + a^2 \Rightarrow 2a^2 = 4m_a^2 + a^2 \Rightarrow 4m_a^2 = a^2$
ii) $2a^2 + 2c^2 = 4m_b^2 + b^2 \Rightarrow 2b^2 + 2c^2 + 2c^2 = 4m_b^2 + b^2 \Rightarrow 4m_b^2 = b^2 + 4c^2$
iii) $2a^2 + 2b^2 = 4m_c^2 + c^2 \Rightarrow 2b^2 + 2c^2 + 2b^2 = 4m_c^2 + c^2 \Rightarrow 4m_c^2 = 4b^2 + c^2$
Somando estas equações: $4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = a^2 + 5b^2 + 5c^2 = 6a^2 \Rightarrow 4(m_a^2 + 7 + 23) = 24m_a^2 \Rightarrow$
$20m_a^2 = 120 \Rightarrow m_a^2 = 6 \Rightarrow m_a = \sqrt{6}$ cm

6) (IME-2003) Sobre uma reta *r* são marcados os pontos A, B, C e D. São construídos os triângulos equiláteros ABE, BCF e CDG, de forma que os pontos E e G encontram-se do mesmo lado da reta r, enquanto que o ponto F encontra-se do lado oposto, conforme mostra a figura. Calcule a área do triângulo formado pelos baricentros de ABE, BCF e CDG, em função dos comprimentos dos segmentos AB, BC e CD.

Solução:

Sejam AB = a, BC = b, CD = c, G_1 o baricentro de ΔABE, G_2 o baricentro de ΔBCF e G_3 o baricentro de ΔCDG. Como a distância do baricentro ao vértice de um triângulo equilátero é igual a 2/3 da altura, então $BG_1 = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Analogamente $BG_2 = CG_2 = \frac{b\sqrt{3}}{3}$ e $CG_3 = \frac{c\sqrt{3}}{3}$.

Perceba também que, como o triângulo ΔBCF é equilátero, então $\angle BG_2C = 120°$.
Assim, a área de $\Delta G_1G_2G_3$ é:

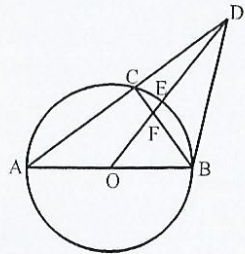
$$S = \frac{G_1G_2.G_2G_3.\text{sen}(120°)}{2} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} + \frac{b\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{b\sqrt{3}}{3} + \frac{c\sqrt{3}}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}(a+b)(b+c)}{12}.$$

7) (OBM Jr-94) Calcule a área do triângulo ABC abaixo, dados BD = 4, DE = 2, EC = 6, BF = FC = 3.

Solução:

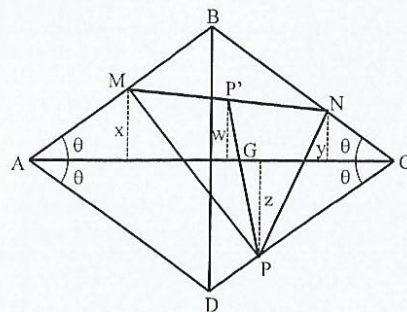
AF é mediana de ΔABC e divide a ceviana BE em segmentos BD e DE, que estão na razão 2:1, ou seja, D é o baricentro de ΔABC, implicando que BE seja também uma mediana de ΔABC. Além disso, ΔBCE e ΔABE possuem a mesma altura e bases congruentes, fazendo com que possuam a mesma área. Como o triângulo ΔBCE é equilátero de lado 6 então sua área é $9\sqrt{3}$. Assim, a área de ΔABC é igual a $18\sqrt{3}$.

8) (Olimpíada do Rio de Janeiro-93) AB é o diâmetro de um círculo de centro O. Toma-se um ponto C deste círculo e prolonga-se AC de um segmento CD igual a AC. O segmento OD corta o círculo em D e corta o segmento BC em F. Se AB = a e OD = b, então EF é igual a:

a) (a – b)/2 b) (a – b)/3 c) (2a – b)/2 d) (2a – b)/6 e) (3a – 2b)/6

Solução:

Como C é ponto médio de AD e O é ponto médio de AB então BC e DO são medianas de ΔABD, fazendo com que F seja o baricentro de ΔABD.
Deste modo: DF = 2FO.
Desde que OD = b então OF = b/3 e DF = 2b/3.
Note ainda que AO = OB = OE = a/2, uma vez que todos esses segmentos são iguais ao raio do círculo.
Assim: EF = OE – OF = a/2 – b/3 = (3a – 2b)/6

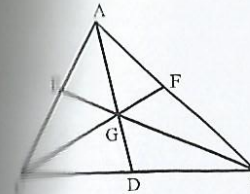
9) (Seletiva Brasileira para a XIV Olimpíada do Cone Sul) Sobre os lados AB, BC e DC, de um losango ABCD, marcam-se, respectivamente, os pontos M, N e P, de modo que o baricentro do triângulo MNP esteja sobre a reta AC. Demonstre que AM + DP = BN.

Solução:

Sejam:
P' – ponto médio de MN, x – distância de M à reta AC, y – distância de N à reta AC, z – distância de P à reta AC, θ – ângulo agudo entre AB e AC, G – baricentro de ΔMNP, L – lado de ABCD.
Como o baricentro de ΔMNP está sobre a reta AC, então G é a interseção de PP' e AC.
Como P' é o ponto médio de MN então $x + y = 2w$.
Como o baricentro divide a mediana em dois segmentos na razão de 1:2 então:

$$\frac{w}{z} = \frac{P'G}{PG} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+y}{2.z} = \frac{1}{2} \Rightarrow x + y = z \Rightarrow$$

AM.sen θ + (L – BN)sen θ = (L – DP)sen θ ⇒
AM + L – BN = L – DP ⇒ AM + DP = BN

10) (IME-2000) As medianas BE e CF de um triângulo ABC se cortam em G. Demonstre que $tg(B\hat{G}C) = \dfrac{12.S}{b^2 + c^2 - 5a^2}$, onde S é a área do triângulo ABC; AC = b; AB = c e BC = a.

Solução:

Aplicando a Lei dos Cossenos em ΔBGC:

$$BC^2 = BG^2 + CG^2 - 2.BG.CG.\cos(\angle BGC) \Rightarrow$$

$$a^2 = \frac{4m_b^2}{9} + \frac{4m_c^2}{9} - 2\frac{2m_b}{3}\frac{2m_c}{3}\cos(\angle BGC) \Rightarrow$$

$$\frac{8m_bm_c\cos(\angle BGC)}{9} = \frac{4(m_b^2 + m_c^2) - 9a^2}{9} \Rightarrow$$

$$m_bm_c\cos(\angle BGC) = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2 - 9a^2}{8} \Rightarrow$$

$$m_bm_c\cos(\angle BGC) = \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{8} \quad (1)$$

Logo: $$\frac{S}{3} = \frac{CG.BG.sen(\angle BGC)}{2} = \frac{\frac{2m_b}{3}.\frac{2m_c}{3}.sen(\angle BGC)}{2} \Rightarrow m_bm_c\,sen(\angle BGC) = \frac{3S}{2} \quad (2)$$

Dividindo as equações (2) e (1): $$tg(\angle BGC) = \frac{\frac{3S}{2}}{\frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{8}} \Rightarrow tg(\angle BGC) = \frac{12S}{b^2 + c^2 - 5a^2}$$

11) (Olimpíada da Espanha-96) Seja G o baricentro do triângulo ABC. Demonstre que se AB + GC = AC + GB então o triângulo é isósceles.

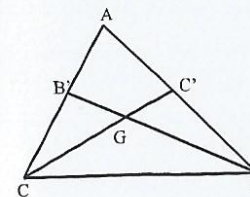
Solução:

Designemos por m_b e m_c as medianas correspondentes aos lados b e c. Uma vez que GC = $2m_c/3$ e GB = $2m_b/3$, podemos reescrever a relação do enunciado da seguinte maneira: $c - b = \frac{2(m_b - m_c)}{3}$.

Multiplicando e dividindo por $m_b + m_c$ temos:

$$c - b = \frac{2(m_b - m_c)(m_b + m_c)}{3(m_b + m_c)} = \frac{2m_b^2 - 2m_c^2}{3(m_b + m_c)} = \frac{\left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right) - \left(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right)}{m_b + m_c} = \frac{(c^2 - b^2)}{2(m_b + m_c)} = \frac{(c-b)(c+b)}{2(m_b + m_c)} \Rightarrow$$

$$(c - b)\left(m_b + m_c - \frac{b+c}{2}\right) = 0 \quad (1)$$

Provaremos agora que o segundo fator é positivo.

Chamando de B' e C' os pontos médios de AC e AB, respectivamente, nos triângulos ΔCC'A e ΔBB'A temos, pela desigualdade triangular, que: $m_b + \frac{b}{2} > c$; $m_c + \frac{c}{2} > b$.

Somando estas duas desigualdades:

$$m_b + m_c - \frac{b+c}{2} > 0 \quad (2)$$

Pela desigualdade (2), temos que a equação (1) vai ser satisfeita somente quando b = c, ou seja, ΔABC é isósceles.

7.4) BISSETRIZ E INCENTRO

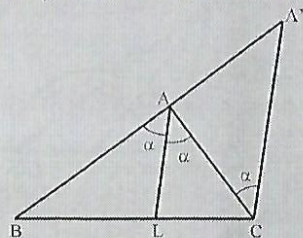
7.4.1) Definição: "A bissetriz do ângulo Â de um triângulo ABC é o segmento AL tal que $\angle B\hat{A}L = \angle L\hat{A}C$."

Lembre que definimos bissetriz de um ângulo no capítulo 1 deste livro como sendo uma semi-reta, ou seja, possuindo comprimento infinito. Entretanto, quando estamos analisando as bissetrizes internas dos ângulos de um triângulo convenciona-se que cada bissetriz é um segmento de reta cujos extremos são o vértice ao qual são traçadas e o ponto onde cruza o lado oposto (denominado pé da bissetriz).

Propriedade: "Os pontos pertencentes à bissetriz AL são eqüidistantes dos lados AB e AC."

7.4.2) Teorema da Bissetriz Interna:

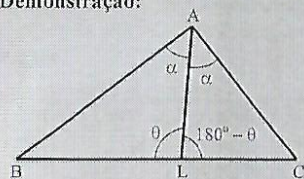
"Se AL é a bissetriz interna do ângulo Â de um triângulo ABC então $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$."

1ª Demonstração:
Prolongue, a partir de A, o segmento AB até um ponto A' de modo que $A'C \parallel AL$.
Note que sendo $A'C \parallel AL$ então $\angle LAC = \angle ACA'$.

Como $\angle CAA' = 180^\circ - 2\alpha$ então $\angle AA'C = \alpha \Rightarrow$
$\Delta AA'C$ é isósceles $\Rightarrow AA' = AC$.
Deste modo $\Delta A'BC \sim \Delta ABL \Rightarrow$

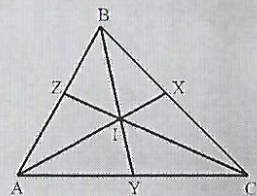
$$\frac{BA'}{BC} = \frac{BA}{BL} = \frac{BA'-BA}{BC-BL} = \frac{AA'}{LC} = \frac{AC}{LC} \Rightarrow \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}.$$

2ª Demonstração:

Lei dos senos no ΔBAL: $\frac{AB}{BL} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\alpha}$.

Lei dos senos no ΔCAL: $\frac{AC}{LC} = \frac{\operatorname{sen}(180^\circ - \theta)}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\alpha}$.

Desta forma: $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$.

7.4.3) Teorema: "As bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes em um ponto denominado de incentro (I)."

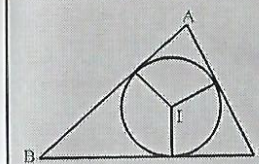
Demonstração:

Pelo teorema da bissetriz temos que:

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{AC}{CB} \qquad \frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC} \qquad \frac{CY}{YA} = \frac{CB}{BA}$$

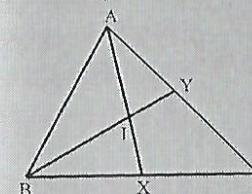
Deste modo, $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CB}{BA} = 1.$

Pelo teorema de Ceva concluímos que as três bissetrizes internas são concorrentes.

7.4.4) Teorema: "O incentro I é o centro da circunferência inscrita no triângulo."

Demonstração:

Pela propriedade de bissetriz temos que I é o ponto eqüidistante de AB, BC e CA. Desta forma existe uma circunferência com centro em I tangente aos três lados do triângulo, cujo raio é exatamente a distância de I aos lados AB, BC e CA.

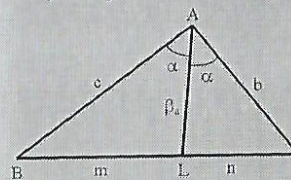
7.4.5) Teorema: "Sendo ABC um triângulo, I seu incentro e ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c as medidas de suas bissetrizes, então: $\frac{IA}{\ell_a} = \frac{b+c}{a+b+c}$, $\frac{IB}{\ell_b} = \frac{a+c}{a+b+c}$ e $\frac{IC}{\ell_c} = \frac{a+b}{a+b+c}$."

Demonstração:

Pela teorema da bissetriz temos que: $\frac{BX}{AB} = \frac{CX}{AC} = \frac{BX+CX}{AB+AC} = \frac{BC}{AB+AC} \Rightarrow BX = \frac{ac}{b+c}$

Analogamente, no ΔABX: $\frac{IA}{AB} = \frac{IX}{BX} = \frac{IX+IA}{BX+AB} = \frac{\ell_a}{BX+AB} \Rightarrow$

$$\frac{IA}{\ell_a} = \frac{AB}{BX+AB} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}+c} = \frac{c(b+c)}{ac+bc+c^2} = \frac{b+c}{a+b+c}$$

As outras duas relações são demonstradas de forma análoga.

7.4.6) Comprimento da bissetriz

Pelo Teorema da bissetriz:

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b} = \frac{m+n}{b+c} = \frac{a}{b+c} \Rightarrow m = \frac{ac}{b+c} \quad n = \frac{ab}{b+c}$$

Pela Lei dos cossenos no ΔABL:

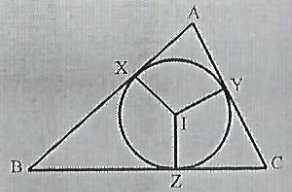
$$m^2 = c^2 + (\beta_a)^2 - 2.c.\beta_a.\cos\alpha \Rightarrow 2.\beta_a.\cos\alpha = \frac{c^2 + (\beta_a)^2 - m^2}{c}$$

Pela Lei dos cossenos no ΔACL:

$$n^2 = b^2 + (\beta_a)^2 - 2.b.\beta_a.\cos\alpha \Rightarrow 2.\beta_a.\cos\alpha = \frac{b^2 + (\beta_a)^2 - n^2}{b}$$

Portanto:

$$\frac{c^2 + (\beta_a)^2 - m^2}{c} = \frac{b^2 + (\beta_a)^2 - n^2}{b} \Rightarrow c^2b + b(\beta_a)^2 - bm^2 = b^2c + c(\beta_a)^2 - cn^2 \Rightarrow$$

$$(\beta_a)^2(b-c) = b^2c - cb^2 + bm^2 - cn^2 = bc(b-c) + \frac{a^2c^2b}{(b+c)^2} - \frac{a^2b^2c}{(b+c)^2} = bc(b-c) + \frac{a^2bc(c-b)}{(b+c)^2} \Rightarrow$$

$(\beta_a)^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc - m.n \Rightarrow \beta_a = \sqrt{b.c - m.n}$ que é uma expressão simples para calcular β_a.

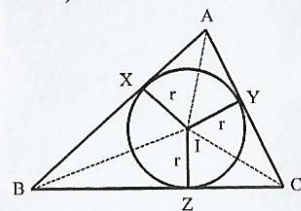
Determinando β_a em função de a, b e c: $\beta_a = \sqrt{bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}} \Rightarrow \beta_a = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{b+c}$

Analogamente: $\beta_b = \frac{\sqrt{ac[(a+c)^2 - b^2]}}{a+c}$ $\quad \beta_c = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}$

7.4.7) O Círculo Inscrito

7.4.7.1) Segmentos determinados pelos pontos de tangência

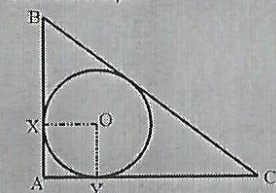
Desde que X, Y e Z são pontos de tangência, então:
AX = AY BX = BZ CY = CZ
Sabemos também que: AX + BX = c AY + CY = b BZ + CZ = c
Substituindo:
AX + BX = c
AX + + CY = b
BX + CY = a
Somando todas estas equações:
2(AX + BX + CY) = a + b + c ⇒ AX + BX + CY = p
i) CY = CZ = (AX + BX + CY) – (AX + BX) = p – c
ii) BX = BZ = (AX + BX + CY) – (AX + CY) = p – b
iii) AX = AY = (AX + BX + CY) – (AX + BX) = p – a

7.4.7.2) Área

Seja S a área do triângulo ABC e r o raio do seu círculo inscrito. Desta forma:

$S = S_{\Delta BCI} + S_{\Delta ACI} + S_{\Delta ABI} = \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2} \Rightarrow$

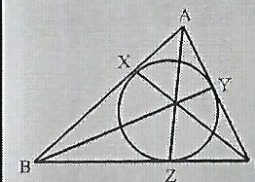
$S = p.r$

7.4.7.3) Teorema: "Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c. O raio do círculo inscrito é igual a $r = \frac{b+c-a}{2}$."

Demonstração:

Perceba que OX e OY são iguais ao raio do círculo inscrito em ABC. Na verdade, como AY = OX = OY = AX então AXYO é um quadrado.

Portanto, $OY = r \Rightarrow r = AX \Rightarrow r = p - a \Rightarrow r = \frac{b+c-a}{2}$

7.4.7.4) Ponto de Gergone: "Sejam X , Y e Z, respectivamente, os pontos de contato da circunferência inscrita em ΔABC com os lados AB, AC e BC. Os segmentos AZ, BY e CX são concorrentes em um ponto denominado Ponto de Gergone."

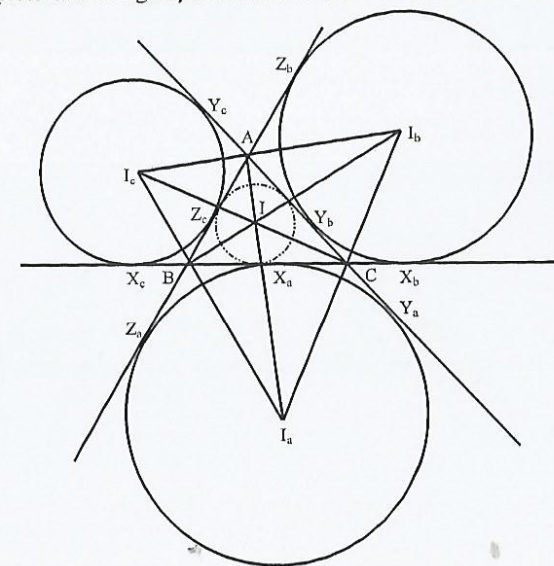
Demonstração:

Sabemos que: AX = AY = p – a BX = BZ = p – b CY = CZ = p – c

Como $\frac{AX}{BX}.\frac{BZ}{CZ}.\frac{CY}{AY} = \frac{p-a}{p-b}.\frac{p-b}{p-c}.\frac{p-c}{p-a} = 1$, pelo Teorema de Ceva os segmentos AZ, BY e CX são concorrentes.

7.4.8) Bissetriz externa: "Bissetriz externa do ângulo Â de um triângulo ΔABC é a semi-reta que divide ao meio o ângulo externo Â."

7.4.8.1) Círculo ex-inscrito: "O círculo ex-inscrito ao lado BC de um triângulo ΔABC é o círculo tangente ao lado BC e tangente aos prolongamentos dos lados AB e AC."

7.4.8.2) Propriedade: "As bissetrizes externas de B̂ e Ĉ e da bissetriz interna de Â são concorrentes no centro do círculo ex-inscrito ao lado BC."

A figura abaixo representa a configuração dos ex-incentros e ex-círculos de um triângulo ABC.

7.4.8.3) Segmentos determinados pelos pontos de tangência

Em relação aos pontos de tangência sobre o ex-círculo de centro I_a podemos concluir que:

$CX_a = CY_a \quad BX_a = BZ_a \quad AZ_a = AY_a = b + CY_a = c + BZ_a$

Como $a = CX_a + BX_a = CY_a + BZ_a$, então podemos montar o seguinte sistema:

$CY_a - BZ_a = c - b$ e $CY_a + BZ_a = a$

Desta forma:

i) $CY_a = \frac{a+c-b}{2} = \frac{a+b+c}{2} - b \Rightarrow CY_a = CX_a = p - b$

ii) $BZ_a = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - c \Rightarrow BZ_a = BX_a = p - c$

iii) $AZ_a = AY_a = CY_a + b \Rightarrow AZ_a = AY_a = p$

Analogamente, quando analisamos os ex-círculos com centros I_b e I_c concluímos que:

$BX_c = BZ_c = CX_b = CY_b = p - a$ $\quad CY_a = CX_a = AY_c = AZ_c = p - b$

$AZ_b = AY_b = BZ_a = BX_a = p - c$ $\quad AY_a = AZ_a = BZ_b = BX_b = CX_c = CY_c = p$

7.4.8.4) Área de ΔABC em função de r_a, r_b e r_c:

Seja S a área do triângulo ABC e r_a o raio do círculo ex-inscrito relativo ao lado BC.

Assim: $S = S_{\Delta AI_aC} + S_{\Delta AI_aB} - S_{AI_aBC} = \frac{b.r_a}{2} + \frac{c.r_a}{2} - \frac{a.r_a}{2} = \frac{(b+c-a).r_a}{2} \Rightarrow S = (p-a)r_a$

Analogamente podemos demonstrar que $S = (p-b)r_b$ e $S = (p-c)r_c$.

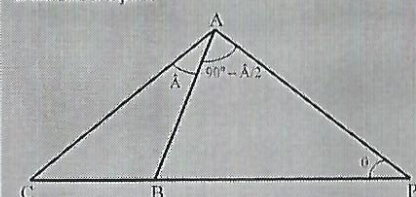
7.4.8.5) Teorema: "Se r_a, r_b e r_c são os raios dos círculos ex-inscritos relativos, respectivamente, aos lados BC, AC e AB de um triângulo ABC e r é o raio do círculo inscrito neste triângulo então $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$."

Demonstração:

Pelo cálculo da área S de ABC: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-(a+b+c)}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$.

7.4.8.6) Teorema da Bissetriz Externa

"Se AP é a bissetriz externa do ângulo Â de um triângulo ABC então $\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}$"

Demonstração:

Seja AP a bissetriz externa do ângulo Â. Desta forma temos que $B\hat{A}P = 90° - \hat{A}/2$. Lei dos Senos em ΔABP:

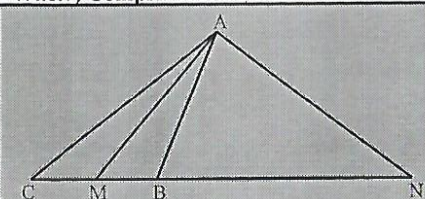
$\frac{AB}{sen\theta} = \frac{BP}{sen(90° - \hat{A}/2)} \Rightarrow \frac{BP}{AB} = \frac{\cos(\hat{A}/2)}{sen\theta}$.

Lei dos Senos em ΔACP:

$\frac{AC}{sen\theta} = \frac{CP}{sen(90° + \hat{A}/2)} \Rightarrow \frac{CP}{AC} = \frac{\cos(\hat{A}/2)}{sen\theta}$.

Concluímos, portanto, que $\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}$.

Obs: Do exposto nos itens 7.4.2 e 7.4.8.6, podemos concluir que se D é o pé da bissetriz interna e D' é o pé da bissetriz externa, ambas relativas ao ângulo Â de um ΔABC, temos que $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}$, ou seja, os pontos D e D' dividem harmonicamente o lado BC.

7.4.8.7) Comprimento das bissetrizes externas

Seja AM a bissetriz interna de A e AN a bissetriz externa de A. Pelo Teorema da Bissetriz Externa:

$\frac{CM}{b} = \frac{BM}{c} = \frac{CM+BM}{b+c} = \frac{a}{b+c} \Rightarrow BM = \frac{a.c}{b+c}$

Também pelo Teorema da Bissetriz:

$\frac{CN}{b} = \frac{BN}{c} = \frac{CN-BN}{b-c} = \frac{a}{b-c} \Rightarrow BN = \frac{a.c}{b-c}$

Como AM ⊥ AN podemos aplicar Teorema de Pitágoras em ΔAMN:

$AN^2 = MN^2 - AM^2 \Rightarrow (\beta'_a)^2 = (BN + BM)^2 - (\beta_a)^2 \Rightarrow$

$$(\beta'_a)^2 = \left(\frac{a.c}{b+c} + \frac{a.c}{b-c}\right)^2 - \frac{b.c[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} = \frac{a^2c^2(b-c+b+c)^2}{(b+c)^2(b-c)^2} - \frac{b.c[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} =$$

$$= \frac{b.c}{(b+c)^2(b-c)^2}\left[4a^2bc - (b-c)^2[(b+c)^2 - a]^2\right] = \frac{b.c}{(b+c)^2(b-c)^2}\left[4a^2bc - a^2(b-c)^2 + (b+c)^2(b-c)^2\right] =$$

$$= \frac{b.c}{(b+c)^2(b-c)^2}\left[4a^2bc + a^2b^2 + a^2c^2 - 2a^2bc - (b+c)^2(b-c)^2\right] =$$

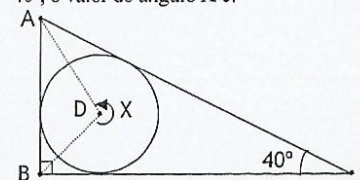
$$= \frac{b.c}{(b+c)^2(b-c)^2}\left[a^2b^2 + a^2c^2 + 2a^2bc - (b+c)^2(b-c)^2\right] = \frac{b.c}{(b+c)^2(b-c)^2}\left[a^2(b+c)^2 - (b+c)^2(b-c)^2\right] =$$

$$= \frac{b.c[a^2 - (b-c)^2]}{(b-c)^2} = \frac{b.c(a+b-c)(a+c-b)}{(b-c)^2} = \frac{4.b.c(p-c)(p-b)}{(b-c)^2} \Rightarrow \beta'_a = \frac{2\sqrt{b.c.(p-b)(p-c)}}{|b-c|}.$$

Analogamente pode-se demonstrar que $\beta'_b = \frac{2\sqrt{a.c.(p-a)(p-c)}}{|a-c|}$ e $\beta'_c = \frac{2\sqrt{a.b.(p-a)(p-b)}}{|a-b|}$.

Exemplos:

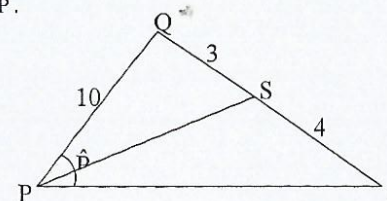
1) (UFLA-2001) Na figura, o triângulo **ABC** é retângulo em **B**, e o ponto **D** é o centro da circunferência inscrita. Sendo $\hat{C} = 40°$, o valor do ângulo **X** é:

a) 230°
b) 210°
c) 130°
d) 250°
e) 300°

Solução:

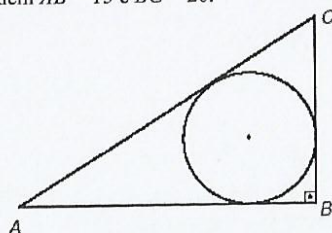
Sabemos que $\hat{A} + \hat{B} = 180° - \hat{C} = 140°$. Também é conhecido o fato que o centro da circunferência inscrita em um triângulo coincide com o encontro das bissetrizes internas deste triângulo. Assim, temos que ∠BAD = Â/2 e ∠ABD = $\hat{B}/2$, implicando que ∠ADB = $180° - \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} = 180° - 70° = 110°$.

Logo: X = 360° – ∠ADB = 360° – 110° = 250°.

2) (UFLA-2003) Determine a medida do lado PR do triângulo PQR, sabendo que o segmento $\overline{PS}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{P}$.

a) 30/4
b) 12/10
c) 24/7
d) 17/13
e) 40/3

Solução:

Pelo Teorema da Bissetriz Interna: $\frac{QS}{QP} = \frac{SR}{PR} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{4}{PR} \Rightarrow PR = \frac{40}{3}$.

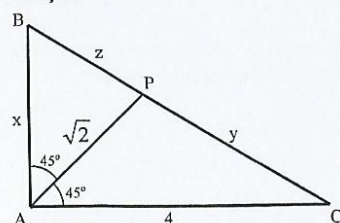
3) (UFV-2005) Na figura abaixo está representada uma circunferência de raio r inscrita no triângulo retângulo ABC, cujos catetos medem $AB = 15$ e $BC = 20$.

O raio r em relação à medida da hipotenusa AC, em porcentagem, é:
a) 40% b) 50% c) 30% d) 10% e) 20%

Solução:
Pelo Teorema de Pitágoras: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 225 + 400 = 625 \Rightarrow AC = 25$.

Desde que ABC é um triângulo retângulo: $r = \dfrac{AB + BC - AC}{2} = \dfrac{15 + 20 - 25}{2} = 5$.

Portanto: $\dfrac{r}{AC} = \dfrac{5}{25} = 0{,}2 \Rightarrow$ r equivale a 20% de AC.

4) (UFPI-2003) Num triângulo retângulo, um dos catetos mede 4 cm e a bissetriz do ângulo reto mede $\sqrt{2}$ cm. Assinale com V (verdadeiro) ou F (falso) as opções abaixo.
(1) A medida da hipotenusa é $\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$.
(2) A medida do outro cateto é 4/3.
(3) O triângulo é isósceles.
(4) A soma das medidas dos catetos é 19/4.

Solução:

Lei dos Cossenos em ΔACP:
$y^2 = (\sqrt{2})^2 + 4^2 - 2.\sqrt{2}.4.\cos 45^\circ = 10 \Rightarrow y = \sqrt{10}$.

Pelo Teorema da Bissetriz Interna: $\dfrac{x}{z} = \dfrac{4}{\sqrt{10}} \Rightarrow z = \dfrac{x\sqrt{10}}{4}$.

Pelo Teorema de Pitágoras: $x^2 + 16 = (z + \sqrt{10})^2 \Rightarrow$

$$x^2 + 16 = \left(\frac{x\sqrt{10}}{4} + \sqrt{10}\right)^2 \Rightarrow x^2 + 16 = \frac{5(x+4)^2}{8} \Rightarrow$$

$$8x^2 + 128 = 5x^2 + 40x + 80 \Rightarrow 3x^2 - 40x + 48 = 0 \Rightarrow x = \frac{40 \pm 32}{6} \Rightarrow x = 12 \text{ ou } x = 4/3.$$

Se $x = 12$ temos $z = 3\sqrt{10}$, que contraria a desigualdade triangular em ΔABP, pois $3\sqrt{10} + \sqrt{2} < 12$.

Logo concluímos que $x = 4/3 \Rightarrow z = \dfrac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow BC = \dfrac{4\sqrt{10}}{3} \Rightarrow AB + AC = \dfrac{4}{3} + 4 = \dfrac{16}{3}$.

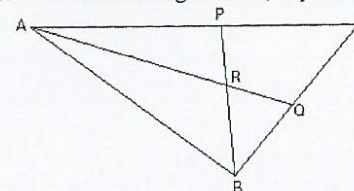
Analisando as alternativas: (1) – Verdadeira; (2) – Verdadeira; (3) – Falsa; (4) – Falsa.

5) Considere um triângulo ABC onde os lados são iguais a 14, 13 e 15. Determine o valor do raio da circunferência inscrita no triângulo ABC.
a) 3 b) 5 c) 8 d) 10 e) 4

Solução:

O semi-perímetro de ABC é: $p = (a + b + c)/2 = (14 + 13 + 15)/2 = 21$.
Assim, a área de ABC é: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21.7.8.6} = 84$.
Deste modo: $S = p.r \Rightarrow 84 = 21.r \Rightarrow r = 4$.

6) (FGV-2005) Na figura, ABC é um triângulo com AC = 20cm, AB = 15cm e BC = 14cm. Sendo AQ e BP bissetrizes interiores do triângulo ABC, o quociente QR/AR é igual a

a) 0,3
b) 0,35
c) 0,4
d) 0,45
e) 0,5

Solução:

Pelo Teorema da Bissetriz Interna: $\dfrac{BQ}{AB} = \dfrac{CQ}{AC} = \dfrac{BQ + CQ}{AB + AC} = \dfrac{BC}{AB + AC} \Rightarrow \dfrac{BQ}{15} = \dfrac{14}{35} \Rightarrow BQ = 6$ cm

Aplicando agora o Teorema da Bissetriz Interna em ΔABQ: $\dfrac{QR}{AR} = \dfrac{BQ}{AB} = \dfrac{6}{15} = 0{,}4$.

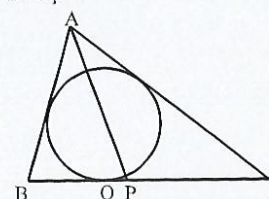
7) (IME-66) Determinar a bissetriz do ângulo maior de um triângulo cujo perímetro é 38 m e cujos lados são proporcionais a 4, 6 e 9.

Solução:
Como os lados são proporcionais a 4, 6 e 9 $\Rightarrow a = 4x \quad b = 6x \quad c = 9x$.
Se o perímetro é 38: $4x + 6x + 9x = 19x = 38 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow a = 8 \quad b = 12 \quad c = 18$.
Desde que o maior lado é oposto ao maior ângulo, devemos calcular a bissetriz do ângulo C.

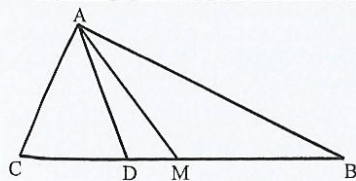
Pelo Teorema da Bissetriz: $\dfrac{m}{b} = \dfrac{n}{a} = \dfrac{m+n}{b+a} = \dfrac{c}{b+a} \Rightarrow \dfrac{m}{12} = \dfrac{n}{8} = \dfrac{18}{20} \Rightarrow m = \dfrac{54}{5}$ e $n = \dfrac{36}{5}$.

Calculando o valor da bissetriz de C: $\beta_c = \sqrt{a.b - m.n} = \sqrt{(8)(12) - \left(\dfrac{54}{5}\right)\left(\dfrac{36}{5}\right)} = \dfrac{2\sqrt{114}}{5}$.

8) Considere um triângulo ABC onde os lados são iguais a: $BC = a = 14$, $AC = b = 13$ e $AB = c = 15$. Seja P o ponto onde a bissetriz interna do ângulo Â encontra o lado BC e seja Q o ponto de contato da circunferência inscrita no triângulo ABC com o lado BC. Determine o valor de PQ.
a) 1/4 b) 1/2 c) 1 d) 3/2 e) 0

Solução:

Pelo Teorema da Bissetriz:
$\dfrac{PC}{AC} = \dfrac{PB}{AB} = \dfrac{PC + PB}{AC + AB} = \dfrac{BC}{AC + AB} \Rightarrow \dfrac{PB}{15} = \dfrac{14}{28} \Rightarrow PB = 15/2$.
O semi-perímetro de ABC é:
$p = (a + b + c)/2 = (14 + 13 + 15)/2 = 21$.
Portanto: $QB = p - b = 21 - 13 = 8$.
Assim: $PQ = PB - QB = 8 - 15/2 = 1/2$.

9) (Colégio Naval-84/85) Num triângulo ABC, a medida do lado $\overline{AB}$ é o dobro da medida do lado $\overline{AC}$. Traça-se a mediana $\overline{AM}$ e a bissetriz $\overline{AD}$ (M e D pertencentes a $\overline{BC}$). Se a área do triângulo ABC é S, então a área do triângulo AMD é:
a) S/3 b) S/4 c) S/6 d) 3S/8 e) S/12

Solução:

Pelo Teorema da Bissetriz: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow BD = 2.CD \Rightarrow$

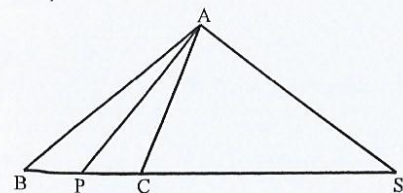
$BD = 2(a - BD) \Rightarrow BD = 2a/3$.

Desta forma: $MD = BD - MD = 2a/3 - a/2 = a/6$.

Como ΔABC e ΔAMD possuem a mesma altura relativa ao vértice A: $\frac{S_{\Delta AMD}}{S} = \frac{MD}{BC} = \frac{a/6}{a} \Rightarrow S_{\Delta AMD} = S/6$.

10) (EEAR-2002) Em um triângulo ABC, as medidas dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são, respectivamente, 40 cm, 20 cm e 30 cm. A bissetriz interna desse triângulo, relativa ao vértice A, encontra o lado oposto no ponto P, e a bissetriz externa, relativa ao mesmo vértice, encontra o prolongamento do lado $\overline{BC}$ no ponto S. A medida do segmento $\overline{PS}$, em cm, é igual a

a) 30 b) 35 c) 40 d) 45

Solução:

Inicialmente observe que $AC^2 + BC^2 = 400 + 900 = 1300 < AB^2 = 1600$, ou seja, ABC é um triângulo obtusângulo com ângulo C maior que 90^o.

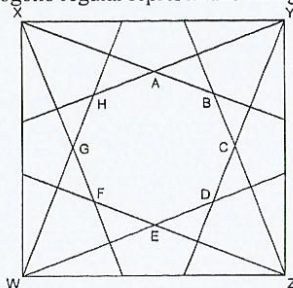
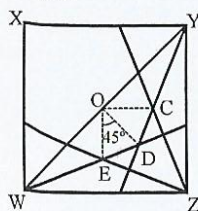
Pelo Teorema da Bissetriz Interna:

$$\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC} = \frac{PB+PC}{AB+AC} = \frac{BC}{AB+AC} \Rightarrow$$

$$\frac{PB}{40} = \frac{PC}{20} = \frac{30}{60} \Rightarrow PB = 20 \text{ cm e } PC = 10 \text{ cm}$$

Pelo Teorema da Bissetriz Externa: $\frac{BS}{AB} = \frac{CS}{AC} = \frac{BS - CS}{AB - AC} = \frac{BC}{AB - AC} \Rightarrow \frac{BS}{40} = \frac{CS}{20} = \frac{30}{20} \Rightarrow$

$CS = 30 \Rightarrow PS = PC + CS = 10 + 30 = 40$ cm.

11) (IME-2002) Considere um quadrado XYZW de lado a. Dividindo-se cada ângulo desse quadrado em quatro partes iguais, obtém-se o octógono regular representado na figura abaixo.

Solução:

Seja O o centro do quadrado. Note que o octógono central é formado por 8 triângulos isósceles iguais, todos congruentes a, por exemplo, ΔOED. Assim, vamos calcular a área de ΔOED e multiplicar por 8.

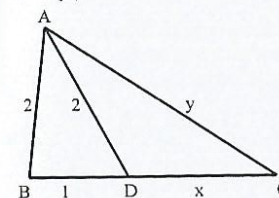
Uma saída interessante para esta questão é observar que D é o incetro de ΔYZW, pois é a interseção das bissetrizes de ΔZYW e ΔYWZ. Mais interessante ainda é perceber que OD é o raio da circunferência inscrita em ΔYZW, uma vez que OD é perpendicular a YW. Como ΔYZW é retângulo: $OD = \frac{YZ + ZW - YW}{2} \Rightarrow OD = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$

Como ΔOED é isósceles então OE = OD. Portanto, a área do octógono é igual a:

$$S = 8.S_{\Delta OED} = 8\left(\frac{OD.OE}{2}\text{sen }45^\circ\right) = 4\left(\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}\right)^2\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2(6-4\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2(3\sqrt{2}-4)$$

12) (OBM-2005) O ponto D pertence ao lado BC do triângulo ABC. Sabendo que $AB = AD = 2$, $BD = 1$ e os ângulos BAD e CAD são congruentes, então a medida do segmento CD é:

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{6}{5}$ e) $\frac{7}{6}$

Solução:

Pelo Teorema da Bissetriz Interna: $\frac{1}{2} = \frac{x}{y} \Rightarrow y = 2x$.

Pela expressão do comprimento da bissetriz interna:

$AD^2 = AB.AC - BD.CD \Rightarrow 4 = 2y - x \Rightarrow 4 = 4x - x \Rightarrow$

$3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$.

13) (IME-84/85) Em um triângulo ABC, retângulo em A, é dada a razão k entre o produto das bissetrizes internas dos ângulos B e C e o quadrado da hipotenusa. Calcule B, em função de k. Determine entre que valores pode variar a razão k para que o problema tenha solução.

Solução:

Inicialmente notemos que, pelo Teorema de Pitágoras, temos $a^2 = b^2 + c^2$. Assim:

$$k = \frac{\beta_b\beta_c}{a^2} = \frac{\sqrt{ac[(a+c)^2 - b^2]}\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a^2(a+c)(a+b)} = \frac{\sqrt{ac(a^2+c^2+2ac-b^2)ab(a^2+b^2+2ab-c^2)}}{a^2(a+c)(a+b)} \Rightarrow$$

$$k = \frac{\sqrt{a^2bc(2c^2+2ab)(2b^2+2ab)}}{a^2(a+c)(a+b)} = \frac{2bc\sqrt{(a+c)(a+b)}}{a(a+c)(a+b)} = \frac{2bc}{a\sqrt{(a+b)(a+c)}}$$

Como ABC é retângulo em A então $b = a.\text{sen } B$ e $c = a.\cos B$:

$$k = \frac{2a^2 \text{sen } B \cos B}{a\sqrt{a^2(1+\text{sen } B)(1+\cos B)}} = \frac{2\,\text{sen } B \cos B}{\sqrt{(1+\text{sen } B)(1+\cos B)}}$$

Vamos utilizar agora as seguintes relações trigonométricas (ângulo B agudo):

i) $\text{sen } B = 2.\text{sen } B/2.\cos B/2$; ii) $\cos B = 1 - 2.\text{sen}^2 B/2$; iii) $\sqrt{1+\text{senB}} = \text{senB}/2 + \cos B/2$.

Assim:

$$k = \frac{2.\text{senB}/2.\cos B/2.(\cos B/2 - \text{senB}/2)(\cos B/2 + \text{senB}/2)}{(\text{senB}/2 + \cos B/2)\sqrt{2}.\text{senB}/2} = \sqrt{2}\text{senB}/2.(\cos B/2 - \text{senB}/2) \Rightarrow$$

$$k = \sqrt{2}(\text{senB}/2.\cos B/2 - \text{sen}^2 B/2) = \sqrt{2}\left(\frac{\text{senB}}{2} - \frac{(1-\cos B)}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\text{senB} + \cos B - 1) \Rightarrow$$

$$k + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{senB} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos B = \text{sen}(B + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow B + \frac{\pi}{4} = \text{arcsen}\left(k + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow B = \text{arcsen}\left(k + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4}$$

Como k é uma razão de segmentos então certamente $k > 0$. Como B é um ângulo agudo:

$$0 < \text{arcsen}\left(k + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \text{arcsen}\left(k + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < k + \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow 0 < k < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

14) ABC é um triângulo qualquer; AM, BN e CP são bissetrizes internas. Provar que a razão entre as áreas dos triângulos MNP e ABC é igual $\frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}$.

Solução:

Pelo Teorema da Bissetriz Interna:

i) $\frac{BM}{c}=\frac{CM}{b}=\frac{a}{b+c} \Rightarrow BM=\frac{a.c}{b+c}$ e $CM=\frac{a.b}{b+c}$

ii) $\frac{BP}{a}=\frac{AP}{b}=\frac{c}{a+b} \Rightarrow BP=\frac{a.c}{a+b}$ e $AP=\frac{b.c}{a+b}$

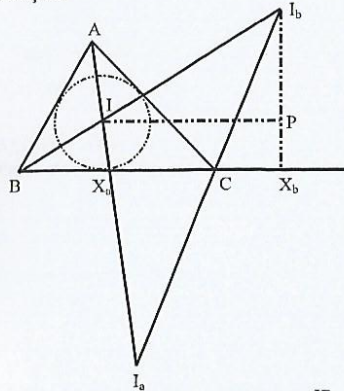
iii) $\frac{AN}{c}=\frac{CN}{a}=\frac{b}{a+c} \Rightarrow AN=\frac{b.c}{a+c}$ e $CN=\frac{a.b}{a+c}$

$\therefore \frac{S_{APN}}{S}=\frac{AP}{c}\frac{AN}{b}=\frac{b}{a+b}\frac{c}{a+c}$ $\quad\therefore \frac{S_{CMN}}{S}=\frac{CN}{b}\frac{CM}{a}=\frac{a}{a+c}\frac{b}{b+c}$ $\quad\therefore \frac{S_{BMP}}{S}=\frac{BM}{a}\frac{BP}{c}=\frac{c}{b+c}\frac{a}{a+b}$

Assim: $\frac{S_{MNP}}{S}=1-\left(\frac{S_{APN}}{S}+\frac{S_{CMN}}{S}+\frac{S_{BMP}}{S}\right)=1-\left(\frac{b.c}{(a+b)(a+c)}+\frac{a.b}{(a+c)(b+c)}+\frac{a.c}{(b+c)(a+b)}\right) \Rightarrow$

$$\frac{S_{MNP}}{S}=\frac{(a+b)(a+c)(b+c)-bc(b+c)-ab(a+b)-ac(a+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)} \Rightarrow \frac{S_{MNP}}{S}=\frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

15) Prove que o raio do círculo que passa pelos centros do círculo inscrito e dois dos círculos ex-inscritos é o dobro do raio do círculo circunscrito ao triângulo.

Solução:

Sejam I, I_a e I_b, respectivamente, incentro, ex-incentro relativo a A e ex-incentro relativo a B de ΔABC. Vamos provar que o circunraio de ΔII_aI_b é 2R, onde R é circunraio de ΔABC.

Por I trace uma paralela a BC e por I_b trace uma perpendicular a BC, de modo que estas duas retas interceptam-se em P. Seja X_b a intercessão de PI_b com BC. Assim, X_b é o ponto de tangência da circunferência ex-inscrita relativa a B. Portanto:

$$I_bX_b=r_b \text{ e } BX_b=p$$

Seja X_a o ponto de tangência da circunferência inscrita a ΔABC com o lado BC. Desta forma temos que:

$$IX_a=r \text{ e } BX_a=p-b$$

Como IP || BC então $\angle I_bIP=\angle I_bBC=B/2$.

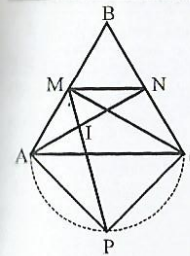
Como ΔI_bIP é retângulo: $\cos B/2=\frac{IP}{II_b}=\frac{BX_b-BX_a}{II_b}=\frac{p-(p-b)}{II_b}=\frac{b}{II_b}$

Como $\angle I_aAC=A/2$ e $\angle ACI_a=90°+C/2$ então $\angle AI_aI_b=B/2$.

Aplicando a Lei dos Senos em ΔII_aI_b: $\frac{II_b}{\text{sen}(\angle AI_aI_b)}=2R' \Rightarrow \frac{II_b}{\text{sen}B/2}=2R' \Rightarrow$

$$\frac{II_b.2.\cos B/2}{2.\text{sen}B/2.\cos B/2}=2R' \Rightarrow \frac{[II_b.\cos B/2]}{\text{sen}B}=R' \Rightarrow \frac{b}{\text{sen}B}=R' \Rightarrow R'=2R$$

16) (Olimpíada de Maio-99) Seja *ABC* um triângulo equilátero. *M* é o ponto médio do segmento *AB* e *N* é o ponto médio do segmento *BC*. Seja *P* o ponto exterior a *ABC* tal que o triângulo *ACP* é isósceles e retângulo em *P*. *PM* e *AN* cortam-se em *I*. Prove que *CI* é a bissetriz do ângulo *MCA*.

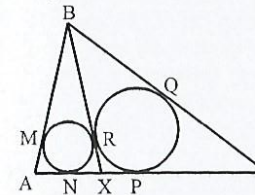
Solução:

Como ΔABC é equilátero e N é médio de BC então AN é mediana, altura e bissetriz de A. Analogamente CM é mediana e altura de C $\Rightarrow$ CM ⊥ AB.

Como ∠CMA + ∠APC = 180° $\Rightarrow$ APCM é um quadrilátero inscritível.

Desde que AP = PC, então ∠AMP e ∠PMC são ângulos inscritos no circuncírculo de APCM que compreendem cordas de mesmo comprimento, ou seja, ∠AMP = ∠PMC $\Rightarrow$ MP é bissetriz de ∠AMC.

Portanto, temos em ΔAMC que AN é bissetriz de ∠MAC e MP é bissetriz de ∠AMC, ou seja, I é i incentro de ΔAMC, implicando que CI é a bissetriz de ∠MCA.

17) (Seletiva Brasileira-Cone Sul-96) Um ponto X é escolhido sobre o lado AC do triângulo ABC. Prove que se as circunferências inscritas nos triângulos ABX e BCX são tangentes, então X pertence à circunferência inscrita no triângulo ABC.

Solução:

Considere os pontos de tangência das circunferências inscritas com os lados de acordo com a figura ao lado.

Em ΔABX temos:

AM = AN = (c + AX – BX)/2 BM = BR = (c + BX – AX)/2

XR = XN = (AX + BX – c)/2

Em ΔBCX temos:

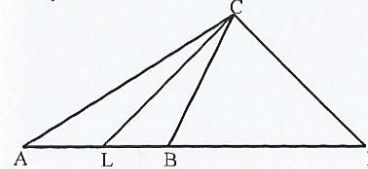
BR = BQ = (a + BX – CX)/2 CP = CQ = (a + CX – BX)/2

XR = XP = (BX + CX – a)/2

Logo: (AX + BX – c)/2 = (BX + CX – a)/2 $\Rightarrow$ CX – AX = a – c

Como CX + AX = b $\Rightarrow$ CX = (a + b – c)/2 = p – c AX = (b + c – a)/2 = p – a $\Rightarrow$ X é o ponto de contato do incírculo de ΔABC com o lado AC.

18) (Seletiva Brasileira -Cone Sul-2000) Sejam L e M, respectivamente, as interseções das bissetrizes interna e externa do ângulo C do triângulo ABC e a reta AB. Se CL = CM, prove que $AC^2+BC^2=4R^2$, onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Solução:

Desde que CL = CM e CL ⊥ CM $\Rightarrow$ ΔCLM é retângulo isósceles $\Rightarrow$ ∠CLB = 45° $\Rightarrow$ B = 135° – C/2 e A = 45° – C/2 $\Rightarrow$ A = 90° – B.

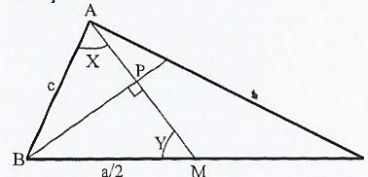
Pela Lei dos Senos em ΔABC:

$$\frac{AC}{\text{sen}B}=\frac{BC}{\text{sen}A}=2R \Rightarrow \frac{AC}{\text{sen}B}=\frac{BC}{\cos B}=2R \Rightarrow$$

$$\text{sen}B=\frac{AC}{2R} \text{ e } \cos B=\frac{BC}{2R}.$$

Uma vez que $\text{sen}^2B+\cos^2B=1$ então segue diretamente que $AC^2+BC^2=4R^2$.

19) (Olimpíada da Estônia-2001) Em um triângulo ABC, as medidas dos seus lados são inteiros consecutivos e a mediana relativa ao lado BC é perpendicular à bissetriz interna do ângulo ∠ABC. Determine as medidas dos lados do triângulo ABC.

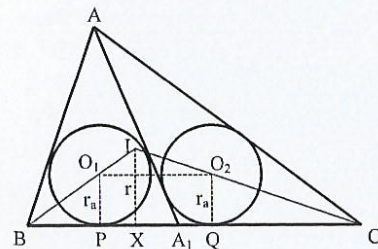
Solução:

Digamos que x, x + 1 e x + 2 são os lados do triângulo.

Desde que BP é bissetriz do ângulo B, então ∠ABP = ∠PBM $\Rightarrow$ ΔABP ~ ΔMBP $\Rightarrow$ X = Y $\Rightarrow$ ΔABM é isósceles $\Rightarrow$ AB = BM $\Rightarrow$ c = a/2

Vamos analisar todas as possibilidades:

i) $x = (x+1)/2 \Rightarrow 2x = x+1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ os lados são 1, 2 e 3 que é impossível, pois $2 + 1 = 3$
ii) $x = (x+2)/2 \Rightarrow 2x = x+2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ os lados são 2, 3 e 4
iii) $x + 1 = (x+2)/2 \Rightarrow 2x + 2 = x + 2 \Rightarrow x = 0$ que é impossível
Portanto: $AB = 2$ $AC = 3$ $BC = 4$

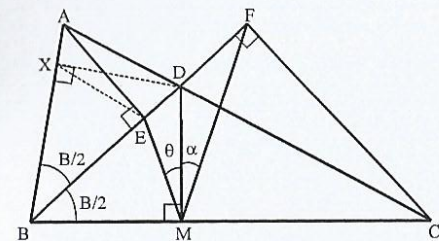
20) (Olimpíada da Inglaterra-89) Um ponto A_1 é escolhido sobre o lado BC de um triângulo ABC de modo que os raios das circunferências inscritas em ΔABA_1 e ΔACA_1 são iguais. Se BC = a, CA = b, AB = c e 2p = a + b + c, prove que $AA_1 = \sqrt{p(p-a)}$.

Solução:

Sejam O_1 e O_2 os incentros de ΔABA_1 e ΔACA_1 e p_1 e p_2 os semiperímetros dos mesmos triângulos. Considere que P, Q e X são as projeções de O_1, O_2 e I (incentro de ΔABC) sobre BC. Nós temos que: $S_{ABC} = S_{ABA1} + S_{ACA1} \Rightarrow$
$r_a.p_1 + r_a.p_2 = r_a(p_1 + p_2) = r_a(p + AA_1) \Rightarrow r_a(p + AA_1) = p.r$
Como O_1 está sobre a bissetriz de B e O_2 está sobre a bissetriz de C então B, O_1 e I são colineares e C, O_2 e I também estão alinhados. Portanto temos que $\Delta IO_1O_2 \sim \Delta IBC$, ou seja:

$$\frac{O_1O_2}{IX - O_1P} = \frac{BC}{IX} \Rightarrow \frac{PA_1 + QA_1}{r - r_a} = \frac{a}{r} \Rightarrow \frac{p_1 - c + p_2 - b}{r - r_a} = \frac{a}{r} \Rightarrow \frac{p + AA_1 - b - c}{a} = 1 - \frac{r_a}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{a + AA_1 - p}{a} = 1 - \frac{p}{p + AA_1} \Rightarrow 1 + \frac{AA_1 - p}{a} = 1 - \frac{p}{p + AA_1} \Rightarrow p^2 - AA_1^2 = a.p \Rightarrow AA_1 = \sqrt{p(p-a)}.$$

21) (Olímpiada Iberoamericana-2002) Num triângulo escaleno ABC traça-se a bissetriz interna BD, com D sobre AC. Sejam E e F, respectivamente, os pés das perpendiculares traçadas desde A e C até à reta BD, e seja M o ponto sobre o lado BC tal que DM é perpendicular a BC. Demonstre que $\angle EMD = \angle DMF$.

Solução:

Sejam $\theta = \angle EMD$ e $\alpha = \angle DMF$.
Como $\angle CMD + \angle DFC = 180°$ então o quadrilátero CMDF é inscritível. Uma vez que α e $\angle DCF$ compreendem a mesma corda DF no circuncírculo de CMDF então $\angle DCF = \alpha \Rightarrow \angle BCF = \alpha + C$.
Como ΔBCF é retângulo então
$\angle CBF = 90° - \angle BCF \Rightarrow B/2 = 90° - (\alpha + C) \Rightarrow$
$\alpha = 90° - (C + B/2)$
Trace agora uma perpendicular a AB passando por E, sendo X a interseção desta perpendicular com AB.

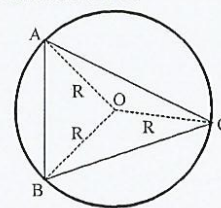
Como BD é uma bissetriz então DX = DM e BX = BM $\Rightarrow \Delta BXD \equiv \Delta BMD \Rightarrow \angle EXD = \angle EMD = \theta$.
Desde que $\angle AXD + \angle AED = 180°$ então o quadrilátero AXED é inscritível $\Rightarrow \angle EAD = \angle EXD = \theta$.
Repare também que $\angle BAE + \angle EAD = A \Rightarrow \angle BAE = A - \theta \Rightarrow A - \theta = 90° - B/2 \Rightarrow$
$\theta = A + B/2 - 90°$.
Como $A = 180° - (B + C) \Rightarrow \theta = 180° - B - C + B/2 - 90° \Rightarrow \theta = 90° - (C + B/2) = \alpha$

7.5) MEDIATRIZ E CIRCUNCENTRO

7.5.1) Definição: "Mediatriz é a reta perpendicular a um segmento passando pelo seu ponto médio. Como conseqüência, mediatriz de um segmento AB é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de A e B."

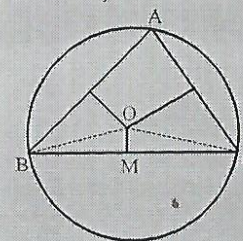
7.5.2) Teorema: "As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes em um ponto denominado de circuncentro (O)."

Demonstração:
Seja m_{AB} a mediatriz de AB e m_{BC} a mediatriz de BC. Seja O a interseção de m_{AB} e m_{BC}, ou seja, O é eqüidistante de A, B e C. Desta forma, O pertence ao segmento m_{AC}, fazendo com que O seja a interseção de m_{AB}, m_{BC} e m_{AC}.

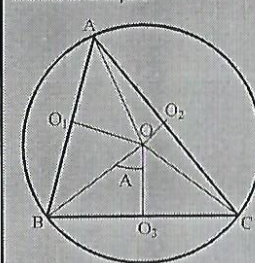
7.5.3) Circunferência Circunscrita
Como O é eqüidistante de A, B e C, então existe uma circunferência Γ com centro em O e que contém os vértices do ΔABC. A esta circunferência Γ que contém os vértices de ΔABC dá-se o nome de circunferência circunscrita a ΔABC. Podemos dizer, também, que ΔABC está inscrito a Γ ou que Γ é o circuncírculo de ΔABC.

Lembre-se que em todo triângulo inscrito em uma circunferência podemos aplicar a Lei dos Senos:
$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C} = 2R$$

7.5.4) Área do triângulo inscrito
A área de um triângulo ABC pode ser determinada pela expressão $S = \frac{a.b.\text{sen}\,C}{2}$.
Pela Lei dos Senos temos que $\frac{c}{\text{sen}\,C} = 2R \Rightarrow \text{sen}\,C = \frac{c}{2R} \Rightarrow S = \frac{a.b.c}{4R}$.
Na verdade esta expressão é mais usada para calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC, pois dados os lados a, b e c de ΔABC, podemos calcular sua a área utilizando a fórmula de Hieron e depois usar a equação acima para determinar R.

7.5.5) Teorema: "A distância de O até o lado oposto ao vértice A é $OM = \frac{BC.\cot A}{2}$."

Demonstração:

Desde que O é o centro da circunferência então:
$\angle C\hat{O}B = 2\hat{A} \Rightarrow \angle C\hat{O}M = \hat{A}$
Como M é o ponto médio de BC então BC = 2.CM. Desta forma:
$$\text{tg}\hat{A} = \frac{CM}{OM} \Rightarrow OM = \frac{BC}{2.\text{tg}\hat{A}} \Rightarrow OM = \frac{BC.\cot\hat{A}}{2}$$
Analogamente, pode-se demonstrar que as distâncias de O a B e de O a C, respectivamente, são iguais a $\frac{AC.\cot B}{2}$ e $\frac{AB.\cot C}{2}$.

7.5.6) Teorema de Carnot: "Sejam ABC um triângulo acutângulo e O centro da circunferência circunscrita a ABC. Se por O traçam-se perpendiculares aos lados de ABC, intersectando AB em O_1, AC em O_2 e BC em O_3, então $\overline{OO_1}+\overline{OO_2}+\overline{OO_3}=R+r$."

Demonstração:

a) Inicialmente note que $\angle BOC = 2.\angle BAC = 2A$

ΔBOC é isósceles $\Rightarrow$ OO_3 é altura e bissetriz $\Rightarrow$

$\angle BOO_3 = A \Rightarrow OO_3 = R.\cos A$

Analogamente: $OO_2 = R.\cos B \quad OO_1 = R.\cos C$

A área de ΔBOC é dada por $S(\Delta BOC) = a.OO_3/2 = (a.R.\cos A)/2$

Analogamente $S(\Delta AOB) = (c.R.\cos C)/2$ e $S(\Delta AOC) = (b.R.\cos B)/2$

Desta forma a área de ΔABC é dada por:

$S = (a.R.\cos A)/2 + (b.R.\cos B)/2 + (c.R.\cos C)/2 \Rightarrow$

$S = R(a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C)/2$

Em ΔABC temos que:

$a = b.\cos C + c.\cos B \quad b = a.\cos C + c.\cos A \quad c = a.\cos B + b.\cos A$

Somando estas equações:

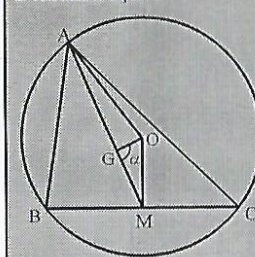
$a + b + c = (b + c).\cos A + (a + c).\cos B + (a + b).\cos C \Rightarrow$

$a + b + c = (a + b + c).\cos A + (a + b + c).\cos B + (a + b + c).\cos C - a.\cos A - b.\cos B - c.\cos C \Rightarrow$

$(a + b + c) = (a + b + c)(\cos A + \cos B + \cos C) - (a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C) \Rightarrow$

$2p = 2p\left(\frac{OO_3}{R}+\frac{OO_2}{R}+\frac{OO_1}{R}\right)-\frac{2S}{R} \Rightarrow pR = p(OO_1 + OO_2 + OO_3) - p.r \Rightarrow OO_1 + OO_2 + OO_3 = R + r$

7.5.7) Teorema: "Se, num triângulo ABC, O é o centro do círculo circunscrito; G é o ponto de interseção das medianas; a, b e c são os lados e R é o raio do círculo circunscrito, então $\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$."

Demonstração:

Como ΔOMC é retângulo: $OM^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$.

Lei dos Cossenos em ΔOGM: $OM^2 = OG^2 + GM^2 - 2.OG.GM.\cos\alpha \Rightarrow$

$R^2 - \frac{a^2}{4} = OG^2 + \frac{m_a^2}{9} - 2.OG.\frac{m_a}{3}.\cos\alpha \quad (1)$

Lei dos Cossenos em ΔOGA:

$OA^2 = OG^2 + AG^2 - 2.OG.AG.\cos(180° - \alpha) \Rightarrow$

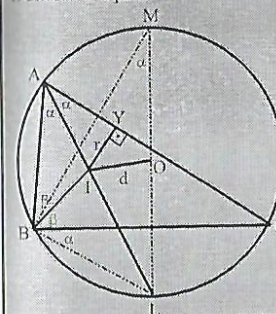
$R^2 = OG^2 + \frac{4m_a^2}{9} + 2.OG.\frac{2m_a}{3}.\cos\alpha \Rightarrow$

$\frac{R^2}{2} = \frac{OG^2}{2} + \frac{2m_a^2}{9} + 2.OG.\frac{m_a}{3}.\cos\alpha \quad (2)$

Somando (1) e (2): $\frac{3R^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{3.OG^2}{2} + \frac{m_a^2}{3} \Rightarrow$

$\frac{3R^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{3.OG^2}{2} + \frac{b^2}{6} + \frac{c^2}{6} - \frac{a^2}{12} \Rightarrow OG^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$

7.5.8) Teorema de Euler: "Sejam O e I o circuncentro e o incentro, respectivamente, de um triângulo com raio do círculo circunscrito igual a R e raio do círculo inscrito igual a r.
Então $OI^2 = R^2 - 2Rr$."

Demonstração:

Prolongue a bissetriz interna de A até encontrar o circuncírculo em L. LM é o diâmetro perpendicular a BC. Sejam $\alpha = A/2$ e $\beta = B/2$.

Note que: $\angle BML = \angle BAL = \alpha$ e $\angle LBC = \angle LAC = \alpha$.

Como $\angle BIL$ é ângulo exterior de ΔABI então

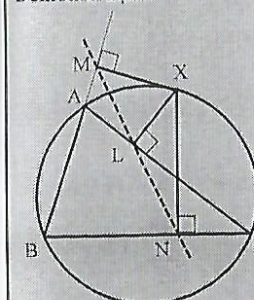
$\angle BIL = \alpha + \beta = \angle LBI \Rightarrow \Delta LBI$ é isósceles $\Rightarrow LI = LB$

Portanto, aplicando potência de ponto relativa ao ponto I:

$R^2 - OI^2 = LI.IA = LB.IA = LM\frac{LB/LM}{IY/IA}IY = LM\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha}IY \Rightarrow$

$R^2 - OI^2 = LM.IY \Rightarrow R^2 - OI^2 = 2Rr \Rightarrow OI^2 = R^2 - 2Rr$

7.5.9) Reta de Simson-Wallace: "Se perpendiculares são traçadas, a partir de um ponto sobre o circuncírculo de um triângulo, a seus lados, suas interseções com os lados do triângulo são colineares e pertencem à *Reta de Simson*".

Demonstração:

Sejam L, M e N, respectivamente, os pés das perpendiculares tiradas deste X até os lados AC, AB e BC.

Como $\angle XLC + \angle XNC = 180° \Rightarrow$

XLNC é um quadrilátero inscritível $\Rightarrow \angle NLC = \angle NXC$.

Como $\angle AMX + \angle ALX = 180° \Rightarrow$ AMXL é um quadrilátero inscritível $\Rightarrow \angle ALM = \angle AXM$.

Uma vez que ABCX é inscritível então:

$180° - B = \angle AXC = \angle NXC + \angle AXN = \angle NLC + \angle AXN \quad (1)$

Sendo BMXN também inscritível, podemos afirmar que:

$180° - B = \angle MXN = \angle AXM + \angle AXN = \angle ALM + \angle AXN \quad (2)$

Igualando as expressões (1) e (2) obtemos que $\angle NLC = \angle ALM \Rightarrow$ M, L e N são colineares.

7.5.10) Teorema Recíproco de Simson: "Se os pés das perpendiculares de um ponto aos lados de um dado triângulo são colineares, então o ponto pertence ao circuncírculo do triângulo".

Demonstração:

Os primeiros passos desta demonstração são idênticos aos da Reta de Simson. Por isso, considere as justificativas acima citadas sobre $\angle NLC = \angle NXC$ e $\angle ALM = \angle AXM$.

Como M, L e N são colineares $\Rightarrow \angle NLC = \angle ALM \Rightarrow \angle AXN + \angle NLC = \angle AXN + \angle ALM \Rightarrow$

$\angle AXN + \angle NXC = \angle AXN + \angle AXM \Rightarrow \angle AXC = \angle MXN$.

Como BMXN é inscritível temos que $\angle MXN = 180° - B$, implicando que $\angle AXC = 180° - B$, ou seja, ABCX é um inscritível $\Rightarrow$ X pertence ao circuncírculo de ΔABC.

Exemplos:

1) (Colégio Naval-95/96) O ponto **P** interno ao triângulo **ABC** é eqüidistante de dois de seus lados e de dois de seus vértices. Certamente **P** é a interseção de:

a) Uma bissetriz interna e uma altura desse triângulo.

b) Uma bissetriz interna e uma mediatriz de um dos lados desse triângulo.

c) Uma mediatriz de um lado e uma mediana desse triângulo.

d) Uma altura e uma mediana desse triângulo.

e) Uma mediana e uma bissetriz interna desse triângulo.

Solução:

Como o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de dois lados é a bissetriz do ângulo formado por estes lados e o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de dois vértices é a mediatriz do segmento delimitado pelos vértices, então P é a interseção de uma bissetriz interna com uma mediatriz.

2) Calcule o raio da circunferência circunscrita ao triângulo cujos lados são 4, 13 e 15.

Solução:

O semi-perímetro do triângulo é: $p = (a + b + c)/2 = (4 + 13 + 15)/2 = 16$.

A área do triângulo é: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16.12.3.1} = 24$.

Deste modo: $R = \dfrac{a.b.c}{4.S} = \dfrac{4.13.15}{3.24} \Rightarrow R = \dfrac{65}{6}$.

3) (AFA-98) Seja ABC um triângulo retângulo em A, circunscrito por uma circunferência de raio R, e $\angle ABC = x$. A razão entre a área do triângulo e o quadrado da metade do valor da hipotenusa é

a) sen 2x b) $(\text{sen}^2 x)/2$ c) $(\cos^2 x)/2$ d) $(\cos 2x)/2$

Solução:

Se ABC é um triângulo retângulo em A circunscrito em uma circunferência de raio R então $a = 2R$.

Como $\angle ABC = x$ então $b = a.\text{sen } x$ e $c = a.\cos x$.

Portanto: $S = \dfrac{a.b.c}{4R} = \dfrac{a.a.\text{sen}x.a.\cos x}{4R} \Rightarrow \dfrac{S}{(a^2/4)} = \dfrac{a.\text{sen}x.\cos x}{R} = 2.\text{sen}x.\cos x = \text{sen}2x$.

4) (ITA-86) Se o perímetro de um triângulo inscrito num círculo medir 20x cm e a soma dos senos de seus ângulos internos for igual a x, então a área do círculo, em cm^2, será igual a:

a) 50π b) 75π c) 100π d) 125π e) 150π

Solução:

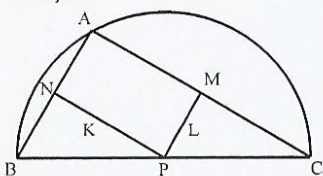
Pela Lei dos Senos: $a = 2R.\text{sen } A$ $b = 2R.\text{sen } B$ $c = 2R.\text{sen } C$.

Assim: $a + b + c = 20x \Rightarrow 2R(\text{sen } A + \text{sen } B + \text{sen } C) = 20x \Rightarrow R.x = 10x \Rightarrow R = 10$ cm

Desta forma: $S = \pi R^2 = \pi(10)^2 \Rightarrow S = 100\pi \text{ cm}^2$

5) (Colégio Naval-2004/2005) Dado um triângulo retângulo, seja P o ponto do plano do triângulo eqüidistante dos vértices. As distâncias de P aos catetos do triângulo são K e L. O raio do círculo circunscrito ao triângulo é dado por

a) $\dfrac{K+L}{4}$ b) $2K + L$ c) $\dfrac{\sqrt{K^2+L^2}}{4}$ d) $\dfrac{\sqrt{K^2+L^2}}{2}$ e) $\sqrt{K^2+L^2}$

Solução:

O ponto do plano do triângulo que está a uma mesma distância dos três vértices é o centro da circunferência circunscrita. Como o triângulo é retângulo então P coincide com o ponto médio da hipotenuda e o triângulo está inscrito em uma semi-circunferência. Perceba que os triângulos BNP e PMC são congruentes, implicando que MC = K. Aplicando Teorema de Pitágoras em ΔPMC: $PC^2 = CM^2 + PM^2 = K^2 + L^2 \Rightarrow R = \sqrt{K^2 + L^2}$.

6) (Unifor-2000) Em um triângulo ABC, retângulo em A, a mediana relativa à hipotenusa é perpendicular ao segmento BC. Se BC = 2 cm, é verdade que:

a) a medida de um dos catetos é 1 cm.

b) as mediatrizes dos catetos se interceptam no interior do triângulo ABC.

c) o quadrado da soma das medidas dos catetos é igual a 4 cm^2.

d) a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC é igual a 2 cm.

e) a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC é igual a 1 cm.

Solução:

Se a mediana relativa à hipotenusa é perpendicular a esta, então o triângulo ABC, além de retângulo, é isósceles, uma vez que a mediana e altura relativas ao mesmo vértice coincidem.

Vamos agora analisar cada alternativa:

a) Falsa. Se BC = 2 cm então a altura do triângulo retângulo vale 1 cm e cada cateto é igual a $\sqrt{2}$.

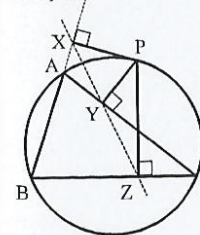
b) Falsa. Como o triângulo é retângulo então o circuncentro está sobre a hipotenusa.

c) Falsa. $(\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 = 8$.

d) Falsa. O raio é igual à metade da hipotenusa, ou seja, vale 1 cm.

e) Verdadeira. Veja o item anterior.

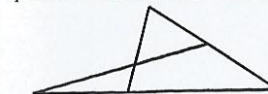
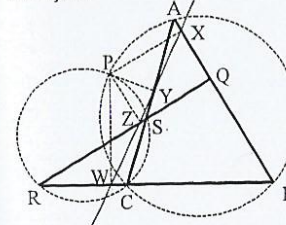
7) A partir de um ponto *P* sobre o circuncírculo de *ABC*, são traçadas as perpendiculares *PX*, *PY* e *PZ* aos lados *AC*, *AB* e *BC*, respectivamente. Prove que $PA \times PZ = PB \times PX$.

Solução:

Como $\angle PYB + \angle PZB = 180° \Rightarrow$ PYZB é inscritível $\Rightarrow \angle PBY = \angle PZY$.

Como $\angle PXA + \angle PYA = 180° \Rightarrow$ PXAY é inscritível $\Rightarrow \angle PXY = \angle PAY$.

Pelo Teorema de Simson, os pontos X, Y e Z são colineares $\Rightarrow$

$\Delta PAB \sim \Delta PXZ \Rightarrow \dfrac{PA}{PX} = \dfrac{PB}{PZ} \Rightarrow PA.PZ = PB.PX$

8) (IME-98) Quatro retas se interceptam formando quatro triângulos conforme figura abaixo. Prove que os círculos circunscritos aos quatro triângulos possuem um ponto em comum.

Solução:

Tracemos inicialmente os circuncírculos de ΔABC e ΔCRS, que se encontram em P ($P \neq C$).

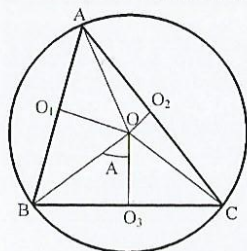
Trace agora perpendiculares aos lados AB, AC, QR e BR, interceptando estes lados nos pontos indicados na figura ao lado.

Pelo Teorema de Simson, como P está sobre o circuncírculo de ΔABC, então X, Y e W são colineares.

Pelo Teorema de Simson, como P está sobre o circuncírculo de ΔCRS, então Y, Z e W são colineares.

Assim, temos que X, Y e Z são colineares, implicando, pelo Teorema Recíproco de Simson, que P pertence ao circuncírculo de ΔAQS. Analogamente, os pontos X, Z e W são colineares, implicando, pelo Teorema Recíproco de Simson, que P pertence ao circuncírculo de ΔBRQ.

9) Sejam O o centro e R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo acutângulo ABC. Se r é o raio da circunferência inscrita a ABC e R_1, R_2, R_3 são os raios das circunferências circunscritas aos triângulos OBA, OBC, OCA, respectivamente, demonstre que $\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} = 2\dfrac{R+r}{R^2}$.

Solução:

Por O traçam-se perpendiculares aos lados de ABC, interceptando AB em O_1, AC em O_2 e BC em O_3.
Pelo Teorema de Carnot (item 7.5.6 deste capítulo) temos que:

$$OO_1 + OO_2 + OO_3 = R + r.$$

Em ΔBOO_3 observa-se que: $\text{sen } A = \dfrac{a}{2R}$ e $\cos A = \dfrac{OO_3}{R}$

Pela Lei dos Senos em ΔOBC: $\text{sen } 2A = \dfrac{a}{2R_2} \Rightarrow$

$$2.\text{sen } A.\cos A = \frac{a}{2R_2} \Rightarrow 2\frac{a}{2R}\frac{OO_3}{R} = \frac{a}{2R_2} \Rightarrow \frac{1}{R_2} = \frac{2.OO_3}{R^2}.$$

Analogamente pode-se demonstrar que: $\dfrac{1}{R_1} = \dfrac{2.OO_1}{R^2}$ e $\dfrac{1}{R_3} = \dfrac{2.OO_2}{R^2}$.

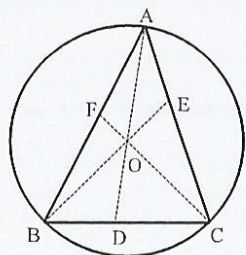
Portanto: $\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} = \dfrac{2.OO_1}{R^2} + \dfrac{2.OO_3}{R^2} + \dfrac{2.OO_2}{R^2} = \dfrac{2(OO_1 + OO_2 + OO_3)}{R^2} = 2\dfrac{R + r}{R^2}$

10) (Olimpíada da Espanha-93) Justificar que, em qualquer triângulo, o diâmetro da circunferência inscrita não é maior que o raio da circunferência circunscrita.

Solução:

Pelo Teorema de Euler sabemos que a distância do incentro I ao circuncentro O de um triângulo ΔABC é determinada por $OI^2 = R^2 - 2Rr$, ou seja, $R^2 - 2Rr = R(R - 2r) \geq 0 \Rightarrow R \geq 2r$.

11) (Olimpíada Iberoamericana-85) Dado um triângulo ABC, consideram-se os pontos D, E e F das retas BC, AC e AB respectivamente. Se as retas AD, BE e CF passam todas pelo centro O da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, cujo raio é R, demonstre que: $\dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{BE} + \dfrac{1}{CF} = \dfrac{2}{R}$.

Solução:

Uma vez que O é o centro da circuncírculo de ΔABC então temos que $AO = BO = CO = R$. Conseqüentemente:

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{COA}}{S_{ABC}} = 1 \Rightarrow$$

$$1 = \frac{OF}{CF} + \frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} = \frac{CF - R}{CF} + \frac{AD - R}{AD} + \frac{BE - R}{BE} \Rightarrow$$

$$1 = 1 - \frac{R}{CF} + 1 - \frac{R}{AD} + 1 - \frac{R}{BE} \Rightarrow \frac{R}{AD} + \frac{R}{CF} + \frac{R}{BE} = 2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R}.$$

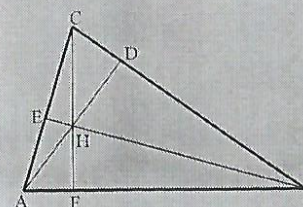
7.6) ALTURA E ORTOCENTRO

7.6.1) Definição: "Altura é o segmento de reta que parte de um vértice e é perpendicular ao lado oposto do triângulo".

7.6.2) Teorema: "As três alturas de um triângulo concorrem em um ponto denominado de ortocentro (H)."

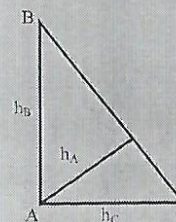
Demonstração:

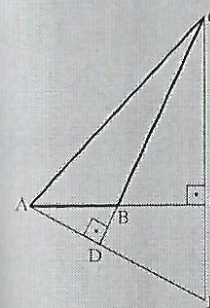
Como o ortocentro de um triângulo pode ser um ponto interno, externo ou sobre um lado do triângulo, vamos dividir a demonstração em 3 casos:

1) Triângulo Acutângulo:

No ΔACF temos que: $AF = AC.\cos A$
Analogamente: $FB = BC.\cos B$ $BD = AB.\cos A$
$DC = AC.\cos C$ $CE = BC.\cos C$ $EA = BA.\cos A$
Portanto:

$$\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA} = \frac{AC.\cos A}{BC.\cos B}.\frac{AB.\cos B}{AC.\cos C}.\frac{BC.\cos C}{BA.\cos A} = 1$$

Logo, pelo Teorema de Ceva, as alturas concorrem em um ponto H (ortocentro).

2) Triângulo Retângulo:

Neste caso as alturas relativas aos vértices B e C coincidem com os catetos AB e AC, fazendo com que o ortocentro seja o vértice do ângulo reto.

3) Triângulo Obtusângulo:

Relativamente ao triângulo ABC, tracemos as alturas relativas aos vértices A e C, que se encontram no ponto H.
Consideremos agora o ΔACH. Como $CD \perp AH$ e $AE \perp CH$, então B é encontro de duas alturas de ΔACH. Como o ΔACH é acutângulo, então suas três alturas são concorrentes, ou seja, B é o ortocentro de ΔACH, implicando que $BH \perp AC$. Desta forma a altura do ΔABC relativa ao vértice B também passa por H.

7.6.3) Comprimento da Altura

Pelo Teorema de Pitágoras:

i) $x^2 + (h_a)^2 = c^2$

ii) $(a-x)^2 + (h_a)^2 = b^2 \Rightarrow a^2 - 2ax + x^2 + (h_a)^2 = b^2 \Rightarrow$

$a^2 - 2ax + c^2 = b^2 \Rightarrow x = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$

Aplicando em i):

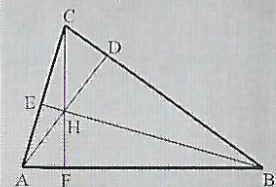
$$(h_a)^2 = c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2 = \left(c - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right) \Rightarrow$$

$$(h_a)^2 = \left(\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2a}\right) = \left(\frac{b^2-(a-c)^2}{2a}\right)\left(\frac{-b^2+(a+c)^2}{2a}\right) \Rightarrow$$

$$h_a = \frac{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)(a+c+b)}}{2a} \Rightarrow h_a = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}}{a}$$

Analogamente pode-se demonstrar que:

$$h_b = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}}{b} \qquad h_c = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}}{c}$$

7.6.4) Teorema: "Se H é o ortocentro de um triângulo acutângulo ABC, então AH = BC.cotg Â."

Demonstração:

ΔAHF: $AF = AH.\cos(90^\circ - B) \Rightarrow AF = AH.\text{sen}\,B$

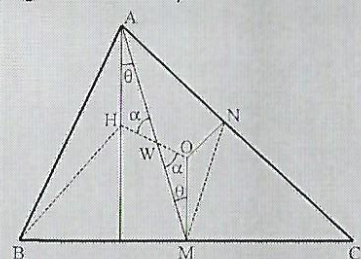
ΔACF: $AF = AC.\cos A \Rightarrow AC.\cos A = AH.\text{sen}\,B$

Lei dos Senos em ΔABC: $AC.\text{sen}\,A = BC.\text{sen}\,B$

Portanto: $BC\frac{\text{sen}\,B}{\text{sen}\,A}\cos A = AH.\text{sen}\,B \Rightarrow AH = BC.\text{ctg}\,A$

7.6.5) Reta de Euler: "Em um triângulo ABC o baricentro (G), o circuncentro (O) e o ortocentro (H) estão alinhados e pertencem a uma reta denominada reta de Euler. Além disso HG = 2GO."

Demonstração:

Inicialmente tracemos a altura relativa ao vértice A, a mediana relativa ao vértice A e a mediatriz do segmento BC. H representa o ortocentro e O o circuncentro do ΔABC.

Trace o segmento OH e seja W a interseção de OH com a mediana relativa ao vértice A.

Como H é o ortocentro do ΔABC então BH é a altura relativa ao vértice B, ou seja, $BH \perp AC$.

Como M e N são os pontos médios, respectivamente, dos lados BC e AC, então $MN \parallel AB$ e $AB = 2.MN$.

Observe agora os triângulos ΔAHB e ΔMON.

Note que: $AH \parallel OM$, $BH \parallel ON$ e $MN \parallel AB$.

Desde que dois triângulos que possuem todos os lados paralelos são semelhantes, então $\Delta AHB \sim \Delta MON$: $\frac{AH}{OM} = \frac{BH}{ON} = \frac{AB}{MN} = 2 \Rightarrow AH = 2.OM$

Repare agora nos triângulos ΔAHW e ΔMOW. Como $\angle HAW = \angle OMW = \theta$ e $\angle AWH = \angle MWO = \alpha$, então temos que $\Delta AHW \sim \Delta MOW$. Portanto:

$\frac{AW}{WM} = \frac{HW}{WO} = \frac{AH}{OM} = 2 \Rightarrow AW = 2.WM$ e $HW = 2.WO$

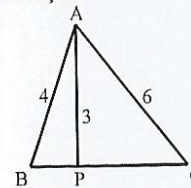
Uma vez que W é o ponto da mediana AM tal que AW = 2.WM então W é necessariamente o baricentro do triângulo ΔABC. Assim, W = G, fazendo com que O, G e H estejam alinhados.

Da expressão HW = 2.WO concluímos que HG = 2.GO

Exemplos:

1) (Colégio Naval-85/86) Dois lados de um triângulo medem 4 cm e 6 cm e a altura relativa ao terceiro lado mede 3 cm. O perímetro do círculo circunscrito ao triângulo mede

a) 4πcm b) 6πcm c) 8πcm d) 12πcm e) 16πcm

Solução:

Considere a figura ao lado onde b = 6 cm, c = 4 cm e ha = 3 cm.

Igualando duas expressões conhecidas para o cálculo da área de ΔABC:

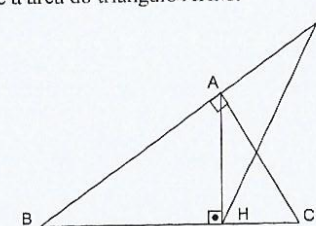
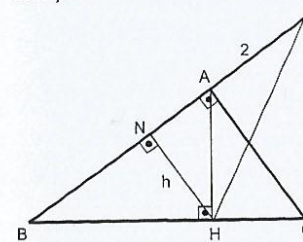
$\frac{a.h_a}{2} = \frac{a.b.c}{4.R} \Rightarrow R = \frac{b.c}{2.h_a} = \frac{6.4}{2.3} = 4$ cm.

O valor do perímetro é então: $P = 2\pi R = 2.\pi.4 = 8\pi$ cm

2) (Colégio Naval-95/96) No triângulo ABC, retângulo em A, da figura, AB = c, AC = b, AM = 2 e AH é a altura relativa ao lado BC. Qual é a área do triângulo AHM?

a) $\frac{bc}{b^2+c^2}$ b) $\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$

c) $\frac{bc^2}{b^2+c^2}$ d) $\frac{b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$

e) $\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$

Solução:

Pelas relações métricas em ΔABC:

$AH.a = b.c \Rightarrow AH = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$

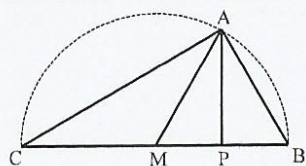
Como $\Delta AHN \sim \Delta CBA$: $\frac{AH}{\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = \frac{bc^2}{b^2+c^2}$.

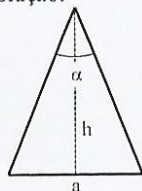
Portanto, a área de ΔAHM vale:

$S_{\Delta AHM} = \frac{AM.h}{2} \Rightarrow S_{\Delta AHM} = \frac{bc^2}{b^2+c^2}$.

3) (Escola Naval-98/99) O triângulo ABC é retângulo em A e o ângulo $\hat{C}$ mede 20°. O ângulo formado pela altura e a mediana relativa á hipotenusa é:

a) 10° b) 30° c) 40° d) 50° e) 60°

Solução:

Seja M o pé da mediana relativa a A e P o pé da altura relativa a A. Como ΔABC é retângulo em A então existe uma circunferência com diâmetro BC que circunscreve ΔABC. Como M é o ponto médio de BC, então M é o centro desta circunferência.
Como $\angle ACB$ é o ângulo inscrito correspondente ao ângulo central $\angle AMB$, temos que $\angle AMB = 2(\angle ACB) = 40°$.
Como ΔAMP é retângulo: $\angle MAP = 90° - \angle AMD = 50°$.

4) (ITA-84) Num triângulo isósceles, a razão entre a altura referente à base e esta é $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Sobre o ângulo α oposto à base, podemos afirmar que:
a) $\alpha = \pi/4$ b) $\alpha = \pi/2$ c) $\alpha = \pi/3$ d) $\alpha = \pi/6$ e) não temos dados suficientes para determiná-los
Solução:

Pelo enunciado temos que $\frac{h}{a} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Assim: $\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2h}{a} = 1+\sqrt{2}$.

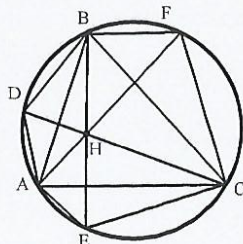
Como $\cot\alpha = \frac{\cot^2(\alpha/2)-1}{2.\cot(\alpha/2)} = \frac{(1+\sqrt{2})^2-1}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} = 1 \Rightarrow \alpha = \pi/4$

5) (IME-65) Calcule os lados de um triângulo conhecendo as alturas $h_a = 1/9$, $h_b = 1/7$ e $h_c = 1/4$.
Solução:
Sabemos que: $S = \frac{a.h_a}{2}$, $S = \frac{b.h_b}{2}$ e $S = \frac{c.h_c}{2} \Rightarrow a = \frac{9.S}{2}$, $b = \frac{7.S}{2}$ e $c = 2.S$.
Calculando a área de ΔABC através da equação de Heron:

i) $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\frac{9.S}{2}+\frac{7.S}{2}+2.S}{2} = 5.S$;

ii) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{5.S\left(5.S-\frac{9.S}{2}\right)\left(5.S-\frac{7.S}{2}\right)(5.S-2.S)} = \frac{3.\sqrt{5}.S^2}{2} \Rightarrow S = \frac{2.\sqrt{5}}{15}$.

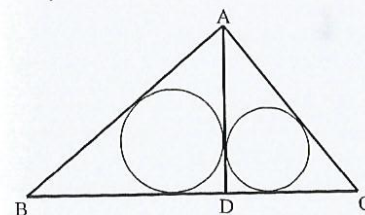
Assim: $a = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, $b = \frac{7\sqrt{5}}{15}$ e $c = \frac{4\sqrt{5}}{15}$.

6) (Colégio Naval-95/96) Considerando a figura abaixo, o triângulo **ABC** de lados **AB = 8, AC = 10** e **BC = 12** e seja **H** o seu ortocentro. As retas que passam por **A** e **H, B** e **H, C** e **H** intersectam o círculo circunscrito ao triângulo nos pontos **F, E** e **D**, respectivamente. A área do hexágono de vértice **A, D, B, F, C** e **E** é igual a:

a) $30\sqrt{7}$
b) $18\sqrt{7}$
c) 80
d) 70
e) 65

Solução:

Inicialmente podemos observar que, devido a delimitares o mesmo arco de circunferência, os ângulos inscritos $\angle BCF$ e $\angle BAF = 90° - B$ são iguais. Como $\angle HCB = 90° - B$ então $\angle BCF = \angle HCB$ (1). Analogamente temos que $\angle CBF = 90° - C = \angle HBC$ (2). De (1), (2) e do segmento BC comum, temos que $\Delta BCH \equiv \Delta BCF$. Analogamente, podemos demonstrar que $\Delta ACH \equiv \Delta ACE$ e $\Delta ABH \equiv \Delta ABD$. Desta forma, a área do hexágono ADBFCE é igual ao dobro da área do triângulo ABC. Portanto:

$p_{\Delta ABC} = \frac{8+10+12}{2} = 15 \Rightarrow S_{ADBFCE} = 2\sqrt{15(15-8)(15-10)(15-12)} = 30\sqrt{7}$.

7) Num ΔABC, retângulo em A, traça-se a altura AD. Demonstrar que, se r, r_1, r_2 são os raios das circunferências inscritas, respectivamente, nos triângulos ΔABC, ΔABD e ΔACD, teremos: $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.
Solução:

Inicialmente vamos demonstrar que se dois triângulos são semelhantes, então a razão entre os inraios é igual à razão de semelhança. Sejam x, y, z os lados de ΔYYZ e u, v, w os lados de ΔUVW. Se $\Delta XYZ \sim \Delta UVW \Rightarrow \frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w} = k$.

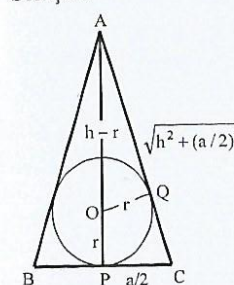
Assim: $k^2 = \frac{S_{XYZ}}{S_{UVW}} = \frac{p_{XYZ}.r_{XYZ}}{p_{UVW}.r_{uvw}} = \frac{(x+y+z).r_{XYZ}}{(u+v+w).r_{uvw}} \Rightarrow$

$k^2 = \frac{(u.k+v.k+w.k).r_{XYZ}}{(u+v+w).r_{UVW}} = \frac{k.r_{XYZ}}{r_{UVW}} \Rightarrow \frac{r_{XYZ}}{r_{UVW}} = k$.

Repare agora que $\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC \Rightarrow BC : BA : AC = r : r_1 : r_2 \Rightarrow a : c : b = r : r_1 : r_2$.

Pelo Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Rightarrow 1 = \frac{r_2^2}{r^2} + \frac{r_1^2}{r^2} \Rightarrow r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

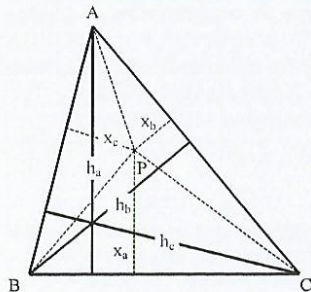
8) Em um triângulo isósceles ABC são dadas a altura h, a base a e o raio r do circulo inscrito. Pede-se demonstrar que: $h = \frac{2ra^2}{a^2-4r^2}$.

Solução:

Como $\Delta APC \sim \Delta AQO \Rightarrow \frac{AC}{PC} = \frac{AO}{QO} \Rightarrow \frac{\sqrt{h^2+(a/2)^2}}{a/2} = \frac{h-r}{r} \Rightarrow$

$\frac{h^2+\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2}{4}} = \frac{h^2-2hr+r^2}{r^2} \Rightarrow \frac{4h^2}{a^2}+1 = \frac{h^2}{r^2} - \frac{2h}{r} + 1 \Rightarrow \frac{4h}{a^2} = \frac{h}{r^2} - \frac{2}{r} \Rightarrow$

$h\left(\frac{1}{r^2} - \frac{4}{a^2}\right) = \frac{2}{r} \Rightarrow h = \frac{2ra^2}{a^2-4r^2}$

9) (OBM-84 banco) Seja P um ponto interior ao triângulo ABC. Considere as perpendiculares x_a, x_b, x_c baixadas de P sobre os lados a, b, c respectivamente. Sejam h_a, h_b, h_c as alturas relativas aos lados a, b, c, respectivamente. Prove que $\frac{x_a}{h_a} + \frac{x_b}{h_b} + \frac{x_c}{h_c} = 1$.

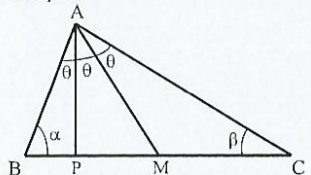
Solução:

A área de ΔABC pode ser calculada, em função de h_a, h_b e h_c, de três maneiras: $S_{ABC} = \dfrac{a.h_a}{2} = \dfrac{b.h_b}{2} = \dfrac{c.h_c}{2}$.

Pode-se também calcular a área de ΔABC dividindo sua superfície em três triângulos menores (ΔPBC, ΔPAC e ΔPAB) e somando suas áreas:

$$S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PAC} + S_{PAB} \Rightarrow \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{PAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{PAB}}{S_{ABC}} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{a.x_a}{a.h_a} + \frac{b.x_b}{b.h_b} + \frac{c.x_c}{c.h_c} = 1 \Rightarrow \frac{x_a}{h_a} + \frac{x_b}{h_b} + \frac{x_c}{h_c} = 1$$

10) (OBM-2001) No triângulo *ABC*, a mediana e a altura relativas ao vértice *A* dividem o ângulo $B\hat{A}C$ em três ângulos de mesma medida. Determine as medidas dos ângulos do triângulo *ABC*.

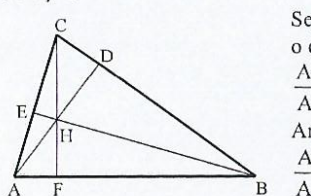
Solução:

Inicialmente repare que $\alpha = 90° - \theta$. Note que em ΔAPM temos que $\angle AMP = 90° - \theta$, ou seja, $\angle AMP = \alpha \Rightarrow \Delta ABM$ é isósceles $\Rightarrow$ AP é mediatriz de BM $\Rightarrow BP = PM = MC/2$.

Em ΔAPM temos que AM é bissetriz de $\angle PAC$. Aplicando o Teorema da bissetriz: $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{PM}{MC} = \dfrac{1}{2}$

Por outro lado, em ΔAPM temos que: $\cos(2\theta) = \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2\theta = 60° \Rightarrow \theta = 30° \Rightarrow$

$\angle A = 90°$ $\angle B = 60°$ $\angle C = 30°$

11) (Olimpíada da Hungria-97) Sejam a, b e c os lados, m_a, m_b, m_c os comprimentos das alturas e d_a, d_b, d_c as distâncias dos vértices ao ortocentro em um triângulo ABC acutângulo. Prove que $m_a d_a + m_b d_b + m_c d_c = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$.

Solução:

Sejam D, E, F os pés das alturas de A, B, C respectivamente e seja H o ortocentro de ΔABC. Como $\Delta ACD \sim \Delta AHE$:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow m_a d_a = AE.b$$

Analogamente temos que $\Delta ABD \sim \Delta AHF$:

$$\frac{AB}{AH} = \frac{AD}{AF} \Rightarrow m_a d_a = AF.c$$

Somando estas duas expressões de $m_a d_a$ obtemos: $m_a d_a = \dfrac{AE.b + AF.c}{2}$.

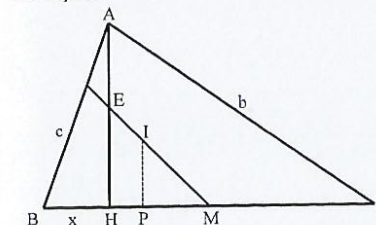
Analogamente podemos demonstrar que: $m_b d_b = \dfrac{BF.c + BD.a}{2}$ e $m_c d_c = \dfrac{CD.a + CE.b}{2}$.

Portanto:

$$m_a d_a + m_b d_b + m_c d_c = \frac{(AE.b + AF.c + BF.c + BD.a + CD.a + CE.b)}{2} \Rightarrow$$

$$m_a d_a + m_b d_b + m_c d_c = \frac{(BD + CD)a + (CE + AE)b + (AF + BF)c)}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

12) (Olimpíada da Rússia-70) ABC é um triângulo com incentro I. M é o ponto médio de BC. IM corta a altura AH em E. Mostre que AE = r, onde r é o raio da circunferência inscrita em ABC.

Solução:

Aplicando o Teorema de Pitágoras em ΔABH e ΔACH:

i) $x^2 + (h_a)^2 = c^2$

ii) $(a - x)^2 + (h_a)^2 = b^2 \Rightarrow a^2 - 2ax + x^2 + (h_a)^2 = b^2 \Rightarrow$

$a^2 - 2ax + c^2 = b^2 \Rightarrow x = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$

Seja P o ponto sobre BC de modo que $IP \perp BC$. Como I é o incentro de ΔABC então $IP = r$ e $BP = p - b$.

Igualando duas fórmulas para o cálculo da área de ΔABC:

$$\frac{a.h_a}{2} = p.r = \frac{(a + b + c).r}{2} \Rightarrow h_a = \frac{(a + b + c)r}{a}.$$

Note que $\Delta EHM \sim \Delta IPM \Rightarrow \dfrac{EH}{IP} = \dfrac{HM}{PM} \Rightarrow \dfrac{h_a - AE}{r} = \dfrac{\frac{a}{2} - x}{\frac{a}{2} - (p - b)} \Rightarrow$

$$\frac{(a + b + c)r}{a} - AE = r\left[\frac{\frac{a}{2} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}}{\frac{a}{2} - \frac{a}{2} - \frac{c}{2} + \frac{b}{2}}\right] = r\left[\frac{a^2 - a^2 - c^2 + b^2}{a(b - c)}\right] = r\left[\frac{b^2 - c^2}{a(b - c)}\right] = \frac{r(b + c)}{a} \Rightarrow$$

$$AE = \frac{r(a + b + c)}{a} - \frac{r(b + c)}{a} = \frac{r(a + b + c - b - c)}{a} = r.$$

13) Considere que h_a e h_b são as alturas relativas aos vértices A e B, respectivamente, de um triângulo ΔABC. Determine entre que valores pode variar o comprimento da altura relativa ao vértice C.

Solução:

Inicialmente lembremos que $a = \dfrac{2S}{h_a}$, $b = \dfrac{2S}{h_b}$ e $c = \dfrac{2S}{h_c}$.

Pelas condições da existência de um triângulo:

i) $a + b > c \Rightarrow \dfrac{2S}{h_a} + \dfrac{2S}{h_b} > \dfrac{2S}{h_c} \Rightarrow h_c > \dfrac{h_a.h_b}{h_a + h_b}$.

ii) $a + c > b \Rightarrow \dfrac{2S}{h_a} + \dfrac{2S}{h_c} > \dfrac{2S}{h_b} \Rightarrow h_c < \dfrac{h_a.h_b}{h_a - h_b}$.

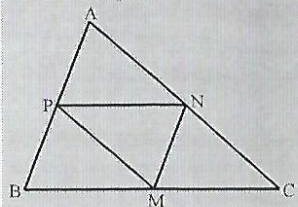
iii) $b + c > a \Rightarrow \dfrac{2S}{h_b} + \dfrac{2S}{h_c} > \dfrac{2S}{h_a} \Rightarrow h_c < \dfrac{h_a.h_b}{h_b - h_a}$.

Como não sabemos quem é maior entre h_a e h_b, então o intervalo de variação de h_c é: $\dfrac{h_a.h_b}{h_a + h_b} < h_c < \left|\dfrac{h_a.h_b}{h_a - h_b}\right|$.

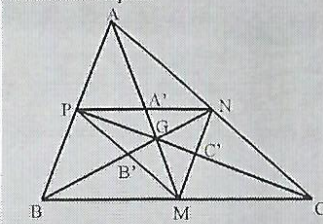
7.7) TRIÂNGULOS PEDAIS: São os triângulos formados pelos pés das cevianas (cada uma traçada em relação a um vértice) de um triângulo ABC.

7.7.1) Triângulo Medial: É o triângulo formado pelos pés das medianas de um triângulo ABC.

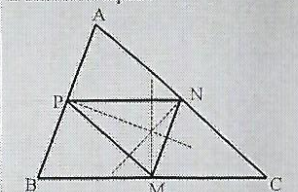
7.7.1.1) Teorema: "O triângulo medial de um triângulo ABC é semelhante a ABC e sua área é igual a 1/4 da área de ABC."

Demonstração:

Sejam M, N e O os pontos médios dos lados de um triângulo ABC.
Pela construção temos MN ∥ AB ⇒ ΔCMN ~ ΔCBA ⇒ AB = 2.MN
Analogamente MP ∥ AC, AC = 2.MN, NP ∥ BC e BC = 2.NP
Portanto temos que: $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} = 2$ ⇒ ΔMNP ~ ΔABC
Como a razão de semelhança é 2, então $S_{ABC} = 4.S_{MNP}$

7.7.1.2) Teorema: "Um triângulo ABC e seu triângulo medial possuem o mesmo baricentro."

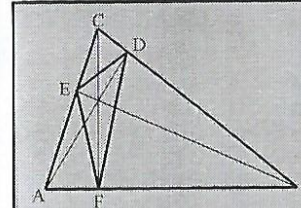
Demonstração:

Sejam AM, BN e CP as medianas de ABC e G seu baricentro.
Como NC' ∥ AP, CN ∥ AC e CC' ∥ CP então ΔCNC' ~ ΔCAP ⇒ $\frac{NC'}{AP} = \frac{CN}{CA} = \frac{1}{2}$ ⇒ AP = MN = 2.NC' ⇒ C' é médio de MN.
Analogamente B' é médio de MP e A' é médio de NP.
Desta forma, os segmentos MA', NB' e PC' são as medianas de MNP e estão sobre as medianas de ABC, fazendo com que MA', NB' e PC' se cruzem também em G.

7.7.1.3) Teorema: "O circuncentro de um triângulo ΔABC coincide com o ortocentro de seu triângulo medial."

Demonstração:

Sejam M, N e P os pontos médios de ΔABC.
Como PN ∥ BC então a mediatriz de BC é perpendicular a PN, ou seja, é a altura relativa a PN do triângulo medial. Da mesma forma, as mediatrizes de AB e AC são as outras duas alturas de ΔMNP.

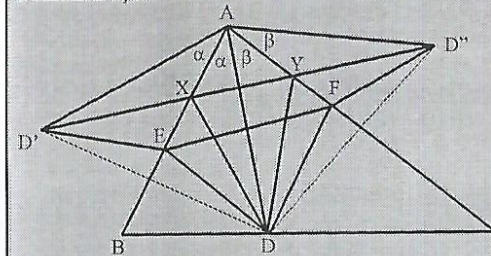
7.7.2) Triângulo Órtico: É o triângulo formado pelos pés das alturas de um triângulo acutângulo ABC.

7.7.2.1) Teorema: "Se ΔDEF é o triângulo órtico de um triângulo ΔABC (D ∈ BC, E ∈ AC e F ∈ AB), então ΔCDE, ΔBDF e ΔAEF são semelhantes a ΔABC."

Demonstração:

Como ∠ADB = 90° e ∠AEB = 90° então AEDB é inscritível ⇒ ∠BDE = 180° – ∠BAC ⇒ ∠CDE = ∠BAC
Como ∠ECD = ∠ACD então ∠CED = ∠ABC ⇒ ΔCDE ~ ΔABC.
Analogamente ∠AFE = ∠BFD = ∠ACB, ∠AEF = ∠ABC e ∠BDF = ∠BAC, implicando que ΔAEF e ∠BDF são semelhantes a ΔABC.

7.7.2.2) Teorema: "As alturas de um triângulo acutângulo ΔABC são as bissetrizes de seu triângulo órtico."

Demonstração:
Note que ECDH é inscritível ⇒ ∠EDH = ∠ECH = 90° – ∠BAC.
Como DBFH também é inscritível ⇒ ∠FDH = ∠FBH = 90° – ∠BAC ⇒ ∠EDH = ∠FDH ⇒ altura AD é a bissetriz do ângulo ∠EDF.
Analogamente pode-se demonstrar que ∠DEH = ∠FEH = 90° – B e ∠EFH = ∠DFH = 90° – C.

7.7.2.3) Teorema: "Em um triângulo acutângulo ABC, tome os pontos D ∈ BC, E ∈ AC e F ∈ AB. Dentre todos os triângulos DEF possíveis, o triângulo órtico de ABC é o que possui perímetro mínimo."

Demonstração:
Para cada ponto D ∈ BC vamos determinar as posições de E e F para que o perímetro de ΔDEF seja mínimo.
Tracemos AD e seja α = ∠BAD e β = ∠DAC.
Agora trace o segmento AD' de modo que ∠BAD' = α e AD' = AD. Analogamente, trace AD" de modo que ∠CAD" = β e AD" = AD.
Finalmente trace D'D", chamando de X a interseção de D'D" com AB e Y a interseção de D'D" com AC.
Perceba agora que ΔAD'X ≡ ΔADX, ou seja, XD = XD'. Analogamente, ΔAD"Y ≡ ΔADY ⇒ YD = YD".
Note agora que ΔADD' é isósceles e AB é a bissetriz relativa à base DD', ou seja, AB ⊥ DD'.
Analogamente temos que AC ⊥ DD". Assim, ΔEDD' e ΔFDD" também são isósceles.
Como XD = XD' e YD = YD" então o perímetro de ΔDXY é igual ao comprimento do segmento D'D".
Como a menor distância entre dois pontos é uma linha reta, então $2p_{ADEF}$ = DE + EF + FD = ED' + EF + FD" > D'D", ou seja, o perímetro de ΔDEF vai ser mínimo quando E ≡ X, F ≡ Y e D'D" for mínimo.
Na verdade, repare que, para todas as construções possíveis, o ângulo ∠D'AD" = 2(α + b) = 2A é constante quando variamos o ponto D através do segmento BC.
Por outro lado, como ΔAD'D" é isósceles, temos que D'D" = 2AD/tg A. Como A é constante, então D'D" é mínimo quando AD é mínimo. Evidentemente, AD é mínimo quando D é o pé da altura relativa ao vértice A.
Fazendo o mesmo raciocínio fixando E e F, encontramos que estes também devem ser pés das alturas de ΔABC.
Portanto, ΔDEF possui perímetro mínimo quando for o triângulo órtico de ΔABC.

Exercícios

Teoremas de Ceva e Menelaus

1) Prove que os três pares de tangentes externas comuns a três círculos, tomadas duas a duas, cortam-se em três pontos colineares.

2) Os lados AB, BC, CD e DA de um quadrilátero são cortados por uma reta nos pontos K, L, M e N, respectivamente.

Prove que $\frac{BL}{LC}\cdot\frac{AK}{KB}\cdot\frac{DN}{NA}\cdot\frac{CM}{MD}=1$.

3) No quadrilátero $ABCD$, as retas AB e CD se cortam em P, enquanto as retas AD e BC se cortam em Q. As diagonais AC e BD cortam PQ em X e Y. Prove que PX/XQ = PY/YQ.

4) Um círculo passando pelos vértices B e C de um ΔABC corta AB em P e AC, em R. Se PR corta BC em Q, prove que $\frac{QC}{QB}=\frac{RC\times AC}{PB\times AB}$.

5) No triângulo retângulo ABC, P e Q estão sobre BC e AC, respectivamente, tais que $CP = CQ = 2$. Pelo ponto de interseção R de AP e BQ, uma reta é desenhada passando também por C e cortando AB em S. O prolongamento de PQ corta AB em T. Se a hipotenusa $AB = 10$ e $AC = 8$, encontre TS.

6) No triângulo ABC, os pontos L, M, N estão sobre BC, AC, AB, respectivamente, e AL, BM, CN são concorrentes.

a) Encontre o valor de $\frac{PL}{AL}+\frac{PM}{BM}+\frac{PN}{CN}$.

b) Encontre o valor de $\frac{AP}{AL}+\frac{BP}{BM}+\frac{CP}{CN}$.

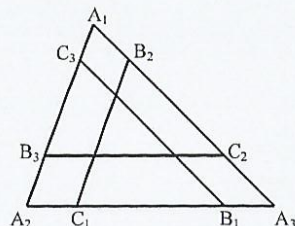
7) Três circunferências, de centros C_1, C_2 e C_3, são tangentes externamente duas a duas. Suponha que M é o ponto de tangências entre as circunferências de centros C_1 e C_2, N é o ponto de tangências entre as circunferências de centros C_1 e C_3 e P é o ponto de tangências entre as circunferências de centros C_2 e C_3. Demonstre que $\overline{C_1P}$, $\overline{C_2N}$ e $\overline{C_3M}$ são concorrentes.

8) Prove que uma reta desenhada passando pelo baricentro G de um ΔABC corta os lados AB e AC nos pontos M e N, respectivamente, de tal forma que $AM\times NC + AN\times MB = AM\times NA$.

9) Um círculo é tangente ao lado BC do ΔABC em M, seu ponto médio, e corta AB e AC nos pontos R, R' e S, S', respectivamente. Se RS e $R'S'$ são prolongados até cortar BC nos pontos P e P' respectivamente, prove que $BP\times BP' = CP\times CP'$.

10) Em um triângulo ABC, seja D um ponto sobre a reta BC e E um ponto sobre a reta CA, para os quais BD = CE = AB. Seja ℓ e reta que é paralela a AB passando por D. Se $M = \ell \cap BE$ e $F = CM \cap AB$, prove que $(BA)^3 = AE.BF.CD$.

11) Em um triângulo ABC, as cevianas AD, BE e CF concorrem em P. Mostre que $\frac{S_{\Delta DEF}}{2.S_{\Delta ABC}}=\frac{PD}{PA}.\frac{PE}{PB}.\frac{PF}{PC}$.

12) Na figura, $B_2C_1 \parallel A_1A_2$, $B_3C_2 \parallel A_2A_3$ e $B_1C_3 \parallel A_3A_1$. Prove que B_2C_1, B_3C_2 e B_1C_3 são concorrentes se e somente se $\frac{A_1C_3}{C_3B_3}.\frac{A_2C_1}{C_1B_1}.\frac{A_3C_2}{C_2B_2}=1$.

13) Prove que as bissetrizes internas de dois ângulos de um triângulo não isósceles e a bissetriz externa do terceiro ângulo cortam os lados opostos em 3 pontos colineares.

14) Prove que as bissetrizes externas de um triângulo não isósceles cortam os lados opostos em três pontos colineares.

15) No ΔABC, P, Q, R são os pontos médios dos lados AB, BC, CA. As retas AN, BL e CM são concorrentes cortando os lados em N, L e M, respectivamente. Se PL corta BC em J, MQ corta AC em I, e RN corta AB em H, prove que H, I e J são colineares.

16) ABC corta um círculo nos pontos E, E', D, D', F, F'. Prove que se AD, BF e CE são concorrentes, então AD', BF' e CE' também são concorrentes.

17) Sejam A', B' e C' três pontos situados nos lados BC, CA e AB de um triângulo, e A", B" e C" seus conjugados harmônicos em relação às extremidades dos lados correspondentes. Prove que se A', B' e C' estiverem em linha reta, então as retas AA", BB" e CC" serão concorrentes.

18) Uma circunferência corta os lados BC, CA e AB de um triângulo ABC, nos pontos A' e A", B' e B", C' e C", respectivamente. Demonstrar que se AA', BB' e CC' forem concorrentes, também serão AA", BB" e CC".

19) Sejam ABC um triângulo e $A_1B_1C_1$ o triângulo obtido traçando, pelos vértices do primeiro, paralelas aos lados opostos. Estando A', B' e C' situados, respectivamente, em BC, CA e AB, demonstre que se AA', BB' e CC' forem concorrentes, então A_1A', B_1B' e C_1C' serão concorrentes.

20) Sejam um triângulo ABC e um ponto P do seu plano. As perpendiculares a PA, PB e PC, traçadas de P, interceptam os lados BC, CA e AB em três pontos, A', B' e C'. Prove que estes pontos estão em linha reta.

21) Em um triângulo ABC, AB = 15, BC = 13 e AC = 12. Prove que, neste triângulo, a bissetriz interna de Â, a mediana relativa a B e a altura relativa a C são concorrentes.

22) Em um quadrilátero ACGE, H é a interseção de AG e CE, as retas AE e CG encontram-se em I e as retas AC e EG encontram-se em D. Seja B a interseção das retas IH e AC. Prove que AB/BC = AD/DC.

23) Pontos D, E e F são selecionados exteriormente a um triângulo ABC tal que ΔDBC, ΔEAC e ΔFAB são todos isósceles. Sabe-se também que os lados congruentes intersectam-se em D, E e F e que ∠D = ∠E = ∠F. Prove que as retas AD, BE e CF são concorrentes.

24) Uma circunferência S é tangente às circunferências S_1 e S_2 nos pontos A_1 e A_2, respectivamente. Prove que a reta A_1A_2 passa pelo ponto de interseção das tangentes comuns externas ou das tangentes comuns internas às circunferências S_1 e S_2.

25) No triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em C, traçamos a altura CK. No triângulo ACK traçamos a bissetriz interna CE. A reta que passa pelo ponto B e é paralela a CE encontra CK no ponto F. Prove que e reta EF encontra o segmento AC em seu ponto médio.

26) As retas AP, BP e CP encontram os lados do triângulo (ou seus prolongamentos) nos pontos A_1, B_1 e C_1, respectivamente. Prove que:

a) as retas que passam pelos pontos médios dos lados BC, CA e AB e são paralelas às retas AP, BP e CP, respectivamente, intersectam-se em um mesmo ponto;

b) As retas que conectam os pontos médios dos lados BC, CA e AB com os pontos médios dos segmentos AA_1, BB_1 e CC_1, respectivamente, intersectam-se em um mesmo ponto.

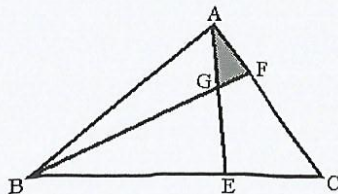
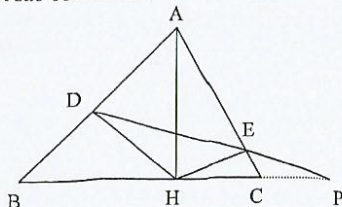
27) Sejam ABC um triângulo e D, E, F os pontos onde o incírculo tangencia os lados BC, CA e AB, respectivamente. A paralela a AB passando por E encontra DF em Q e a paralela a AB passando por D encontra EF em T. Prove que as retas CF, DE e QT são concorrentes.

28) Em um quadrilátero circunscritível ABCD, os pontos de contato com o circuncírculo determinam um segundo quadrilátero PQRS. Prove que um par de lados opostos de PQRS e uma diagonal de ABCD são concorrentes.

29) Seja ABC um triângulo com ∠BAC = 40° e ∠ABC = 60°. Seja D e E pontos sobre os lados AC e AB, respectivamente, tais que ∠CBD = 40° e ∠BCE = 70°. BD e CE intersectam-se em F. Prove que BD, CE e a altura relativa ao lado BC são concorrentes.

30) (Covest-99) Um triângulo ABC tem lados medindo AB = 12, BC = 15 e AC = 18. Sejam M, N nos lados AB, AC respectivamente, tais que AM = 3, NA = 12. Seja P a interseção da reta por M, N com reta por B, C. Determine BP.

31) (Colégio Naval-82/83) Na figura: $\overline{AC} = 3\overline{AF}$ e $\overline{BC} = 3\overline{CE}$, sendo S a área da triângulo ABC, a área do triângulo AGF é:

a) S/3
b) S/7
c) S/9
d) S/21
e) S/18

32) (IME-91) Num triângulo ABC traçamos a altura $\overline{AH}$ e do pé H dessa altura construímos as perpendiculares $\overline{HD}$, $\overline{HE}$ sobre os lados AB e AC; seja P o ponto de interseção de DE com BC. Construindo as alturas relativas aos vértices B e C determina-se também, de modo análogo Q e R sobre os lados CA, AB. Demonstre que os pontos P, Q, R são colineares.

33) (Argentina-97) Sejam *ABC* um triângulo, *E* o ponto médio de *AC* e *O* o ponto médio de *BE*. A reta *AO* intersecta o lado *BC* em *D*. Se *AO* = 12, calcular *OD*.

34) (Espanha-85) L e M são pontos nos lados AB e AC, respectivamente, de um triângulo ABC tal que AL = 2AB/5 e AM = 3AC/4. Se BM e CL cortam-se em P, AP e BC intersectam-se em N, determine BN/BC.

35) (Japão-91) Sejam P, Q e R três pontos nos lados BC, CA e AB de um triângulo ABC respectivamente, tais que, BP : PC = CQ : QA = AR : RB = t : 1 – t. para algum número real t. Mostre que os três segmentos de reta AP, BQ e CR vão formar um triângulo, digamos Δ. Determine a razão entre as áreas do triângulo ABC e a área de Δ em função de t.

36) (Eslovênia-94) Seja um ponto D na hipotenusa de um triângulo retângulo ABC tal que |AB| = |CD|. Prove que a bissetriz do ângulo ∠A, a mediana traçada a partir de B e a altura a partir de D do triângulo ABD possuem um ponto em comum.

37) (Seletiva da Turquia IMO-96) Em um paralelogramo ABCD, com $\hat{A} < 90°$, a circunferência com diâmetro AC intersecta as retas CB e CD (além do ponto C) em E e F, respectivamente, e a tangente à circunferência em A intersecta a reta BD em P. Mostre que os pontos P, F e E são colineares.

38) (Irlanda-99) Sejam D, E e F pontos sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente, do triângulo acutângulo ABC, de modo que AD é a altura relativa ao vértice A, BE é a bissetriz interna relativa ao vértice B e CF é a mediana relativa ao vértice C. Prove que AD, BE e CF são concorrentes se e somente se $a^2(a - c) = (b^2 - c^2)(a + c)$, onde a = BC, b = CA e c = AB.

39) (OBM-98) No triângulo ABC, D é o ponto médio de AB e E o ponto do lado BC tal que BE = 2 · EC. Dado que os ângulos $A\hat{D}C$ e $B\hat{A}E$ são iguais, encontre o ângulo $B\hat{A}C$.

40) (Hungria-Israel-97) Os três quadrados $ACC_1A"$, $ABB_1'A'$, BCDE são construídos externamente aos lados do triângulo ABC. Seja P o centro de BCDE. Prove que s retas A'C, A"B e PA são concorrentes.

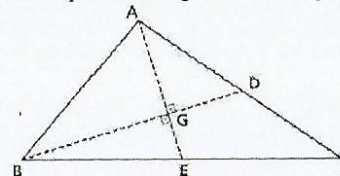
41) (Hungria-Israel-99) Seja P_1 um ponto no interior do triângulo ΔABC. Prove que as retas obtidas por reflexão das bissetrizes internas de ∠A, ∠B e ∠C sobre as retas P_1A, P_1B e P_1C, respectivamente, são concorrentes.

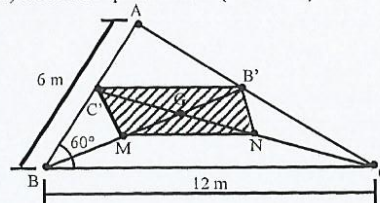
42) (Irã-98) Seja ABC um triângulo. Prolonguemos o lado BC, a partir de C, até um ponto D tal que CD = AC. Seja P o segundo ponto de interseção do circuncírculo de ΔACD com o círculo de diâmetro BC. Considere que BP e AC encontram-se em E e que CP e AB encontram-se em F. Prove que D, E e F são colineares.

Mediana e Baricentro

43) (Colégio Naval-96/97) Num triângulo ABC, retângulo em A, os lados AB e AC valem, respectivamente c e b. Seja o ponto G o baricentro do triângulo ABC, a área do triângulo AGC é:
a) bc/2 b) bc/3 c) bc/4 d) bc/6 e) bc/9

44) (UFC-98) Os lados de um triângulo medem 7 cm, 9 cm e 14 cm. Determine, em centímetros, a medida da mediana relativa ao lado maior.

45) (UERJ-2004) No triângulo ABC abaixo, os lados BC, AC e AB medem, respectivamente, a, b e c. As medianas AE e BD relativas aos lados BC e AC interceptam-se ortogonalmente no ponto G.

Conhecidos a e b, determine:
a) o valor de c em função de a e b;
b) a razão entre as áreas dos triângulos ADG e BEG.

46) (MAUÁ-LINS-81) No **ΔABC**, **G** é o ponto de intersecção das medianas **BB'** e **CC'**; **M** e **N** são os pontos médios **BG** e **CG**, respectivamente. Sendo **BC = 12m**, **AB = 6m** e **$A\hat{B}C$ = 60°**, determinar:
1) a área do **ΔABC**;
2) a área do quadrilátero **(MNB'C')**.

47) (Escola Naval-97/98) Considere o triângulo ABC de área S, baricentro G e medianas CM e BN. A área do quadrilátero AMGN é igual a:
a) S/2 b) 2S/3 c) S/3 d) S/4 e) 3S/4

48) (ITA-88) Num triângulo ABC, BC = 4 cm, o ângulo C mede 30° e a projeção do lado AB sobre BC mede 2,5 cm. O comprimento da mediana que sai do vértice A mede:
a) 1 cm b) $\sqrt{2}$ cm c) 0,9 cm d) $\sqrt{3}$ cm e) 2 cm

49) (IME-69/70) Calcule a área de um triângulo obliquângulo, de medianas m_A = 9 cm, m_B = 6 cm e m_C = 5 cm.

50) (IME-79/80) Seja ABC um triângulo no qual se supõe que a mediana AM é tal que o triângulo ABM é semelhante ao triângulo ABC.
a) Calcule a razão de semelhança, e determine o lugar geométrico do vértice B supondo A e C fixos.
b) Mostre que o círculo que passa pelos pontos A, C e M tangencia a reta AB.

51) (IME-85/86) Demonstre que a diferença entre os quadrados de dois lados de um triângulo é igual ao dobro do produto do terceiro lado pela projeção, sobre ele, da mediana correspondente.

52) (IME-88/89) No triângulo ABC, onde AB = 2, BC = 4 e AC = 3, AD é a mediana relativa ao lado BC. Por um ponto M qualquer sobre BD, traça-se uma paralela a AD, que intercepta o lado AB em N e o prolongamento de AC em P. Calcule MN + MP.

53) Em um triângulo retângulo, as medianas relativas aos ângulos agudos possuem comprimentos $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{17}$. Qual o valor do comprimento da hipotenusa?
a) $\sqrt{7}$ b) 5 c) $5\sqrt{3}$ d) 6 e) $2\sqrt{5}$

54) Num triângulo ABC a mediana traçada do vértice A divide o ângulo $\hat{A}$ em $\hat{A}_1$ e $\hat{A}_2$, com $\hat{A}_1$ do lado AB. Sendo AB = c, AC = b e BC = a, determine o valor de $\frac{\text{sen}\hat{A}_1}{\text{sen}\hat{A}_2}$.

a) $\frac{a}{c}$ b) $\frac{a+c}{b}$ c) $\frac{b}{a+c}$ d) $\frac{b^2+c^2}{a^2}$ e) $\frac{b}{c}$

55) Prove que uma reta desenhada passando pelo baricentro *G* de um *ΔABC* corta os lados *AB* e *AC* nos pontos *M* e *N*, respectivamente, de tal forma que *AM×NC* +*AN×MB* = *AM×NA*.

56) Os lados do ΔABC verificam a relação $b^2 + c^2 = 2a^2$. Calcular as medianas do ΔABC. Mostre também que o triângulo cujos lados sejam respectivamente iguais a essas medianas será semelhante ao ΔABC.

57) Seja ABC um triângulo de lados a, b e c e medianas m_a, m_b e m_c. Prove que:
a) $16(m_a^4 + m_b^4 + m_c^4) = 9(a^4 + b^4 + c^4)$;
b) $16(m_a^2m_b^2 + m_b^2m_c^2 + m_a^2m_c^2) = 9(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$.

58) Determinar uma relação entre as cevianas **x** e **y** de um triângulo de hipotenusa igual a 9, sabendo-se que os pés das cevianas dividem a hipotenusa em três partes iguais.

59) Designa-se por G o baricentro e por m_a a mediana relativa ao lado a de um triângulo ABC. Seja A' o segundo ponto de encontro de m_a com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Demonstre que $3a^2 + 4m_a^2 = 12m_a.GA'$.

60) Prove que se duas medianas de um triângulo são perpendiculares, então a terceira mediana é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são os outros dois lados do triângulo.

61) Seja M o ponto médio do lado BC de um triângulo ΔABC. Mostre que, se AM/BC = 3/2, então as medianas de M e C são perpendiculares.

62) Seja $A_1A_2A_3$ um triângulo e M um ponto em seu interior. A retas MA_1, MA_2, MA_3 intersectam os lados opostos nos pontos B_1, B_2, B_3, respectivamente. Mostre que se as áreas dos triângulos A_2B_1M, A_3B_2M, e A_1B_3M são iguais, então M é o baricentro do triângulo $A_1A_2A_3$.

63) Em um triângulo, os comprimentos das 3 medianas são 9, 12 e 15. Determine o comprimento do lado sobre o qual traça-se a maior mediana.

64) Em um triângulo ABC, ∠ACB = 135°, CA = 6 e BC $=\sqrt{2}$. Se M é o ponto médio do lado AB, determine o comprimento de CM.

65) (Espanha-94) Os quadrados dos lados de um triângulo ABC são proporcionais aos números 1, 2, 3. a) Mostre que os ângulos formados pelas medianas de ABC são iguais aos ângulos de ABC. b) Mostre que o triângulo cujos lados são as medianas de ABC é semelhante a ABC.

66) (Seletiva Brasileira para a XIV Olimpíada do Cone Sul) Sobre os lados AB, BC e DC, de um losango ABCD, marcam-se, respectivamente, os pontos M, N e P, de modo que o baricentro do triângulo MNP esteja sobre a reta AC. Demonstre que AM + DP = BN.

67) (Seletiva Brasileira para a XI Olimpíada do Cone Sul) O ângulo entre o lado AC do triângulo ABC e a mediana relativa ao vértice A é igual a 30°. Esta também é a medida do ângulo entre o lado BC e a mediana relativa ao vértice B. Prove que o triângulo ABC é equilátero.

68) (Argentina-96) No triângulo retângulo *ABC*, *B* = 90°, *AB* = 3, *BC* = 4, *AC* = 5. Seja *G* o baricentro do triângulo e sejam *A'*, *B'*, *C'* pontos nos lados *BC*, *AC*, *AB* respectivamente, tais que *GA'* é perpendicular a *BC*, *GB'* é perpendicular a *AC* e *GC'* a *AB*. Determinar a área de *A'B'C'*.

69) (Argentina-97) Sejam *ABC* um triângulo ($A >$ 90°) e *M* o ponto médio do lado *BC*. Se $\angle BAM =$ 90°, $AB = 35$ e $AC = 77$, calcular *BC*.

70) (Cabri-97) Dado um triângulo ABC, marcam-se os pontos médios das medianas. Provar que o triângulo formado é semelhante a ABC e achar a razão de semelhança.

71) (Cabri-99) Em um triângulo ABC, D é o ponto médio de AB e E é o ponto médio de AC. As retas BE e CD se cortam no ponto F. Se a área do triângulo ADE é de 7 cm², quanto vale a diferença entre a área do triângulo BCF e a área do triângulo DEF?

72) (Cabri-2001) Seja *ABC* um triângulo isósceles, de base *AB* = 10 cm. Sejam *M* e *N* os pontos médios dos lados *AC* e *BC* respectivamente. Seja *G* o ponto de interseção de *BM* e *NA*. Se o ângulo ∠*AGB* é reto, achar a área de *ABC*.

73) (Entre Rios-2000) No triângulo *ABC*, sejam *M*, *N* os pontos médios dos lados *CA*, *AB*, respectivamente. Sabe-se que *BM* é menor que *CN* e que *BM* é perpendicular a *CN*. Se *BC* = 17 e a área do triângulo *ABC* é igual a 180, achar os comprimentos de *BM* e *CN*.

74) (AIME-96) Em um triângulo ABC, AB $=\sqrt{30}$, AC $=\sqrt{6}$ e BC $=\sqrt{15}$. Considere um ponto D sobre a mediana relativa ao vértice A de modo que ∠ADB é um ângulo reto. Determine o valor da razão $\dfrac{\text{Área}(\Delta ADB)}{\text{Área}(\Delta ABC)}$.

75) (J.I.R. McKnight-83) Prove que para todo triângulo ABC, onde AD é mediana e |AD| = m, $4m^2 = b^2 + c^2 + 2.b.c.\cos A$

76) (Wisconsin-95) Em um ΔABC, os pontos P e Q são escolhidos sobre os lados AB e AC, respectivamente, a o segmento PQ é traçado cortando a mediana AM em X. Se AP = AB/4 e AQ = AC/2, determine a razão PX/PQ.

77) (Irlanda-94) Sejam A, B e C três pontos colineares, com B entre A e C. Os triângulos eqüiláteros ABD, BCE e CAF são construídos com D e E de um lado da reta AC e F no lado oposto. Prove que os baricentros dos triângulos são vértices de um triângulo eqüilátero. Prove também que o baricentro deste triângulo pertence à reta AC.

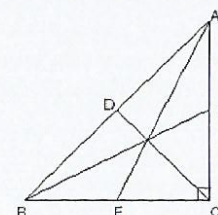
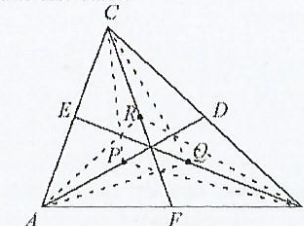
78) (Irlanda-2001) Seja ABC um triângulo de lados BC, CA, AB cujas medidas são respectivamente iguais a *a*, *b*, *c*. Se D e E são os pontos médios de AC e AB respectivamente, mostre que a mediana BD é perpendicular a CE se, e somente se, $b^2 + c^2 = 5a^2$.

79) (Bulgária-95) Um triângulo ABC com AB = 22, BC = 19 e CA = 13 é dado. Se M é o baricentro de ΔABC, prove que $AM^2 + CM^2 = BM^2$.

80) (Hungria-99) ABC é um triângulo qualquer. P é um ponto no interior do triângulo de modo que A' é o pé da perpendicular de P sobre BC, e analogamente defini-se B' e C'. Demonstre que o baricentro de A'B'C' é P.

81) (Holanda-93) Dado um triângulo ABC, ∠A = 90°. D é o ponto médio de BC, F é o ponto médio de AB, E é o ponto médio de AF e G é o ponto médio de FB. AD intersecta CE, CF e CG respectivamente em P, Q e R. Determine PQ/QR.

82) (África do Sul-2000) ABC é um triângulo retângulo com D, E e F sendo os pontos médios dos lados indicados. Se CD = 2 então $AE^2 + BF^2$ vale:

a) 12 b) 5 c) 15 d) 20 e) 25

83) (International Mathematical Talent Search) Em ΔABC, sejam D, E e F os pontos médios dos lados do triângulo, e sejam P, Q e R os pontos médios das correspondentes medianas AD, BE e CF, respectivamente. Prove que o valor de $\dfrac{AQ^2 + AR^2 + BP^2 + BR^2 + CP^2 + CQ^2}{AB^2 + BC^2 + CA^2}$ não depende dos comprimentos dos lados de ΔABC, e determine este valor.

84) (Asian Pacific-91) Dado ΔABC, seja G seu baricentro e M o ponto médio de BC. Sejam X em AB e Y em AC de modo que X, G e Y são colineares e XGY e BC são paralelos. Suponha que XC e GB interceptam-se em Q e que YB e GC interceptam-se em P. Mostre que ΔMPQ é semelhante a ΔABC.

85) (Torneio Internacional das Cidades-83) No interior de um quadrado ABCD considere um ponto M. Prove que os baricentros dos triângulos ABM, BCM, CDM e DAM formam um quadrado.

86) (Hong Kong-2003) Em um triângulo ABC, D, E e F são respectivamente os pontos médios de AB, BC e CA, respectivamente. Considerando que AB = 10, CD = 9, CD ⊥ AE, calcule BF.

87) (Manitoba-2001) Em um triângulo ABC, ∠ACB = 135°, CA = 6 e BC = $\sqrt{2}$. Se M é o ponto médio de lado AB, determine o comprimento de CM.

88) (Repúblicas Tcheca e Eslováquia-99) Seja ABC um triângulo em que $a + m_a = b + m_b = k(a + b)$, onde a = BC, b = AC, m_a é a mediana relativa ao vértice A e m_b é a mediana relativa ao vértice B. Determine o valor de k.

89) (Polônia-97) As medianas AD, BE e CF de um triângulo intersectam-se em G. Os quadriláteros AFGE e BDGF são inscritíveis. Prove que o triângulo ABC é eqüilátero.

Bissetriz e Incentro

90) (EsPCEx-95) Num triângulo **ABC**, retângulo em $\hat{\mathbf{A}}$ tem-se $\hat{\mathrm{B}} = \mathbf{60°}$. As bissetrizes destes ângulos se encontram num ponto **D**. Se o segmento de reta **BD** mede **1 cm**, então a hipotenusa mede:

a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ cm b) $1+\sqrt{3}$ cm. c) $2+\sqrt{3}$ cm.
d) $1+2\sqrt{2}$ cm. e) $2+2\sqrt{3}$ cm.

91) (Colégio Naval-80/81) O segmentos da bissetriz do ângulo reto de um triângulo vale $\mathbf{4\sqrt{2}}$ **cm**. Um dos catetos vale **5 cm**. A hipotenusa vale, em **cm**:

a) $3\sqrt{17}$ b) $4\sqrt{17}$ c) $5\sqrt{17}$ d) $6\sqrt{17}$ e) $7\sqrt{17}$

92) (Colégio Naval-82/83) Um triângulo ABC circunscreve um círculo de raio R. O segmento de tangente ao círculo tirado do vértice A mede 4 cm. Se o lado oposto a esse vértice mede 5 cm, a área do triângulo ABC é:

a) 20R cm^2 b) 10R cm^2 c) 5R cm^2
d) 9R cm^2 e) 4R cm^2

93) (Colégio Naval-86/87) Em um triângulo os lados de medidas **m** e **n** são opostos, respectivamente, aos ângulos de 60° e 40°. O segmento da bissetriz do maior ângulo interno do triângulo é dado por:

a) $m\sqrt{\frac{m+n}{n}}$ b) $n\sqrt{\frac{m+n}{m}}$ c) $m\sqrt{\frac{n}{m+n}}$
d) $n\sqrt{\frac{m}{m+n}}$ e) $\sqrt{\frac{m}{n}}$

94) (Colégio Naval-88/89) Os lados de um triângulo medem $\overline{AB} = 40$, $\overline{AC} = 50$ e $\overline{BC} = 60$. Sendo D a intersecção da bissetriz interna do ângulo B com o lado $\overline{AC}$, a área do triângulo ABD é:

a) $225\sqrt{7}$ b) $\frac{375}{2}\sqrt{7}$ c) $150\sqrt{7}$
d) $125\sqrt{7}$ e) $75\sqrt{7}$

95) (Colégio Naval-89/90) Num triângulo retângulo ABC de catetos AB = 8 e AC = 6, a mediana AM intercepta a bissetriz BD no ponto E. A área do triângulo BME é expressa pelo número real **x**, tal que:

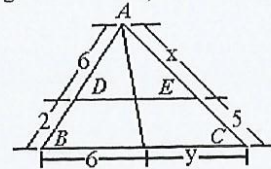
a) $3{,}5 \le x \le 4{,}0$ b) $4{,}0 \le x \le 4{,}5$
c) $4{,}5 < x \le 5{,}0$ d) $5{,}0 < x \le 5{,}5$
e) $5{,}0 < x \le 6{,}5$

96) (Colégio Naval-90/91) Num triângulo **ABC** as medidas dos lados **AB**, **AC** e **BC**, são respectivamente iguais a **4**, **6** e **8**. Da extremidade **D** da bissetriz **AD** traça-se o segmento **DE**, **E** pertence ao lado **AB**, de tal forma que o triângulo **BDE** é semelhante ao triângulo **ABD**. A medida do segmento **BE** é igual a:

a) 2,56 b) 1,64 c) 1,32 d) 1,28 e) 1

97) (Colégio Naval-97/98) Um triângulo isósceles tem os lados congruentes medindo 5 e base medindo 8. A distância entre seu incentro e o seu baricentro é, aproximadamente, igual a:

a) 0,1 b) 0,3 c) 0,5 d) 0,7 e) 0,9

98) (Colégio Naval-97/98)

Na figura acima, *DE* é paralelo a *BC* e *AM* é bissetriz interna do triângulo *ABC*. Então x + y é igual a:

a) 15 b) 20 c) 25 d) 30 e) 35

99) (Covest-99) Seja BD a bissetriz do ângulo interno B do triângulo ABC. Sabendo que BC = 6 e os ângulos ACB e ABD medem 36°, assinale $\sqrt{5}(AB/3+1)$.

100) (UFC-2003) Sejam α, β e θ os ângulos internos de um triângulo. Se as medidas desses ângulos são diretamente proporcionais a 1, 2 e 3, respectivamente, e a bissetriz do ângulo β mede duas unidades de comprimento (u.c.), determine a medida do perímetro deste triângulo.

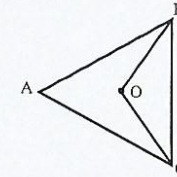
101) (FEI-77) Um triângulo de vértices A, B e C, retângulo em A, tem para medida dos lados: AB = 24, BC = 25 e AC = 7. Determinar a medida do

segmento CM, sendo CM a bissetriz interna do ângulo C.

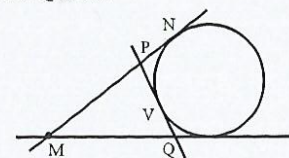
102) (FEI-79) No triângulo retângulo ABC, as medidas dos catetos são AB = 12 e AC = 5.
a) Ache a medida da mediana AM.
b) Ache as medidas dos segmentos BD e CD, onde AD é a bissetriz relativa à hipotenusa.

103) (UFMG-2004) Considere o triângulo ABC, cujos lados AB e AC medem 1 e cujo ângulo $B\hat{A}C$ mede 36°. Seja D a interseção da bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ com o lado AB.
a) Demonstre que os triângulos BCD e CDA são isósceles.
b) Calcule a medida do lado BC de ΔABC.
c) Calcule sen 18°.

104) (Fuvest-79) Na figura abaixo, **AB = AC, O** é o ponto de encontro das bissetrizes do triângulo **ABC,** e o ângulo $B\hat{O}C$ é o triplo do ângulo $\hat{A}$. Então a medida de $\hat{A}$ é:

a) 18°
b) 12°
c) 24°
d) 36°
e) 15°

105) (Fuvest-97) ABC é um triângulo retângulo em A e CX é bissetriz do ângulo BCA, onde X é ponto do lado AB. A medida de CX é 4 cm e a de BC, 24 cm. Calcule AC.

106) (Unb-79) Na ilustração abaixo, o triângulo **MPQ** é formado por três tangentes a um círculo; duas das tangentes têm posição fixa e $\overline{PQ}$ toca o circulo num ponto variável **V**. Se **MN = 12,25**, o perímetro de **MPQ** mede:

a) 18,4 cm
b) 24,5 cm
c) 25 cm
d) 30,65 cm
e) 36,75 cm

107) (ITA-80) Consideremos um triângulo retângulo que simultaneamente está circunscrito à circunferência C_1 e inscrito à circunferência C_2. Sabendo-se que a soma dos comprimentos dos catetos do triângulo é K cm, qual será a soma dos comprimentos destas duas circunferências?

a) (2πk)/3 cm b) (4πk)/3 cm c) 4πk cm
d) 2πk cm e) πk cm

108) (ITA-92) Num triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$, temos $\hat{B} = 60°$. As bissetrizes destes ângulos se encontram num ponto D. Se o segmento de reta BD mede 1 cm, então a hipotenusa mede:

a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ cm b) $1+\sqrt{3}$ cm c) $2+\sqrt{3}$ cm
d) $1+2\sqrt{2}$ cm e) n.d.a.

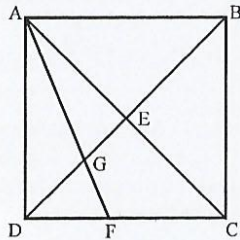
109) (ITA-2000) Considere um triângulo isósceles ABC, retângulo em A. Seja D a intersecção da bissetriz do ângulo $\hat{A}$ com o lado $\overline{BC}$ e E um ponto da reta suporte do cateto $\overline{AC}$ de tal modo que os segmentos de reta $\overline{BE}$ e $\overline{AD}$ sejam paralelos. Sabendo que $\overline{AD}$ mede $\sqrt{2}\,cm$, então a área do círculo inscrito no triângulo EBC é:

a) $\pi(4-2\sqrt{3})cm^2$ b) $2\pi(3-2\sqrt{2})cm^2$
c) $3\pi(4-2\sqrt{3})cm^2$ d) $4\pi(3-2\sqrt{2})cm^2$
e) $\pi(4-2\sqrt{2})cm^2$

110) (IME-67/68) Dado um triângulo isósceles, cujos lados são números inteiros de metros, sabe-se que os raio dos círculos ex-inscritos têm um produto 16 vezes maior o raio do círculo inscrito. Determinar os lados do triângulo.

111) (IME-69/70) Calcule a relação entre o raio do círculo ex-inscrito e um triângulo eqüilátero e o lado deste polígono.

112) (IME-80/81) Dado o triângulo escaleno ABC, sejam respectivamente D, E ,F os pontos de contato do círculo inscrito ao triângulo ABC, com os lados BC, AC e AB. Mostre que os triângulos ABC e DEF não são semelhantes, e estabeleça a relação EF/BC em função de sen B/2 e sen C/2 .

113) As diagonais do quadrado ABCD se interceptam em E, a bissetriz ∠CAD corta DE em G e DC em F. Se a medida de GE é 24, quanto mede FC?

114) Dado um triângulo retângulo ABC com $\angle BAC = 90°$, seja I o incentro, e sejam D e E as interseções de BI e CI com AC e AB, respectivamente. Prove que $\dfrac{BI^2 + ID^2}{CI^2 + IE^2} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

115) Num ΔABC, sendo I e I' os centros do círculo inscrito e do círculo ex-inscrito no ângulo A, demonstrar que AI x AI' = AB x AC.

116) Em um triângulo ABC, de perímetro 30, o lado BC mede 10 e a distância entre os pés das bissetrizes que partem de A é igual a 24. Calcule os lados AB e AC do triângulo.

117) Se os lados de um triângulo medem: a = 12, b = 10 e c = 8, a bissetriz externa relativa ao lado c tem comprimento igual a:

a) $15\sqrt{2}$ b) $20\sqrt{2}$ c) $25\sqrt{2}$ d) $30\sqrt{2}$

118) Calcule a área de um triângulo sabendo que os raios dos círculos ex-inscritos medem 3, 4 e 6.

119) Um triângulo ABC de lados AB = 6, AC = 4 e BC = 5 está inscrito num círculo. A bissetriz AD encontra o círculo circunscrito em E. Determine o valor de DE.

120) Seja ABC um triângulo em que onde os lados são iguais a: BC = a = 4, AC = b = 6 e AB = c = $\sqrt{22}$. Trace a mediana AM e a bissetriz interna CX. Seja P o ponto onde a bissetriz CX encontra AM. Determine o comprimento de PM.

a) 1 b) 15/4 c) 5/4 d) $\sqrt{3}$ e) 2

121) Seja ABC um triângulo retângulo isósceles onde AB = AC = a. Considere que G é o baricentro e I é o incentro do triângulo ABC. Determine, em função de a, o valor GI.

122) Considere um triângulo cujos lados são a, b e c. Seja A o ângulo oposto ao lado a e seja r o raio da circunferência inscrita no triângulo. Desta forma, pode-se afirmar que $tg\frac{A}{2}$ é igual a:

a) $\dfrac{2r}{a+b+c}$ b) $\dfrac{2r}{a+b-c}$ c) $\dfrac{a+c-b}{r}$

d) $\dfrac{2r}{b+c-a}$ e) $\dfrac{a+b+c}{r}$

123) O raio do círculo inscrito em um triângulo ABC é igual a 4 e um dos seus lados é dividido em dois segmentos de medidas 6 e 8 pelo ponto de tangência com o círculo inscrito. Determine as medidas dos outros dois lados.

124) Um triângulo retângulo está inscrito em um circulo de diâmetro 37 cm e circunscrito a um circulo de 5 cm de raio. Calcular a área do triângulo.

125) Sendo dado um triângulo ABC retângulo em A em que: AB = c, AC = b e a bissetriz AD do ângulo reto igual a β, pede-se demonstrar que: $\dfrac{\sqrt{2}}{\beta} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

126) A bissetriz interna traçada de A intercepta o lado BC de um triângulo ABC no ponto J. Se AB = c, AC = b, BJ = n, CJ = m e AJ = β, provar que $\beta^2 = bc - mn$.

127) Calcular os lados de um triângulo ABC retângulo em A sabendo-se que a distância do incentro de ABC aos vértices B e C são $\sqrt{13}$ e $\sqrt{104}$.

128) No triângulo ABC temos AB/AC = 1/2; AM é uma bissetriz interna e BN é uma mediana. Se a área de ABC é 16, qual a área do triângulo ABP, sendo P interseção de AM e BN?

129) Calcular os lados de um triângulo que tem 600 cm^2 de área, sabendo que a reta determinada pelo incentro e baricentro é paralela a um dos catetos.

130) Mostre que a área do triângulo formado pela união dos três centros das circunferências ex-

inscritas do triângulo ABC é igual a $\dfrac{abc}{2r}$, onde r é o inraio de ΔABC.

131) Seja P o centro de um quadrado construído externamente sobre a hipotenusa AC de um triângulo retângulo ABC. Prove que BP é a bissetriz de $\angle ABC$.

132) Seja D um ponto do lado AC do triângulo ABC, onde BC = 3, AC = 4 e AB = 5. Os dois círculos inscritos nos triângulos ABD e CBD possuem o mesmo raio. Determine o valor deste raio.

133) Prove que se, do ponto médio M do lado BC de um triângulo ABC, uma paralela à bissetriz externa AF do ângulo $\angle BAC$ é traçada, encontrando o lado AB em K, o ponto K divide o lado AB em KA = (AB + AC)/2 e KB = (AB – AC)/2.

134) Em um triângulo ABC, com mediana AD e bissetriz interna BE, temos que AB = 7, BC = 8 e EA = ED. Determine AC.

135) Prove que o raio do círculo que passa pelos centros do círculo inscrito e dois dos círculos ex-inscritos é o dobro do raio do círculo circunscrito ao triângulo.

136) O círculo inscrito no triângulo ABC tangencia AB no ponto D de modo que AD = 5 e DB = 3. Determine o comprimento de BC se $\angle A$ = 60°.

137) Suponha que AD, BE e CF são as bissetrizes internas de ΔABC, com D em BC, E em CA e F em AB. Fazendo a = BC, b = CA, c = AB, x = AE e y = AF. Sabendo-se que x + y = a. Prove que:

a) $a^2 = bc$;

b) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}$;

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$;

138) Demonstre as seguintes relações trigonométricas:

a) $\dfrac{2(p-a)}{senB + senC - senA} = \dfrac{2p}{senB + senC + senA}$;

b) $tg\dfrac{B}{2}.tg\dfrac{C}{2} = \dfrac{p-a}{p}$, $tg\dfrac{A}{2}.tg\dfrac{C}{2} = \dfrac{p-b}{p}$ e $tg\dfrac{A}{2}.tg\dfrac{B}{2} = \dfrac{p-c}{p}$;

c) $tg\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, $tg\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$ e $tg\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$;

d) $sen\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ e $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$.

139) Se R e r são, respectivamente, os raios das circunferências circunscrita e inscrita de um triângulo ABC, e r_a, r_b e r_c são, respectivamente, os raios das circunferências ex-inscritas aos lados a, b e c, demonstre que:

a) $r_a = (p-c)\cot\dfrac{B}{2} = (p-b)\cot\dfrac{C}{2} = p.\cot\dfrac{A}{2}$;

b) $S = \sqrt{r.r_a.r_b.r_c}$;

c) $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$;

d) $p^2 = r_ar_b + r_ar_c + r_br_c$;

e) $\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2} = \dfrac{p}{r}$;

f) $\cot\dfrac{A}{2}.\cot\dfrac{B}{2}.\cot\dfrac{C}{2} = \dfrac{p}{r}$;

g) $64Rr_ar_br_c = \dfrac{a^2b^2c^2}{4p^2}$;

h) $r_a = 4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}sen\dfrac{C}{2}$,

$r_b = 4R\cos\dfrac{A}{2}sen\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ e

$r_c = 4R\,sen\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$;

i) $r_a + r_b + r_c = 4R + r$;

j) $2 = h_c\left(\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b}\right) = h_a\left(\dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}\right) = h_b\left(\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_c}\right)$;

l) $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$;

m) $tg\dfrac{B}{2}.tg\dfrac{C}{2} = \dfrac{h_a - 2r}{h_a} = \dfrac{h_a}{2r_a + h_a}$;

n) $S = r_a^2\cot\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2} = r_b^2 tg\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2} = r_c^2 tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$;

o) $tg^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{r.r_a}{r_br_c}$;

140) Seja I o incentro do triângulo ABC e sejam I_a, I_b e I_c os ex-incentros relativos, respectivamente, aos lados a, b e c. Demonstre que:
a) $AI.AI_a = AI_b.AI_c = bc$, $BI.BI_b = BI_a.BI_c = ac$ e $CI.CI_c = CI_a.CI_b = ab$;
b) $AI^2 = bc - 4Rr$, $BI^2 = ac - 4Rr$ e $CI^2 = ab - 4Rr$;
c) $AI.BI.CI = 4R^2r^2$;
d) $AI_a.BI_a.CI_a = 4R^2r_a^2$;
e) $II_a = 4R\,\text{sen}\frac{A}{2}$;
f) $I_bI_c = 4R\cos\frac{A}{2}$;
g) $II_a.II_b.IIc = 16R^2r$ e $I_aI_b.I_aI_c.I_bI_c = 16R^2p$;
h) $II_a^2 + I_bI_c^2 = II_b^2 + I_aI_c^2 = II_c^2 + I_aI_b^2 = 16R^2$;
i) $IIa.IbIc = 4aR$;
j) $\frac{II_a}{I_bI_c} = \frac{r}{p-a} = \frac{r_a}{p}$;
l) $I_aI_b^2 + I_aI_c^2 + I_bI_c^2 = 8R(r_a + r_b + r_c)$;

141) Sejam β_a, β_b e β_c as bissetrizes relativas aos lados a, b e c. Demonstre que:
a) $\beta_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} = \frac{h_a}{\cos\frac{B-C}{2}}$;
b) $\beta_a.\beta_b.\beta_c = \frac{8abcpS}{(a+b)(a+c)(b+c)}$;

142) Em um triângulo ABC com incentro I e ângulos $2a$, $2b$ e $2c$ relativos aos vértices A, B e C, respectivamente. Se R é o circunraio de ABC, demonstre que CI = 4R.sen *a*.sen *b*.

143) Se d_1, d_2 e d_3 são as distâncias desde o incentro aos vértices de ABC, mostre que $\frac{d_1d_2d_3}{abc} = \frac{r}{p}$, onde r é o inraio do triângulo e p é o seu semi-perímetro.

144) Dado um ΔABC com raio do incírculo igual a r e raios dos ex-círculos opostos a A, B e C iguais a r_1, r_2 e r_3, respectivamente. Prove que ab = $r_1r_2 + rr_3$.

145) ABC é um triângulo isósceles com ∠A = 100° e AB = AC. A bissetriz do ângulo B encontra AC em D. Mostre que BD + AD = BC.

146) Sejam G o baricentro, I o incentro, R o circunraio, r o inraio e p o semi-perímetro de um triângulo. Prove que: $GI^2 = \frac{p^2 + 5r^2 - 16Rr}{9}$.

147) (Campina Grande-2001) Os comprimentos dos lados AB e AC de um triângulo ABC são distintos e medem c e b, respectivamente, e o ângulo BÂC = 120°. Se D é o ponto de interseção da bissetriz deste ângulo com o lado BC, calcule a medida do segmento AD em função de b e c.

148) (Rio de Janeiro-95) Do incentro I de um triângulo ABC, retângulo em A, avista-se a metade da hipotenusa, isto é, o segmento que une um vértice ao ponto médio M da hipotenusa, segundo um ângulo reto (∠BIM = 90°). Se m/n é a fração irredutível que expressa a razão entre as medidas dos catetos deste triângulo, então m + n é igual a:
a) 7 b) 17 c) 23 d) 31 e) 41

149) (OBM-97) Um triângulo ABC, de lados AB = c, AC = b e BC = a, tem perímetro 2p. Uma circunferência tangencia o lado BC e os prolongamentos dos lados AB e AC nos pontos P, Q e R, respectivamente. O comprimento AR é igual a:
a) p – a b) p – b c) p – c d) p e) 2p

150) (OBM-2002) Dado um triângulo *ABC* onde $\hat{A} = 80°$ e $\hat{C} = 40°$, a medida do ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ é:
a) 40° b) 60° c) 70° d) 80° e) 110°

151) (OBM-2003) No triângulo *ABC*, *M* é o ponto médio do lado *AC*, *D* é um ponto sobre o lado *BC* tal que *AD* é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ e *P* é o ponto de interseção de *AD* e *BM*. Sabendo que a área de *ABC* é 100, *AB* = 10 e *AC* = 30, calcule a área do triângulo *APB*.

152) (Seletiva Brasileira-Cone Sul-96) ABC é um triângulo retângulo em C. As bissetrizes internas dos ângulos ∠BAC e ∠ABC encontram BC e CA em P e Q, respectivamente. M e N são os pés das perpendiculares de P e Q a AB. Calcule o ângulo ∠MCN.

153) (Seletiva Brasileira-Cone Sul-96) Um ponto X é escolhido sobre o lado AC do triângulo ABC. Prove que se as circunferências inscritas nos

triângulos ABX e BCX são tangentes, então X pertence à circunferência inscrita no triângulo ABC.

154) (Seletiva Brasileira-Cone Sul-2000) Sejam L e M, respectivamente, as interseções das bissetrizes interna e externa do ângulo C do triângulo ABC e a reta AB. Se CL = CM, prove que $AC^2 + BC^2 = 4R^2$, onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

155) (Argentina-95) O triângulo ABC ∠A = 27° e ∠C = 90°. Seja m e mediana traçada desde C e seja P o ponto do prolongamento do lado AB tal que CP é perpendicular a m. A bissetriz do ângulo ∠APC intersecta BC em R e AC em S. Calcular as medidas dos ângulos ∠CRS e ∠CSR.

156) (Seletiva Argentina-Cone Sul-98) Seja *ABC* um triângulo. A bissetriz do ângulo ∠*CAB* intersecta *BC* em *D* e a bissetriz do ângulo *ABC* intersecta *CA* em *E*. Se *AE* + *BD* = *AB*, demonstrar que ∠*BCA* = 60°.

157) (Rioplatense-95) Seja *ABC* um triângulo isósceles com *AB* = *AC* e *A* = 36°. Traça-se a bissetriz de *B* que corta *AC* em *D* e traça-se a bissetriz de ∠*BDC* que corta *BC* em *P*. Marca-se um ponto *R* na reta *BC* tal que *B* é o ponto médio do segmento *PR*. Explique por que os segmentos *RD* e *AP* têm a mesma medida.

158) (Cabri-2000) Seja *ABC* um triângulo com *C* = 90°. As bissetrizes exteriores de *A* e *B* se cortam em *P*. Determinar a medida do ângulo *APB*.

159) (Canadá-69) Seja ABC um triângulo com lados a, b e c. Seja a bissetriz do ângulo C, que corta AB em D. Prove que o comprimento de CD é $\frac{2.a.b.\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.

160) (Irlanda-90) Suponha que as perpendiculares desde C até as bissetrizes dos ângulos A e B, em ΔABC, interceptam-nas em D e E, respectivamente. Prove que DE é paralelo a AB.

161) (Mongólia-2000) As bissetrizes dos ângulos A, B, C do triângulo ABC intersecta seus lados nos pontos A_1, B_1, C_1. Prove que se o quadrilátero $BA_1B_1C_1$ é inscritível, então:

$$\frac{BC}{AC+AB} = \frac{AC}{AB+BC} - \frac{AB}{BC+AC}$$

162) (Estônia-2001) Em um triângulo ABC, as medidas dos seus lados são inteiros consecutivos e a mediana relativa ao lado BC é perpendicular à bissetriz interna do ângulo ∠ABC. Determine as medidas dos lados do triângulo ABC.

163) (Rússia-98) Os comprimentos dos lados e do diâmetro do incírculo de triângulo são quatro inteiros consecutivos. Determine todos tais triângulos.

164) (Bulgária-97) Seja I e G o incentro e o baricentro de ΔABC com lados AB = *c*, BC = *a* e CA = *b*. Prove que (se *a* > *b*) a área de CIG é igual a (*a* – *b*)r/6, onde r é o inraio de ABC.

165) (Hungria-1910) ABC é um triângulo com ângulo C = 120°. Determine o comprimento da bissetriz do ângulo C em termos de BC e CA.

166) (Hungria-1916) ABC é um triângulo e a bissetriz de ∠C encontra AB em D. Mostre que $CD^2 < CA \cdot CB$.

167) (Áustria-Polônia-93) Seja ABC um triângulo equilátero. Na reta AB escolhemos um ponto P de modo que A esteja entre P e B. Denotemos por ℓ o comprimento dos lados de ABC; r_1 o raio do círculo inscrito em PAC e r_2 o raio do círculo ex-inscrito em PBC relativo ao lado BC. Prove que $r_1 + r_2 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

168) (Báltica-95) Em um triângulo ABC, seja β a bissetriz externa do ângulo C. A reta que passa pelo ponto médio O de AB e é paralela a β encontra AC em E. Determine |CE| se |AC| = 7 e |CB| = 4.

169) (Báltica-2001) Em um triângulo ABC, a bissetriz de ∠BAC encontra o lado BC no ponto D. Sabendo-se que $|BD|.|CD| = |AD|^2$ e ∠ADB = 45°, determine os ângulos de ABC.

170) (Índia-96) Em um triângulo ABC, M é o ponto médio de BC. Uma reta passando por M divide o perímetro de um triângulo ABC em duas

partes iguais. Mostre que esta reta é paralela à bissetriz interna de A.

171) (AIME-99) A circunferência inscrita de ΔABC tangencia AB em P e possui raio 21. Se AP = 23 e PB = 27, determine o perímetro de ΔABC.

172) (W. J. Blundon Contest-2003) Em ΔABC, nós temos que $\angle ACB = 120°$, AC = 6 e BC = 2. A bissetriz interna de $\angle ACB$ encontra o lado AB no ponto D. Determine o comprimento de CD.

173) (W. J. Blundon Contest-2002) O círculo inscrito de um triângulo retângulo ABC é tangente à hipotenusa AB em D. Se AD = x e DB = y, determine a área do triângulo em termos de x e y.

174) (Noruega-97) Um triângulo ABC possui lados AB = 3, BC = 4 e AC = 5. O círculo inscrito é tangente a AB em C', BC em A' e AC em B'. Qual a razão entre as áreas dos triângulos A'B'C' e ABC?
a) 1/4 b) 1/5 c) 2/9 d) 4/21 e) 5/24

175) (Noruega-2004) Em um triângulo ABC, D é um ponto no lado BC tal que $\angle CAD = \angle DAB = 60°$, AC = 3 e AB = 4. O valor de AD é:
a) 1,7 b) 12/7 c) $\sqrt{3}$ d) 7/4 e) nda

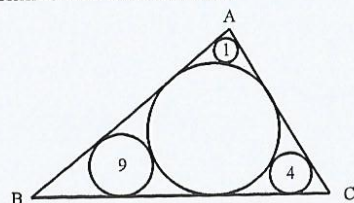
176) (Croácia-2003) Seja ΔABC um triângulo isósceles cujo ângulo do vértice A é igual a 120°. Uma reta passando por este vértice e perpendicular a um dos lados adjacentes divide o triângulo em dois triângulos, um dos quais é obtuso e possui um círculo inscrito com raio igual a 1. Determine a área de ΔABC.

177) (Inglaterra-95) O triângulo ABC possui ângulo reto em C. As bissetrizes internas de $\angle BAC$ e $\angle ABC$ encontram BC e CA em P e Q, respectivamente. Os pontos M e N são os pés das perpendiculares desde P e Q com relação a AB. Determine o ângulo $\angle MCN$.

178) (Espanha-97) O triângulo ABC possui $\hat{A} = 90°$ e AD é a altura relativa ao vértice A. As bissetrizes dos ângulos $\angle ABD$ e $\angle ADB$ intersectam-se em I_1 e as bissetrizes dos ângulos $\angle ACD$ e $\angle ADC$ intersectam-se em I_2. Determine os ângulos agudos de ΔABC sabendo que a soma das distâncias de I_1 e I_2 até AD é BC/4.

179) (Torneio das Cidades-96) ABC é um triângulo com ângulo $\hat{C} = 90°$. As duas tangentes ao incírculo de ΔABC que são perpendiculares a AB encontram AB em P e Q. Determine o ângulo $\angle PCQ$.

180) (Torneio das Cidades-99) ΔABC possui AC = 1, BC = 3, $\angle ACB = 90°$. ABDE é um quadrado externo a ΔABC. A bissetriz interna de C encontra DE em X. Determine o valor de DX/CX.

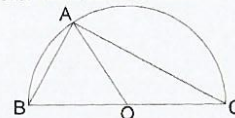
181) (IMO-84 Shortlist) ABC é um triângulo. Circunferências com raios mostrados na figura são traçadas interiormente ao triângulo tangenciando dois de seus lados e o incírculo. Determine o raio do incírculo.

Mediatriz e Circuncentro

182) (Colégio Naval-87/88) Um triângulo retângulo de perímetro 2p está inscrito num circulo de raio R e circunscrito a um circulo de raio r. Uma expressão que dá a altura relativa à hipotenusa do triângulo é:
a) $\frac{pr}{R}$ b) $\frac{p+r}{R}$ c) $\frac{R}{pr}$ d) $\frac{R}{p+r}$ e) $\frac{2pr}{R}$

183) (Colégio Naval-2002/2003) Se os lados de um triângulo medem, respectivamente **3x**, **4x** e **5x**, em que **x** é um número inteiro positivo, então a distância entre os centros dos círculos inscrito e circunscrito a esse triângulo corresponde a.
a) $\frac{5x}{4}$ b) $\frac{x\sqrt{5}}{2}$ c) $\frac{(1+\sqrt{2})x}{2}$ d) $\frac{5x}{6}$ e) $x\sqrt{2}$

184) (Fuvest-95) **A**, **B** e **C** são pontos de uma circunferência de raio **3 cm**, **AB = BC** e o ângulo $\angle ABC$ mede **30°**.
a) Calcule, em **cm**, o comprimento do segmento **AC**.

b) Calcule, em **cm²**, a área do triângulo **ABC**.

185) (Unifor-2000) Na figura abaixo tem-se o triângulo ABC, inscrito em um semi-círculo de centro O e raio de medida 4 cm.

A razão entre as áreas dos triângulos ABO e AOC, nessa ordem, é
a) 2/3 b) 3/4 c) 4/5 d) 5/6 e) 1

186) (Unicamp-99) Sejam *A*, *B* e *C* pontos de uma circunferência tais que $\overline{AB} = 2$ km, $\overline{BC} = 1$ km e a medida do ângulo $A\hat{B}C$ seja de 135°.
a) Calcule o raio dessa circunferência.
b) Calcule a área do triângulo *ABC*.

187) (ITA-85) Considere um triângulo isósceles inscrito em uma circunferência. Se a base e a altura deste triângulo medem 8 cm, então o raio desta circunferência mede:
a) 3 cm b) 4 cm c) 5 cm d) 6 cm e) $3\sqrt{2}$ cm

188) (ITA-91) Um triângulo ABC está inscrito num círculo de raio $2\sqrt{3}$. Sejam a, b e c os lados opostos aos ângulos A, B e C respectivamente. Sabendo que a = $2\sqrt{3}$ e (A,B,C) é uma progressão aritmética, podemos afirmar que:
a) $C = 4\sqrt{3}$ e $A = 30°$ b) $C = 3\sqrt{3}$ e $A = 30°$
c) $B = 6$ e $C = 85°$ d) $B = 3$ e $C = 90°$
e) n.d.a.

189) (ITA-94) Um triângulo ABC, retângulo em A, possui área S. Se x = $\angle ABC$ e r é o raio da circunferência circunscrita a este triângulo, então:
a) $S = r^2\cos(2x)$ b) $S = r^2\text{sen}(2x)$
c) $S = [r^2\text{sen}(2x)]/2$ d) $S = [r^2\cos^2 x]/2$
e) $S = [r^2\text{sen}^2 x]/2$

190) Os lados de um triângulo são 4, 13 e 15. Se r é o raio da circunferência inscrita e R é o raio da circunferência circunscrita, calcule o valor de R/r.
a) 5 b) 6 c) 65/12 d) 13/2 e) 39/20

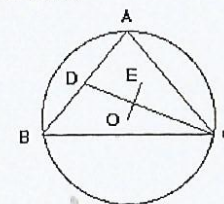
191) Provar que em um triângulo retângulo a soma dos lados é igual a soma dos diâmetros dos círculos inscritos e circunscritos no triângulo.

192) Demonstrar que a soma dos diâmetros dos círculos inscrito e circunscrito de qualquer triângulo ABC é igual a a.cotg A + b.cotg B + c.cotg C.

193) Considere um triângulo equilátero ABC e um ponto M em seu interior. A partir de M traçam-se três retas perpendiculares aos lados do triângulo ABC. Estas retas encontram os lados $\overline{BC}, \overline{CA}$ e $\overline{AB}$ do triângulo nos pontos D, E, F, respectivamente. Sabendo-se que: $\frac{\overline{MF}}{2} = \frac{\overline{ME}}{3} = \frac{\overline{MD}}{5}$ e que o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC é igual a 20 metros, calcule a área do triângulo DEF.

194) A ceviana AQ do triângulo equilátero ABC é prolongada encontrando o circuncírculo em P. Mostre que $\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}$.

195) Os lados de um triângulo estão em progressão aritmética, a e a' sendo, respectivamente, o menor e maior dos lados; r e R os raios dos círculos inscrito e circunscrito. Prove que 6Rr = aa'.

196) Em um triângulo ABC com circuncentro O, AB = AC, D é o ponto médio de AB e E é o baricentro do triângulo ACD. Prove que OE é perpendicular a CD.

197) Sejam R, r e p, o circunraio, inraio e semi-perímetro, respectivamente, de um triângulo ABC. Prove que $R^2 = p^2 + 2Rr$.

198) Em um triângulo PQR, PQ = PR = a e QR = 2b. Determine a distância entre o baricentro e o circuncentro do triângulo.

199) Demonstre as seguintes relações trigonométricas em um triângulo ABC:

a) $\dfrac{\cos^2\frac{A}{2}}{a}+\dfrac{\cos^2\frac{B}{2}}{b}+\dfrac{\cos^2\frac{C}{2}}{c}=\dfrac{p^2}{abc}$;

b) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+\frac{r}{2R}$;

c) $a.\cos^2\frac{A}{2}+b.\cos^2\frac{B}{2}+c.\cos^2\frac{C}{2}=p+\frac{S}{R}$;

d) $\text{sen}\frac{A}{2}.\text{sen}\frac{B}{2}.\text{sen}\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$;

e) $\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{2R}$;

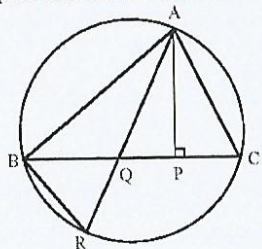
f) $\text{sen}\,A.\text{sen}\,B.\text{sen}\,C=\frac{S}{2R^2}$;

g) $\cot B-\cot A=\frac{a^2-b^2}{2S}$;

h) $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$;

i) $a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C=\frac{2.p.r}{R}$.

200) (AIME-2003) ABCD é um losango. Os raios das circunferências circunscritas de ΔABD e ΔACD são 12,5 e 25. Determine a área do losango.

201) (Wisconsin-98) No diagrama, AP é uma altura de ΔABC e um ponto Q é escolhido no lado BC tal que ∠BAQ = ∠CAP. Mostre que a reta AQ passa pelo circuncentro de ΔABC.

202) (Wisconsin-2002) Suponha que O é o circuncírculo de um triângulo isósceles ABC, onde AB = AC. Mostre que a reta AC é tangente ao circuncírculo de ΔAOB.

203) (Hong Kong-2004) A proporção entre os lados de um triângulo, que está inscrito em uma circunferência de raio $2\sqrt{3}$, é 3:5:7. Determine a área do triângulo.

204) (África do Sul-95) ABC é um triângulo com ∠A > ∠C e D é um ponto sobre o lado BC tal que ∠BAD = ∠ACB. As mediatrizes de AD e CD intersectam-se no ponto E. Prove que ∠BAE = 90°.

205) (Polônia-92) Os segmentos AC e BD intersectam-se em P, e |PA| = |PD|, |PB| = |PC|. O é o circuncentro do triângulo PAB. Mostre que OP e CD são perpendiculares.

206) (Torneio das Cidades-92) O é o excentro relativo ao ângulo Â em um triângulo ABC. Mostre que o circuncentro de ΔABO pertence ao circuncírculo de ΔABC.

207) (Torneio das Cidades-95) Seja O o circuncentro do triângulo ABC. As retas CA e CB encontram o circuncírculo de ΔAOB novamente em D e E, respectivamente. Prove que CO e DE são perpendiculares.

208) (Cabri-2000) Seja ABC um triângulo com AC = 2.BC. Sejam M e N os pontos médios de AB e BC respectivamente. Achar todos os triângulos ABC para os quais a mediatriz de MB e a de NC se cortam sobre AC.

209) (Cabri-98) Dado um triângulo *ABC*, seja *P* um ponto em *AC*. Sejam O_1 e O_2 os circuncentros dos triângulos *ABP* e *PBC* respectivamente. Provar que os ângulos *ABC* e O_1PO_2 medem o mesmo.

210) (Cabri-97) Em um triângulo traçam-se os segmentos que unem cada vértice com o incentro. As três mediatrizes destes segmentos determinam um triângulo. Provar que este triângulo está inscrito ao circuncírculo do triângulo original.

211) (Alberta High School-98) Em um triângulo ABC, AB = AC. A mediatriz de AB passa pelo ponto médio de BC. Se o comprimento de AC é $10\sqrt{2}$ cm, determine a área de ABC.

212) (Wisconsin-97) Seja I o incentro do ΔABC. Mostre que o centro do círculo circunscrito do ΔBIC pertence ao círculo circunscrito ao ΔABC.

213) (Wisconsin-2000) Em uma circunferência, a corda AB é traçada e um ponto C da circunferência é selecionado (no menor arco AB)

de modo que sua a distância à corda seja 4. Se CA = 6 e CB = 10, determine o diâmetro da circunferência.

214) (Rússia-98) Em um triângulo acutângulo ABC, seja S a circunferência S circunscrita ao triângulo OBC, onde O é o circuncentro de ABC. Sejam D e E os segundos pontos de interseção de S com as retas AB e AC, respectivamente. Prove que ADKE é um paralelogramo.

215) (AIME-2002) O triângulo ABC possui AB = 24. O prolongamento da mediana CE encontra o circuncírculo em F. Sabendo-se que CE = 27 e AD = 18, determine a área de ΔABF.

216) (Bielorússia-2001) Em um triângulo isósceles ABC, no qual AB = AC e ∠BAC = 30°, marcam-se os pontos Q e P sobre o lado AB e sobre a mediana AD respectivamente, de modo que PC = PQ (Q ≠ B). Determine a medida do ângulo ∠PQC.

217) (St. Petersburg) Em um triângulo ABC os lados satisfazem AB + AC = 2BC. Prove que a bissetriz de ∠A é perpendicular à reta que passa incentro e circuncentro de ABC.

218) (Uruguai-2003) Dado um segmento AB, tomamos P na mediatriz de AB tal que P ∉ AB. Seja C o ponto interior a AB tal que C não pertence à mediatriz de AB. Demonstrar que o raio da circunferência circunscrita ao triângulo APC é igual ao raio da circunferência circunscrita a BPC.

219) (Índia-96) Os lados de um triângulo são três inteiros consecutivos e o raio da circunferência inscrita vale 4. Determine o valor do raio do circuncírculo.

220) (OBM-94) Seja *R* o raio da circunferência circunscrita, *r* o raio da circunferência inscrita e *p* o semiperímetro do triângulo ABC. Prove que o triângulo ABC é retângulo se, e somente se $2R = p - r$.

Altura e Ortocentro

221) (Colégio Naval-85/86) O número de triângulos de perímetro igual a 19 e uma das alturas igual a 4, inscritível num circulo de raio 5, e cujos lados têm medidas expressas por números inteiros é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

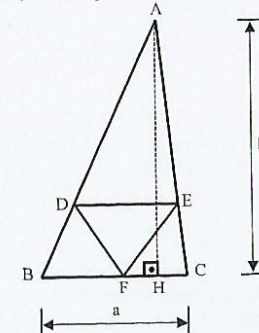
222) (Colégio Naval-86/87) No triângulo **ABC**, tem-se $\overline{BC}$= **a** e a altura $\overline{AH}$= **h**. O lado do triângulo equilátero **DEF** inscrito em **ABC** tal que $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$, é dado pela expressão:

a) $\dfrac{2ah}{a\sqrt{3}+2h}$

b) $\dfrac{ah}{h+a\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{2a}{h\sqrt{3}+a}$

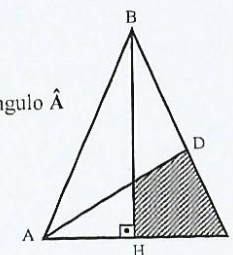
d) $\dfrac{2a}{a\sqrt{3}+h}$

e) $\dfrac{2ah}{2a\sqrt{3}+h}$

223) (Colégio Naval-86/87) O triângulo **ABC** da figura abaixo tem área **S**. A área da região hachurada é, em função de S:

Dados:

$\overline{AB}=\overline{BC}=2\,\overline{AC}$

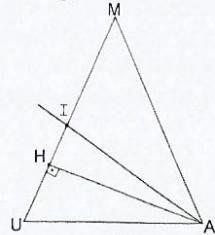
$\overline{BH}$ é a altura

$\overline{AD}$ é a bissetriz do ângulo Â

a) $\frac{25}{15}$ b) $\frac{5}{10}$ c) $\frac{5}{18}$ d) $\frac{75}{30}$ e) $\frac{5}{21}$

224) (Colégio Naval-95/96) Considere um triângulo **ABC** de lados **AB = 8, AC = 10** e **BC = 12** e seja **H** o seu ortocentro. As retas que passam por **A** e **H**, **B** e **H**, **C** e **H** intersectam o círculo circunscrito ao triângulo nos pontos **F**, **E** e **D**, respectivamente. A área do hexágono de vértice **A, D, B, F, C** e **E** é igual a:

a) $30\sqrt{7}$ b) $18\sqrt{7}$ c) 80 d) 70 e) 65

225) (Covest-95) Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB}=\overline{BC}=5$ cm e $\overline{AC}$ = 8 cm. Quanto vale, em mm, a altura deste triângulo com relação ao lado AC?

226) (Unifor-99) Na figura abaixo, o triângulo MAU é isósceles com os lados $\overline{MU}$ e $\overline{MA}$ congruentes e o ângulo $A\hat{M}U$ medindo 40°.

Sendo $\overline{AH}$ uma altura e $\overline{AI}$ a bissetriz de $M\hat{A}U$, a medida de $H\hat{A}I$ é
a) 15° b) 25° c) 35° d) 45° e) 60°

227) (Unb-78) Considere as afirmações:
I – Se num triângulo a altura relativa a um lado coincide com a bissetriz do ângulo oposto a ele, o triângulo é necessariamente isósceles.
II – Num triângulo isósceles qualquer, as três medianas são necessariamente iguais.
III – Se um triângulo tem duas alturas iguais, então ele é necessariamente eqüilátero.
Pode-se afirmar que:
a) I e II são corretas, III é falsa.
b) todas são falsas.
c) I é correta, II e III são falsas.
d) n.d.a.

228) (Fuvest-79) Num triângulo isósceles, de área $3\sqrt{6}$, a altura relativa à base é o triplo do diâmetro da circunferência inscrita. Ache o raio dessa circunferência.

229) (Fuvest-79) Num triângulo isósceles um ângulo $\hat{A}$ mede **100°**. Qual o ângulo formado pelas alturas que não passam pelo vértice **A**?

230) (Fuvest-97) Considere um triângulo **ABC** tal que a altura $\overline{\mathbf{BH}}$ seja interna ao triângulo e os ângulos $\mathbf{B\hat{A}H}$ e $\mathbf{H\hat{B}C}$ sejam congruentes.
a) Determine a medida do ângulo $\mathbf{A\hat{B}C}$.
b) Calcule a medida de $\overline{\mathbf{AC}}$, sabendo que **AB = 4 cm** e a razão entre as áreas dos triângulos **ABH** e **BCH** é igual a **2**.

231) (Fuvest-2004) Um triângulo ABC tem lados de comprimentos AB = 5, BC = 4 e AC = 2. Sejam M e N os pontos de AB tais que CM é a bissetriz relativa ao ângulo $A\hat{C}B$ e CN é a altura relativa ao lado AB. Determinar o comprimento de MN.

232) (Escola Naval-98/99) O triângulo ABC é retângulo em A e o ângulo $\hat{C}$ mede 20°. O ângulo formado pela altura e a mediana relativa à hipotenusa é:
a) 10° b) 30° c) 40° d) 50° e) 60°

233) (ITA-2000) Considere a circunferência inscrita num triângulo isósceles com base 6 cm e altura de 4 cm. Seja t a reta tangente a esta circunferência e paralela à base do triângulo. O segmento de t compreendido entre os lados do triângulo mede:
a) 1 cm b) 1,5 cm c) 2 cm d) 2,5 cm e) 3 cm

234) (IME-68/69) Um triângulo de perímetro igual a 15 metros, lados em progressão aritmética, tem a bissetriz externa do ângulo $\hat{A}$ = 120° medindo $\frac{\sqrt{\frac{675}{2}}}{2}$ metros. Calcule a altura em relação ao lado "a".

235) (IME-69/70) Calcule a bissetriz interna do ângulo ABC de lados a = 6, b = 3 e c = 5 metros.

236) (IME-82/83) Em um triângulo ABC dá-se o ângulo $\hat{A}$, o raio do círculo ex-inscrito r_a (relativo ao ângulo $\hat{A}$) e a altura h_a (relativa ao lado a). Deduza as expressões de a, b.c e de b + c, em função dos elementos dados.

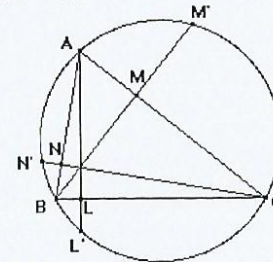
237) Sejam um triângulo ABC, retângulo em A, a altura AD e a perpendicular DE a AB. Demonstrar que $AD^2 = AC.DE$.

238) Dado um ΔABC retângulo em A, AD a altura, E e F as projeções de D sobre AC e AB, provar que $\frac{AC^3}{AB^3} = \frac{CE}{BF}$.

239) As três alturas (AF, BE e CD) de um triângulo ABC acutângulo cortam-se no ortocentro H. Sobre AB traça-se um triângulo retângulo com vértice L do ângulo reto sobre a perpendicular CD. Provar que $DL^2 = DH.DC$.

240) Seja ABC um triângulo acutângulo. Prove que se duas alturas de ABC tem mesma medida então ABC é isósceles.

241) Seja M o ortocentro de um triângulo ABC e N o ponto simétrico de M em relação ao ponto médio de AB. Prove que ∠ACM = ∠BCN.

242) As alturas AL, BM e CN de um triângulo ABC são prolongadas até encontrar o circuncírculo em L', M' e N'. Prove que $\frac{AL'}{AL} + \frac{BM'}{BM} + \frac{CN'}{CN} = 4$.

243) Se P é um ponto da altura AN de ΔABC, se ∠PBA = 20°, se ∠PBC = 40° e se ∠PCB = 30°, determine o valor de ∠PCA.

244) No triângulo ABC, a altura desde A corta a circunferência circunscrita em T. O diâmetro da circunferência circunscrita que passa por A e a reta OT (O, circuncentro) cortam o lado BC em Q e M, respectivamente. Demonstrar que $\frac{[AQC]}{[MTC]} = \left(\frac{\text{sen}B}{\cos C}\right)^2$, onde [] representa a área.

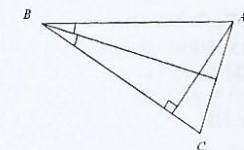
245) Determine a razão entre os lados de um triângulo se, somando duas alturas em todas as maneiras possíveis, as somas estão na razão 5:7:8.

246) Em um triângulo ABC, ∠A = 45° e ∠B = 75°. A altura desde A intersecta BC em D e a altura desde C intersecta AB em F. A projeção perpendicular de F em relação ao lado AC é G. Prove que AG = GD.

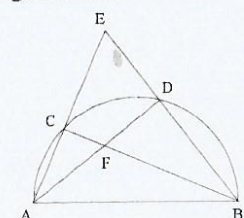
247) Seja ΔABC um triângulo retângulo com ângulo reto em C. Denotemos as alturas relativas aos lados BC, CA e AB por h_a, h_b e h_c, respectivamente. Se $h_a^2 = h_b^2 + h_c^2$, determine a relação entre os lados do triângulo.

248) Dado um triângulo ABC de área S, considere que D, E e F são seus pés das alturas. Prove que, sendo a = BC, b = CA e c = AB, a área de ΔDEF é $\frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)S}{4a^2b^2c^2}$.

249) (OBM-98) Em um triângulo acutângulo ABC o ângulo interno de vértice A mede 30°. Os pontos B_1 e C_1 são os pés das alturas traçadas por B e C, respectivamente e os pontos B_2 e C_2 são médios dos lados AC e AB, respectivamente. Mostre que os segmentos B_1C_2 e B_2C_1 são perpendiculares.

250) (OBM-2000) No triângulo ABC representado ao lado, a medida do ângulo $\hat{C}$ é 60° e a bissetriz do ângulo $\hat{B}$ forma 70° com a altura relativa ao vértice A. A medida do ângulo $\hat{A}$ é:

a) 50° b) 30° c) 40° d) 80° e) 70°

251) (OBM-2004) Sejam H, I e O o ortocentro, o incentro e o circuncentro do triângulo ABC, respectivamente. A reta CI corta o circuncírculo de ABC no ponto L, distinto de C. Sabe-se que $AB = IL$ e $AH = OH$. Determine os ângulos do triângulo ABC.

252) (Rio de Janeiro-98) Os pontos C e D estão em um semi-circunferência de diâmetro AB como mostra a figura abaixo:

Os pontos C e D podem mover-se sobre a semi-circunferência, mas o arco CD é sempre igual a 70°. a) Explique por que a reta EF é sempre perpendicular a AB. b) Calcule os ângulos AEB e AFB. c) Determine o conjunto das posições assumidas pelo ponto E quando os pontos C e D se movem sobre a semi-circunferência.

253) (Espírito Santo-99) Num triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em A, M é o ponto médio da hipotenusa BC, H é o pé da perpendicular baixada do vértice A sobre BC e J é o ponto onde a bissetriz do ângulo A encontra BC. Sabendo-se que HJ = 3 e que JM = 5, calcule BC.

254) (Goiás-99) Seja ABC um triângulo qualquer e AH a altura em relação ao lado BC. Sejam M_1 e M_2 os pontos médios dos lados AB e AC respectivamente. Mostre que o ângulo $M_1\hat{H}M_2$ é igual ao ângulo Â.

255) (Pará-2001) Um triângulo ABC é tal que ∠BÂC = 90°. Traçam-se a mediana AM, a bissetriz AK e a altura AH. Prove que ∠MÂK = ∠KÂH.

256) (Alberta High School-95) Em um triângulo ABC, a altura relativa ao vértice A encontra BC em D e a altura relativa ao vértice B encontra AD em H. Se AD = 4, BD = 3 e CD = 2, determine o comprimento e HD.

257) (Austrália-93) Em um triângulo acutângulo ABC, sejam D, E e F os pés das alturas tiradas desde A, B e C, respectivamente, e H o ortocentro. Prove que $\frac{AH}{AD}+\frac{BH}{BE}+\frac{CH}{CF}=2$.

258) (Torneio Internacional das Cidades-85) Em um triângulo ABC a mediana relativa ao vértice A, a altura relativa ao vértice B e a bissetriz relativa ao vértice C são concorrentes em um ponto O. Sabe-se também que OB = OC. Prove que ABC é um triângulo equilátero.

259) (Torneio Internacional das Cidades-87) O ângulo A de um triângulo acutângulo ABC é igual a 60°. Prove que a bissetriz de um dos ângulos formados pelas alturas traçadas de B e C passa pelo circuncentro de ABC.

260) (Torneio Internacional das Cidades-88) Seja N o ortocentro do triângulo ABC. Prove que os círculos circunscritos aos triângulos ABN, ACN e BCN possuem mesmo raio.

261) (Croácia-2001) A partir dos pontos médios dos lados de um triângulo acutângulo são traçadas perpendiculares aos outros dois lados. Mostre que a área do hexágono definido por esses segmentos é igual à metade da área do triângulo.

262) (Argentina-96) O triângulo ABC tem $AB = 20\sqrt{2}$, $BC = 28$ e $\angle ABC = 135°$. Se H é o pé da altura traçada desde A e M é o ponto médio de AC, calcular a medida de HM.

263) (Buenos Aires-97) No triângulo acutângulo ABC, o lado BC mede 17 cm; o lado AC mede 25 cm e a altura correspondente ao lado AB mede 15 cm. Quanto mede a altura h correspondente ao lado AC?

264) (Cabri-99) Seja ABC um triângulo, seja M o ponto médio de AB e seja P o ponto médio de CM. Sabendo que $CM = AB$ e que $PA = 1$ e $PB = 2$. Achar o comprimento da altura relativa ao vértice C do triângulo ABC.

265) (Cabri-99) Seja ABC um triângulo acutângulo e sejam D e E os pés das alturas desde A e B respectivamente. Sabendo que $DE = 3$ e $AB = 5$ achar a soma das áreas dos triângulos DEA e DEB.

266) (Seletiva Argentina Cone Sul-97) Seja ABC um triângulo acutângulo e CD a altura correspondente ao vértice C. Se M é o ponto médio de BC e N é o ponto médio de AD, calcular MN sabendo que AB = 8 e CD = 6.

267) (Seletiva Argentina Cone Sul-2001) Seja ABC um triângulo retângulo em C. Consideram-se D na hipotenusa AB tal que CD é a altura do triângulo e E no cateto BC tal que AE é bissetriz do ângulo A. Se F é o ponto de interseção de AE e CD, e G é o ponto de interseção de ED e BF, demonstrar que área (CEGF) = área (BDG).

268) (Espanha-2002) Em um triângulo ABC, A' é o pé da altura relativa ao vértice A e H o ortocentro. Dado um número real positivo k tal que $\frac{AA'}{HA'} = k$, encontrar a relação entre os ângulos B e C em função de k.

269) (Espanha-2003) As alturas do triângulo acutângulo ABC se cortam no ponto H. Sabe-se que $AB = CH$. Determinar o valor do ângulo $\angle BCA$.

270) (Bulgária-98) Em um triângulo acutângulo ΔABC com ∠BAC = 45°, BE (E ∈ AC) e CF (F ∈ AB) são alturas. Seja H, M e K o ortocentro de ABC e os pontos médios de BC e AH, respectivamente.
a) Prove que o quadrilátero MEKF é um quadrado.
b) Prove que as diagonais do quadrilátero MEKF intersecta o ponto médio de OH, onde O é o circuncentro de ΔABC.
c) Determine o comprimento de EF quando o circunraio de ΔABC é 1.

271) (Suécia-88) Os lados de um triângulo possuem comprimentos $a > b > c$, e as correspondentes alturas possuem comprimentos h_a, h_b e h_c. Mostre que $a + h_a > b + h_b > c + h_c$.

272) (Noruega-99) Em um triângulo retângulo de perímetro 60 a altura é 12. A hipotenusa vale:
a) 24 b) 25 c) 26 d) 27 e) 28

273) (Macedônia-97) Seja AH, BK e CL são as alturas de um triângulo qualquer ABC. Prove que: AK.BL.CH = AL.BH.CK = HK.KL.LH

274) (Rússia-70) ABC é um triângulo com incentro I. M é o ponto médio de BC. IM corta a altura AH em E. Mostre que AE = r, onde r é o raio da circunferência inscrita em ABC.

275) (Austrália-89) Suponha que BP e CQ sejam as bissetrizes dos ângulos B e C de um triângulo ABC e suponha que AH e AK são perpendiculares de A em relação a BP e CQ, respectivamente. Prove que KH é paralelo a BC.

276) (Cone Sul-92) Em um triângulo ABC, seja E o pé da altura de A sobre BC. Demonstrar que AE = (b.c)/(2R), onde R é o raio da circunferência circunscrita, b = AC e c = AB.

277) (Cone Sul-2003) No triângulo acutângulo ABC, os pontos H, G e M encontram-se sobre o lado BC, de modo que AH, AG e AM são altura, bissetriz e mediana do triângulo, respectivamente. Sabe-se que $HG = GM$, $AB = 10$ e $AC = 14$. Determinar a área do triângulo ABC.

278) (Iberoamericana-88) As medidas dos lados de um triângulo estão em progressão aritmética e os comprimentos das alturas do mesmo triângulo também estão em progressão aritmética. Demonstre que o triângulo é eqüilátero.

279) (Iberoamericana banco) Seja o triângulo ABC tal que BC = 2 e AB > AC. Traçamos a altura AH, a mediana AM e a bissetriz interna AI. São dados $MI = 2 - \sqrt{3}$ e $MH = \frac{1}{2}$.
a) Calcule $AB^2 - AC^2$ e a razão dos lados AB e AC.
b) Determine os comprimentos de AB e AC.
c) Calcular os ângulos do triângulo ABC.

280) (AIME-93) Um triângulo ABC possui AB = 1995, BC = 1993 e CA = 1994. CX é uma altura. Determine a distância entre os pontos de tangência dos incírculos de ΔACX e ΔBCX com a reta CX.

281) (Bulgária-97) Os pontos C e M são dados no plano. Seja H o ortocentro de ΔABC tal que M é o ponto médio de AB. Prove que $CH.CD = |AM^2 - CM^2|$, onde D ∈ AB e CD ⊥ AB.

282) (Polônia-86) ABC é um triângulo. Os pés das perpendiculares desde B e C até a bissetriz de A são K e L, respectivamente. N é o ponto médio de BC e AM é uma altura. Mostre que K, L, N e M são concíclicos.

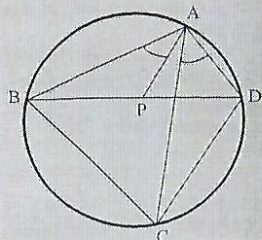
283) (Torneio das Cidades-93) P é um ponto sobre o lado AB de um triângulo ABC. Determine a distância entre os ortocentros de ΔAPC e ΔCPB em termos do lado AB e do ângulo ∠CPA.

284) (AHSME-84) Um triângulo retângulo ABC com hipotenusa AB possui lado AC = 15. A altura CH divide AB em dois segmentos AH e HB, com HB = 16. A área de ΔABC é:
a) 120 b) 144 c) 150 d) 216 e) $144\sqrt{5}$

285) (AIME-88) Em um triângulo ABC, tg (∠CAB) = 22/7 e a altura relativa ao vértice A divide BC em dois segmentos de comprimentos 3 e 17. Qual a área de ΔABC?

Área e Relações Métricas nos Quadriláteros

8.1) TEOREMA DE PTOLOMEU: "Num quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos".

1ª Demonstração:

Sejam: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = p$ e $BD = q$.
Seja P o ponto sobre o BD tal que $\angle BAP = \angle CAD$.

Desde que $\Delta APD \sim \Delta ABC$: $\frac{PD}{b} = \frac{d}{p} \Rightarrow PD.p = b.d$ (1)

Como $\Delta APB \sim \Delta ADC$: $\frac{BP}{c} = \frac{a}{p} \Rightarrow BP.p = a.c$ (2)

Somando (1) e (2): $p(PD + BP) = a.c + b.d \Rightarrow p.q = a.c + b.d$

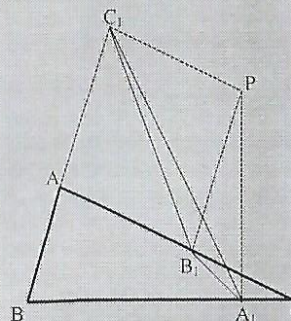
2ª Demonstração:

Em ΔABD e ΔBCD temos $q^2 = a^2 + d^2 - 2.a.d.\cos\hat{A}$ e $q^2 = b^2 + c^2 + 2.b.c.\cos\hat{A}$.

Assim: $(bc + ad)q^2 = (a^2 + d^2)bc + (b^2 + c^2)ad = (ab + cd)(ac + bd) \Rightarrow q^2 = \frac{ab + cd}{bc + ad}(ac + bd)$ (1)

Analogamente: $p^2 = \frac{ad + bc}{ab + cd}(ac + bd)$ (2). Multiplicando (1) e (2) obtemos $pq = ac + bd$.

8.1.1) Desigualdade de Ptolomeu: "Se ABC é um triângulo e P é um ponto do plano de ΔABC, então $AB.CP + BC.AP \geq AC.BP$. A igualdade ocorre se e somente o quadrilátero ABCP é inscritível."

Demonstração:

Por P trace perpendiculares aos lados BC, AC e AB, intersectando estes lados nos pontos A_1, B_1 e C_1, respectivamente.
Trace os segmentos de reta A_1C_1, A_1B_1 e B_1C_1.
Como $\angle AC_1P + \angle AB_1P = 90° + 90° = 180°$, então o quadrilátero AB_1PC_1 é inscritível, sendo AP um diâmetro da circunferência circunscrita. Além do mais, $\angle PB_1A = 180° - \angle B_1AC_1 = \hat{A}$.

Aplicando Lei dos Senos em ΔPB_1C_1 temos que: $\frac{B_1C_1}{\text{sen}\hat{A}} = AP$.

Como $\text{sen}\hat{A} = \frac{BC}{2R}$, então $B_1C_1 = \frac{BC.AP}{2R}$.

Analogamente, temos que $A_1C_1 = \frac{AC.BP}{2R}$ e $A_1B_1 = \frac{AB.CP}{2R}$

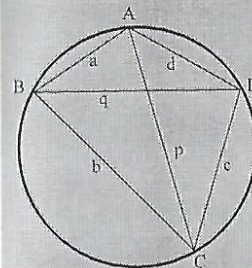
Como a menor distância entre dois pontos é em linha reta, então $A_1B_1 + B_1C_1 \geq A_1C_1 \Rightarrow$

$\frac{AB.CP}{2R} + \frac{BC.AP}{2R} \geq \frac{AC.BP}{2R} \Rightarrow AB.CP + BC.AP \geq AC.BP$

A igualdade ocorre se e somente se $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$, ou seja, se e somente se os pontos A_1, B_1 e C_1 estão alinhados, fazendo com que esta reta seja uma Reta de Simson e o ponto P pertença ao circuncírculo de ΔABC. Assim, o quadrilátero ABCP é inscritível e a Desigualdade de Ptolomeu se transforma no Teorema de Ptolomeu.

Perceba que a Desigualdade de Ptolomeu é um teorema bem mais geral que o Teorema de Ptolomeu. A Desigualdade de Ptolomeu permite descobrir se um quadrilátero ABCD é inscritível diretamente a partir dos valores dos lados e diagonais, sem que seja necessário fazer uma análise dos ângulos de ABCD. Para isto, basta que se verifique a igualdade AB.CD + BC.AD = AB.CD. Se por acaso ocorrer de AB.CP + BC.AP > AB.CP, então ABCD não é inscritível.

8.2) TEOREMA DE HIPARCO: "A razão das diagonais de um quadrilátero inscritível é a razão entre as somas dos produtos dos lados que concorrem com as respectivas diagonais".

Demonstração:

Pela figura temos que $S_{\Delta BAC} + S_{\Delta DAC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta CBD} \Rightarrow$

$\frac{a.b.p}{4R} + \frac{c.d.p}{4R} = \frac{a.d.q}{4R} + \frac{b.c.q}{4R} \Rightarrow p(a.b + c.d) = q(a.d + b.c) \Rightarrow$

$\frac{p}{q} = \frac{a.d + b.c}{a.b + c.d}$

Perceba agora que, sendo dados os lados de um quadrilátero inscritível, podemos calcular suas diagonais utilizando o Teorema de Ptolomeu e o Teorema de Hiparco. Do Teorema de Ptolomeu tiramos o produto das diagonais e do Teorema de Hiparco obtemos a razão das diagonais. Substituindo uma equação na outra calculamos seus valores.

Exemplos:

1) Determine os comprimentos das duas diagonais de um quadrilátero inscritível cujos lados medem 6, 4, 5 e 3, respectivamente.

Solução:

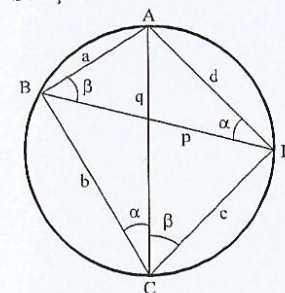
Consideremos que: $a = 6$, $b = 4$, $c = 5$ e $d = 3$.

Aplicando o Teorema de Ptolomeu: $p.q = a.c + b.d = 6.5 + 4.3 = 42$.

Aplicando o Teorema de Hiparco: $\frac{p}{q} = \frac{a.d + b.c}{a.b + c.d} = \frac{6.3 + 4.5}{6.4 + 5.3} = \frac{38}{39} \Rightarrow q = \frac{39.p}{38}$.

Substituindo obtemos: $\frac{39.p^2}{38} = 42 \Rightarrow p = \sqrt{\frac{532}{13}}$. Como $q = \frac{39.p}{38}$ então $q = \sqrt{\frac{819}{19}}$.

2) Prove, utilizando o Teorema de Ptolomeu, que se A e B são ângulos agudos, então sen $(\alpha + \beta)$ = sen α.cos β + sen β.cos α.

Solução:

Vamos construir um quadrilátero ABCD inscritível de modo que AC seja diâmetro e $\alpha = \angle BCA$ e $\beta = \angle DCA$. Desde que ΔABC e ΔADC são triângulos retângulos então $\angle BAC = 90° - \alpha$ e $\angle DAC = 90° - \beta$.

Como ABCD é inscritível então $\angle ADB = \alpha$ e $\angle ABD = \beta$.

Aplicando Lei dos Senos nos triângulos ΔABC, ΔADC e ΔBDC:

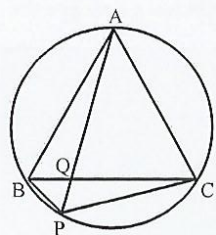
$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\cos\alpha} = 2R$, $\frac{d}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\cos\beta} = 2R$, $\frac{p}{\text{sen}(\alpha + \beta)} = 2R$.

Pelo Teorema de Ptolomeu: $p.q = a.c + b.d \Rightarrow$

$[2R.\text{sen}\,(\alpha + \beta)][2R] = [2R.\text{sen}\,\alpha][2R.\cos\beta] + [2R.\cos\alpha][2R.\text{sen}\,\beta] \Rightarrow$

$\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha.\cos\beta + \text{sen}\,\beta.\cos\alpha$.

3) A ceviana AQ do triângulo equilátero ABC é prolongada encontrando o circuncírculo em P. Mostre que $\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}$.

Solução:

Seja L o lado do triângulo ΔABC. Aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero inscritível ABPC, temos que:

$PA.BC = AB.PC + AC.BP \Rightarrow PA.L = L.PC + L.BP \Rightarrow PA = PB + PC$

Como os ângulos inscritos ∠APC e ∠ABC compreendem os mesmo arco AC na circunferência, então ∠APC = ∠ABC = 60°.

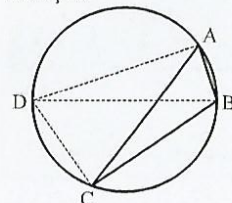
Analogamente, temos que ∠APB = ∠ACB = 60°.

Desta forma, podemos observar que ΔBQP ~ ΔACP ⇒

$\frac{PQ}{PC} = \frac{PB}{PA} \Rightarrow PB.PC = PQ.PA \Rightarrow PB.PC = PQ(PB + PC) \Rightarrow$

$\frac{PB + PC}{PB.PC} = \frac{1}{PQ} \Rightarrow \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}.$

4) (IME-66) Em um círculo de $10\sqrt{2}$ cm de diâmetro temos duas cordas de 2 cm e 10 cm. Achar a corda do arco soma dos arcos das cordas anteriores.

Solução:

Sejam AB = 2 cm e BC = 10 cm as cordas. Trace o diâmetro BD e observe que ΔABD e ΔBCD são triângulos retângulos. Portanto:

i) $DA^2 = BD^2 - AB^2 = 200 - 4 = 196 \Rightarrow DA = 14$ cm

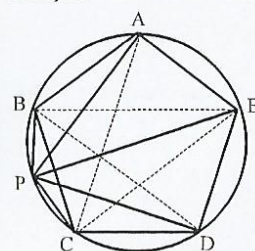
ii) $CD^2 = BD^2 - BC^2 = 200 - 100 = 100 \Rightarrow CD = 10$ cm

Aplicando o Teorema de Ptolomeu em ABCD:

$AC.BD = AB.CD + DA.BC \Rightarrow AC.10\sqrt{2} = 2.10 + 14.10 = 160 \Rightarrow$

$AC = 8\sqrt{2}$ cm

5) (IME-86/87) Sejam A, B, C, D, E os vértices de um pentágono regular inscrito num círculo e P um ponto qualquer sobre o arco BC. Unindo-se P a cada um dos vértices do pentágono, mostre que PA + PD = PB + PC + PE.

Solução:

Inicialmente notemos que em um pentágono regular ABCDE temos:

AB = BC = CD = DE = EA e AC = AD = BD = BE = CE.

Aplicando Ptolomeu em ABPC: PA.BC = AB.PC + PB.AC (1)

Aplicando Ptolomeu em BPCD: PD.BC = CD.PB + PC.BD (2)

Somando (1) e (2): BC(PA + PD) = AB(PB + PC) + AC(PB + PC) (3)

Aplicando Ptolomeu em BPCE: PE.BC = CE.PB + BE.PC ⇒

BC.PE = AC(PB + PC) (4)

Substituindo (4) em (3): BC(PA + PD) = AB(PB + PC) + BC.PE

Como BC = AB = BC então PA + PD = PB + PC + PE.

6) (IME-2004) Um quadrilátero convexo **ABCD** está inscrito em um círculo de diâmetro *d*. Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = a$, $\overline{AD} = d$ e $\overline{CD} = b$, com **a, b e d** diferentes de zero. Demonstre que $d^2 = bd + 2a^2$.

Solução:

Teorema de Pitágoras: $BD = \sqrt{d^2 - a^2}$ e $AC = \sqrt{d^2 - b^2}$.

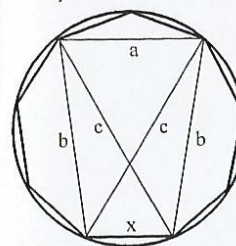
Teorema de Hiparco: $\frac{AC}{BD} = \frac{BC.CD + AB.AD}{AB.BC + AD.CD} \Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{a.b + a.d}{a^2 + b.d} \Rightarrow \frac{a.b + a.d}{AC} = \frac{a^2 + b.d}{BD}$ (1)

Teorema de Ptolomeu: $AC.BD = BC.AD + AB.CD \Rightarrow AC.BD = a.d + a.b \Rightarrow \frac{a.d + a.b}{AC} = BD$ (2)

Igualando (1) e (2) obtemos que: $BD^2 = a^2 + b.d \Rightarrow d^2 - a^2 = a^2 + b.d \Rightarrow d^2 = b.d + 2a^2$

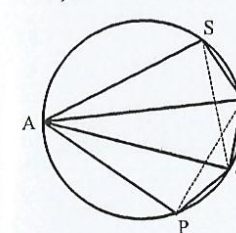
7) (Colégio Naval-87/88) Uma expressão que dá o lado do eneágono regular, em função das diagonais a, b e c, com a < b < c, é:

a) $\frac{c^2 + b^2}{a}$ b) $\frac{cb}{a}$ c) $\frac{c^2 - b^2}{a}$ d) $\left(\frac{c + b}{a}\right)^2$ e) $\left(\frac{c - b}{a}\right)^2$

Solução:

Considere o quadrilátero inscritível desenhado ao lado, onde seus 4 vértices também são vértices do eneágono. Aplicando Teorema de Ptolomeu:

$a.x + b.b = c.c \Rightarrow x = \frac{c^2 - b^2}{a}.$

8) (Olimpíada da Inglaterra-94) AP, AQ, AR e AS são cordas de uma dada circunferência com a propriedade que ∠PAQ = ∠QAR = ∠RAS. Prove que AR(AP + AR) = AQ(AQ + AS).

Solução:

Como ∠PAQ, ∠QAR e ∠RAS são ângulos inscritos congruentes então as cordas por eles determinados também são congruentes: PQ = QR = RS.

Analogamente, como ∠PAR = ∠QAS então QS = PR.

Aplicando o Teorema de Ptolomeu em AQRS:

QS.AR = AS.QR + AQ.RS = AS.QR + AQ.QR ⇒

QS.AR = QR(AS + AQ) (1)

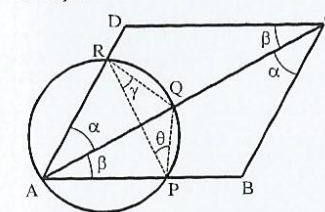
Aplicando o Teorema de Ptolomeu em APQR:

PR.AQ = AP.QR + AR.PQ ⇒ QS.AQ = AP.QR + QR.AR ⇒

QS.AQ = QR(AP + AR) (2)

Dividindo as equações (1) e (2) obtemos que AR(AP + AR) = AQ(AQ + AS).

9) (Olimpíada Báltica-2001) Seja ABCD um paralelogramo. Uma circunferência passando por A encontra os segmentos AB, AC e AD nos pontos P, Q e R, respectivamente. Prove que |AP|.|AB| + |AR|.|AD| = |AQ|.|AC|.

Solução:

Trace os segmentos RQ, QP e RP. Considere os ângulos α, β, γ e θ definidos de acordo com a figura ao lado.

Como APQR é inscritível ⇒ γ = β e θ = α.

Portanto, temos que ΔRQP ~ ΔABC ~ ΔCDA:

$\frac{AC}{RP} = \frac{AB}{RQ} = \frac{AD}{PQ}$ (1)

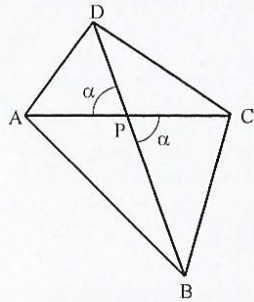
Aplicando o Teorema de Ptolomeu em APQR:

AQ.RP = RQ.AP + PQ.AR (2)

Multiplicando cada termo da expressão (2) pelas razões da expressão (1) temos:

$AQ.RP.\frac{AC}{RP} = RQ.AP.\frac{AB}{RQ} + PQ.AR.\frac{AD}{PQ} \Rightarrow AQ.AC = AP.AB + AR.AD$

8.3) ÁREA

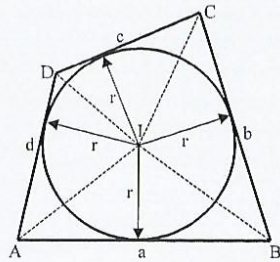
8.3.1) Quadrilátero Convexo Qualquer

Considere que $AC = p$ e $BD = q$. Assim:

$S_{ABCD} = S_{APD} + S_{BPC} + S_{CPD} + S_{DPA} \Rightarrow$

$$S_{ABCD} = \frac{PA.PD.\text{sen}\,\alpha}{2} + \frac{PA.PB.\text{sen}\,\alpha}{2} + \frac{PB.PC.\text{sen}\,\alpha}{2} + \frac{PC.PD.\text{sen}\,\alpha}{2} \Rightarrow$$

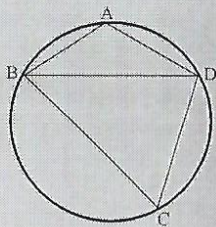
$$S_{ABCD} = \frac{(PA.PD + PA.PB + PB.PC + PC.PD)\text{sen}\,\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$S_{ABCD} = \frac{(PA + PC)(PB + PD)\text{sen}\,\alpha}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{p.q.\text{sen}\,\alpha}{2}$$

8.3.2) Quadrilátero Convexo Circunscritível

$S_{ABCD} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CID} + S_{DIA} \Rightarrow$

$$S_{ABCD} = \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2} + \frac{d.r}{2} = \frac{(a+b+c+d).r}{2} \Rightarrow$$

$S_{ABCD} = p.r$

8.3.3) Quadrilátero Convexo Inscritível

Lei dos cossenos em ABD e CBD:

$BD^2 = a^2 + d^2 - 2.a.d.\cos A$ e $BD^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c\cos C$

Como $A + C = 180^\circ \Rightarrow \cos C = -\cos A$.

Portanto: $b^2 + c^2 + 2.b.c.\cos A = a^2 + d^2 - 2.a.d.\cos A \Rightarrow$

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(a.d + b.c)}$$

Calculemos agora o valor de $1 + \cos A$:

$$1 + \cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2 + 2a.d + 2.b.c}{2(a.d + b.c)} = \frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{2(a.d + b.c)} \Rightarrow$$

$$1 + \cos A = \frac{(a+d+b-c)(a+d+c-b)}{2(a.d+b.c)} \Rightarrow 1 + \cos A = \frac{2.(p-c).2.(p-b)}{2(a.d+b.c)} \Rightarrow$$

$$1 + \cos A = \frac{2.(p-c)(p-b)}{a.d+b.c}$$

Uma vez que $1 + \cos A = 2.\cos^2 \frac{A}{2} \Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{a.d+b.c}}$.

Como $1 - \cos A = 2.\text{sen}^2 \frac{A}{2}$ pode-se demonstrar que $\text{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{a.d+b.c}}$.

A área S do quadrilátero é igual a soma das áreas dos triângulos ADB e CDB:

$$S_{ABCD} = \frac{a.d.\text{sen}\,A}{2} + \frac{b.c.\text{sen}\,C}{2}.$$

Como $A + C = 180^\circ$ temos que $\text{sen}\,A = \text{sen}\,C$. Desta forma:

$$S_{ABCD} = \frac{a.d+b.c}{2}.\text{sen}\,A = \frac{a.d+b.c}{2}2.\text{sen}\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} = (a.d+b.c)\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{a.d+b.c}}.\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{a.d+b.c}} \Rightarrow$$

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

8.3.4) Quadrilátero Convexo Inscritível e Circunscritível

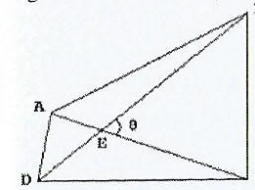
Em um quadrilátero inscritível temos que:

$a + c = b + d = p \Rightarrow p - a = c \quad p - b = d \quad p - c = a \quad p - d = b$

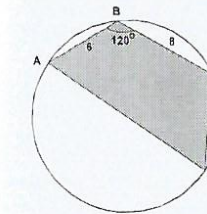
Deste modo: $S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \Rightarrow S_{ABCD} = \sqrt{a.b.c.d}$

Exemplos:

1) (Fuvest-2000) Na figura, E é o ponto de interseção das diagonais do quadrilátero ABCD e θ é o ângulo agudo BÊC. Se EA = 1, EB = 4, EC = 3 e ED = 2, então a área do quadrilátero ABCD será:

a) 12.sen θ b) 8.sen θ c) 6.sen θ d) 10.cos θ e) 8.cos θ

Solução:

$$S_{ABCD} = \frac{AC.BD.\text{sen}\,\theta}{2} = \frac{(1+3)(4+2)\text{sen}\,\theta}{2} = 12.\text{sen}\,\theta$$

2) (Covest-99) A figura abaixo ilustra um quadrilátero inscritível ABCD. Sabendo que AB = 6, BC = 8, CD = 7 e o ângulo ABC mede 120°, qual o inteiro mais próximo da área de ABCD ?

Solução:

Como ABCD é inscritível então $\angle D = 60^\circ$. Aplicando Lei dos Cossenos em ΔABC e ΔADC:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos 120^\circ = AD^2 + CD^2 - 2.AD.CD.\cos 60^\circ \Rightarrow$

$$36 + 64 - 2.6.8\left(-\frac{1}{2}\right) = AD^2 + 49 - 2.AD.7.\frac{1}{2} \Rightarrow AD^2 - 7.AD - 99 = 0 \Rightarrow AD = \frac{7+\sqrt{445}}{2}$$

$$\text{Assim: } S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{AB.BC.\text{sen}\,120^\circ}{2} + \frac{AD.CD.\text{sen}\,60^\circ}{2} = \frac{6.8.\sqrt{3}}{4} + \frac{(7+\sqrt{445}).7.\sqrt{3}}{8} \Rightarrow$$

$S_{ABCD} \cong 63{,}36 \Rightarrow$ o inteiro mais próximo da área de ABCD é 63.

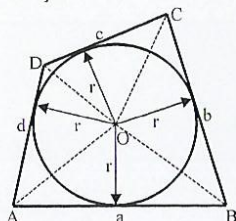
3) Determine a área de um quadrilátero inscritível cujos lados medem 9, 10, 10 e 21.

Solução:

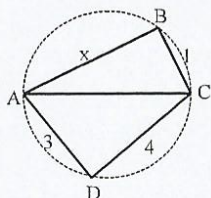
Se $a = 9$, $b = 10$, $c = 10$ e $d = 21$ então $p = (a + b + c + d)/2 = (9 + 10 + 10 + 21)/2 = 25$.

Portanto: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \sqrt{16.15.15.4} = 120$.

4) (Olimpíada do Novo México-91) Suponha que ABCD é um quadrilátero circunscritível em uma circunferência de centro O. Se as áreas dos triângulos OAB e OCD são iguais a 12 cm^2 e 17 cm^2, respectivamente, qual é a área do quadrilátero ABCD?

Solução:

Desde que ABCD é circunscritível, então $a + c = b + d$.
Multiplicando esta expressão por r/2 temos que
$(a.r)/2 + (c.r)/2 = (b.r)/2 + (d.r)/2 \Rightarrow S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OCD} = S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OAD}$
Deste modo:
$S_T = S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OCD} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OAD} = 2(S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OCD}) = 58\ cm^2$

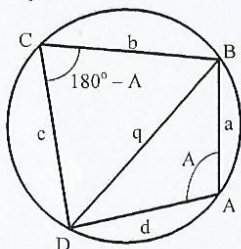
5) (Olimpíada da Bélgica-2001) Dado um quadrilátero ABCD com ângulos retos em B e D. Sabe-se também que $|BC| = 1$, $|CD| = 4$ e $|DA| = 3$. Qual a área de ABCD?

Solução:

Como $\hat{B} + \hat{D} = 180^o$ então ABCD é inscritível, sendo AC um diâmetro.
Aplicando o Teorema de Pitágoras:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2 + CD^2 \Rightarrow x^2 + 1 = 9 + 16 \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$

Assim: $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \dfrac{AB.BC}{2} + \dfrac{DA.CD}{2} \Rightarrow$

$S_{ABCD} = \sqrt{6} + 6$

6) (Torneio das Cidades-91) Os vértices do quadrilátero ABCD pertencem a uma circunferência e CB = CD. Mostre que a área de ABCD é $(AC^2.\text{sen } A)/2$.

Solução:

Sejam AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = p e BD = q.
Como CB = CD então b = c. Assim, pelo Teorema de Ptolomeu:
$p.q = a.c + b.d = a.b + b.d = b(a + d)$ (I)

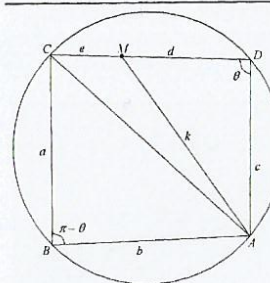
Pelo Teorema de Hiparco: $\dfrac{p}{q} = \dfrac{a.d + b.c}{a.b + c.d} = \dfrac{a.d + b^2}{a.b + c.b} = \dfrac{a.d + b^2}{b(a + d)}$ (II)

Substituindo (I) em (II) temos que:

$\dfrac{p}{q} = \dfrac{a.d + b^2}{p.q} \Rightarrow p^2 = a.d + b^2$

Por outro lado: $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \dfrac{a.d.\text{sen} A}{2} + \dfrac{b.c.\text{sen} A}{2} = \dfrac{(a.d + b^2)\text{sen} A}{2} = \dfrac{p^2.\text{sen} A}{2}$

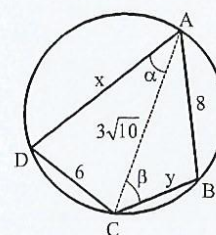
7) (OBM-2002) *ABCD* é um quadrilátero convexo e inscritível e *M* é um ponto sobre o lado *CD*, tal que o triângulo *ADM* e o quadrilátero *ABCM* têm a mesma área e o mesmo perímetro. Prove que *ABCD* tem dois lados de comprimentos iguais.

Solução:

Como os perímetros de ADM e ABCM são iguais:
$a + b + e + k = c + d + k \Rightarrow d - e = a + b - c$ (I)
Perceba que:

$S_{ABCD} = \dfrac{(d + e).c.\text{sen}\,\theta}{2} + \dfrac{a.b.\text{sen}\,\theta}{2}$ e $S_{ADM} = \dfrac{c.d.\text{sen}\,\theta}{2}$

Se $S_{ADM} = S_{ABCM} \Rightarrow S_{ABCD} = 2.S_{ADM} \Rightarrow$
$(d + e).c.\text{sen}\,\theta + a.b.\text{sen}\,\theta = 2.c.d.\text{sen}\,\theta \Rightarrow e.c + a.b = c.d \Rightarrow$
$a.b = c(d - e)$ (II)
Substituindo (I) em (II) temos que: $a.b = c(a + b - c) \Rightarrow$
$a.b = a.c + b.c - c^2 \Rightarrow a(b - c) = c(b - c) \Rightarrow b = c$ ou $a = c$, ou seja, ABCD tem dois lados de mesmo comprimento.

8) (Seletiva Brasileira Cone Sul-2001) O quadrilátero convexo ABCD está inscrito em uma circunferência de raio 5 cm. Se AB = 8 cm, AC = $3\sqrt{10}$ cm, CD = 6 cm e $\angle ADC < 90^o$, calcule a área do quadrilátero.

Solução:

Lei dos Senos em ΔADC:

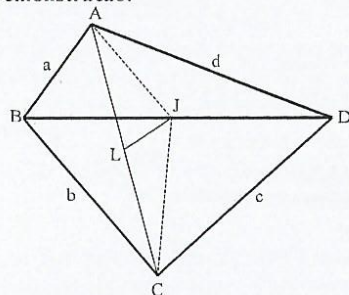
$\dfrac{3\sqrt{10}}{\text{sen}\,D} = \dfrac{6}{\text{sen}\,\alpha} = 10 \Rightarrow \text{sen}\,D = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ e $\text{sen}\,\alpha = 0,6 \Rightarrow \cos\alpha = 0,8$.

Lei dos Senos em ΔABC: $\dfrac{8}{\text{sen}\,\beta} = 10 \Rightarrow \text{sen}\,\beta = 0,8 \Rightarrow \cos\beta = 0,6$

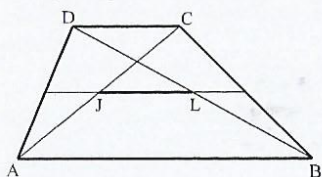
Lei dos Cossenos em ΔADC:
$36 = x^2 + 90 - 2.x.3\sqrt{10}.0,8 \Rightarrow 5x^2 - 24\sqrt{10}.x + 270 = 0 \Rightarrow x = 3\sqrt{10}$
Lei dos Cossenos em ΔABC:
$64 = y^2 + 90 - 2.y.3\sqrt{10}.0,6 \Rightarrow 5y^2 - 18\sqrt{10}.y + 130 = 0 \Rightarrow y = \sqrt{10}$.

Portanto: $S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ABC} = \dfrac{DA.CD.\text{sen}\,D}{2} + \dfrac{AB.BC.\text{sen}\,B}{2} = \dfrac{3\sqrt{10}.6.3\sqrt{10}}{20} + \dfrac{8.\sqrt{10}.3\sqrt{10}}{20} = 39\ cm^2$

8.4) RELAÇÃO DE EULER: "Num quadrilátero qualquer a soma dos quadrados dos quatro lados é igual à soma dos quadrados das diagonais mais quatro vezes o quadrado do segmento que une os pontos médios das diagonais".

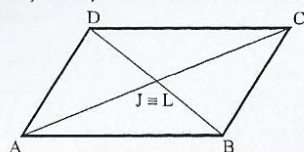
Demonstração:

Considere que $AC = p$ e $BD = q$.
Desde que J é o ponto médio de BD então AJ e CJ são medianas nos triângulos ABD e CBD:
$2a^2 + 2d^2 = q^2 + 4.AJ^2$ e $2b^2 + 2c^2 = q^2 + 4.CJ^2$
Somando essas duas equações:
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - q^2 = 2.AJ^2 + 2.CJ^2$ (1)
Como no triângulo AJC o segmento $JL = m$ é mediana:
$2.AJ^2 + 2.CJ^2 = 4m^2 + p^2$ (2)
Somando (1) e (2):
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p^2 + q^2 + 4m^2$
O segmento que une os pontos médios das diagonais de um quadrilátero denomina-se mediana de Euler.

8.4.1) Relação de Euler em Trapézios

8.4.1.1) Trapézio Escaleno

Consideremos um trapézio onde temos:
$AB = b$ $CD = b'$ $AD = a$ $BC = c$ $AC = p$ $BD = q$
Mediana de Euler: $JL = m = (b - b')/2$
Substituindo na Relação de Euler:
$2.b.b' + a^2 + c^2 = p^2 + q^2$

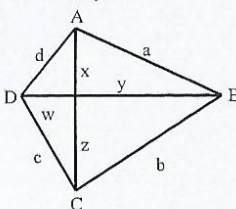
8.4.1.2) Trapézio Isósceles

No trapézio isósceles temos que $AD = CB = a$ e $AC = BD = p$.
A Relação de Euler fica da forma: $a^2 + b.b' = p^2$

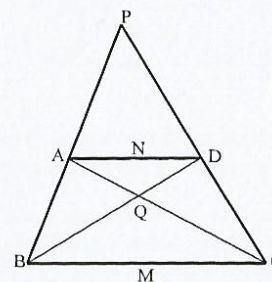
8.4.2) Relação de Euler em Paralelogramos

Consideremos um paralelogramo ABCD onde:
$AB = CD = a$ $BD = BC = b$ $AC = p$ $AD = q$ $JL = 0$
Aplicando na Relação de Euler:
$2(a^2 + b^2) = p^2 + q^2$

8.5) TEOREMAS CLÁSSICOS SOBRE QUADRILÁTEROS:

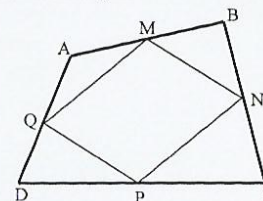
8.5.1) Teorema: "Em um quadrilátero com diagonais ortogonais, a soma dos quadrados de dois lados opostos é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados."

Demonstração:

Escrevendo todas as relações de Pitágoras:
$x^2 + y^2 = a^2$ (1) $y^2 + z^2 = b^2$ (2)
$z^2 + w^2 = c^2$ (3) $w^2 + x^2 = d^2$ (4)
(1) + (3) $\Rightarrow$ $a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$
(2) + (4) $\Rightarrow$ $b^2 + d^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$
Portanto $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

8.5.2) Teorema: "Em um trapézio, os pontos médios das bases, a interseção das diagonais e o ponto de concorrência dos lados não paralelos são quatro pontos colineares."

Demonstração:

Sejam P o encontro dos prolongamentos dos lados AB e CD, Q a interseção das diagonais, N o ponto médio de AD e M o ponto médio de BC.
Trace o segmento PM. Como AD | | BC então PM corta AD na mesma razão de secção em que corta BC. Como M é o ponto médio de BC então PM corta AD em N, que é o ponto médio de AD.
Assim já provamos que P, N e M são colineares. Trace agora os segmentos QN e QM. Como QN e QM são medianas relativas a lados de triângulos semelhantes e AD | | BC, então QN | | QM, fazendo com que $\angle NQM = 180°$, ou seja, N, Q e M estão alinhados.
Assim provamos que P, N, Q e M são colineares.

8.5.3) Teorema: "Seja ABCD um quadrilátero convexo. Os pontos médios dos lados deste quadrilátero formam um paralelogramo."

Demonstração:

Considere o triângulo ABD. Como Q é meio de AD e M é meio de AB então QM | | BD e $QM = BD/2$.
Analogamente, no triângulo CBD temos que NP | | BD e $NP = BD/2$.
Desde que QM | | BD e NP | | BD então QM | | NP.
Da mesma forma pode-se demonstrar que MN | | PQ.
Como os lados opostos de MNPQ são paralelos, então MNPQ é um paralelogramo.

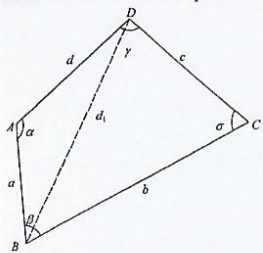
8.5.4) Teorema: Seja ABCD um quadrilátero inscritível e sejam r_a, r_b, r_c e r_d, respectivamente, os raio dos incírculos dos triângulos ΔDAB, ΔABC, ΔBCD, ΔCDA. Prove que $r_a + r_c = r_b + r_d$.

Demonstração:
Sejam $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $x = AC$ e $y = BD$. Assim:

$$r_b + r_d = \frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} + \frac{S_{ACD}}{p_{ACD}} = \frac{abx}{2R(a+b+x)} + \frac{cdx}{2R(c+d+x)} = \frac{x[ab(c+d+x)+cd(a+b+x)]}{2R(a+b+x)(c+d+x)} \quad (1)$$

Note que: $ab(c + d + x) + cd(a + b + x) = abd + acd + abc + bcd + x(ab + cd)$ (2)
Pelo Teorema de Hiparco temos que $x(ab + cd) = y(ad + bc)$. Substituindo em (2):
$ab(c + d + x) + cd(a + b + x) = abd + acd + abc + bcd + y(ad + bc) = ad(b + c + y) + bc(a + d + y)$ (3)
Por outro lado: $x(a + d + y)(b + c + y) = ((a + d)x + ac + bd)(b + c + y) =$
$= (ac + bd)y + (a + d)(b + c)x + (b + c)(ac + bd) + (a + d)xy$ (4)
Pelo Teorema de Ptolomeu temos que $xy = ac + bd$. Substituindo em (4):
$x(a + d + y)(b + c + y) = (ac + bd)y + (a + d)(b + c)x + (b + c)(ac + bd) + (a + d)(ac + bd) =$
$= ((a + b)y + ac + bd)(c + d + x) = y(a + b + x)(c + d + x)$ (5)
Substituindo (3) e (5) em (1) obtemos:

$$r_b + r_d = \frac{y[ad(b+c+y)+bc(a+d+y)]}{2R(b+c+y)(a+d+y)} = \frac{ady}{2R(a+d+y)} + \frac{bcy}{2R(b+c+y)} = \frac{S_{ABD}}{p_{ABD}} + \frac{S_{BCD}}{p_{BCD}} = r_a + r_c.$$

8.5.5) Teorema: Se ABCD é um quadrilátero convexo tal que os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$ medem respectivamente a, b, c e d e que α, β, σ e γ são as medidas dos seus ângulos internos, mostre que a medida da área desse quadrilátero, denotada por (ABCD), é dada por:

$$(ABCD) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\delta} \text{ onde: } p = \frac{a+b+c+d}{2} \text{ e } \delta = \frac{\alpha+\sigma}{2}.$$

Demonstração:

$$(ABCD) = (ABD) + (BCD) \Rightarrow (ABCD) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot d\cdot \text{sen}\alpha + \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \text{sen}\sigma \Rightarrow$$

$$2(ABCD) = a\cdot d\cdot \text{sen}\alpha + b\cdot c\cdot \text{sen}\sigma \Rightarrow (2(ABCD))^2 = (a\cdot d\cdot \text{sen}\alpha + b\cdot c\cdot \text{sen}\sigma)^2 \Rightarrow$$

$$4(ABCD)^2 = a^2\cdot d^2\cdot \text{sen}^2\alpha + 2abcd\cdot \text{sen}\alpha\cdot \text{sen}\sigma + b^2\cdot c^2\cdot \text{sen}^2\sigma$$

Substituindo (sen^2) por $(1-\cos^2)$ e $(\text{sen}\alpha\cdot \text{sen}\sigma)$ por $(\cos\alpha\cdot\cos\sigma - 2\cos^2\delta + 1)$ de 1) fica:

$$4(ABCD)^2 = a^2\cdot d^2\cdot(1-\cos^2\alpha) + 2abcd\cdot(1+\cos\alpha\cdot\cos\sigma - 2\cos^2\delta) + b^2\cdot c^2\cdot(1-\cos^2\sigma)$$

$$4(ABCD)^2 = a^2\cdot d^2\cdot(1-\cos^2\alpha) + abcd\cdot(2+2\cos\alpha\cdot\cos\sigma) + b^2\cdot c^2(1-\cos^2\sigma) - 4abcd\cdot\cos^2\delta$$

$$4(ABCD)^2 = a^2\cdot d^2\cdot(1-\cos^2\alpha) + abcd(1-\cos\alpha-\cos\sigma+\cos\alpha\cdot\cos\sigma+1+$$
$$+\cos\alpha+\cos\sigma+\cos\alpha\cdot\cos\sigma) + b^2c^2(1-\cos^2\sigma) - 4abcd\cdot\cos^2\delta$$

$$4(ABCD)^2 = a^2\cdot d^2(1-\cos^2\alpha) + abcd[(1-\cos\alpha)(1-\cos\sigma)+(1+\cos\alpha)(1+\cos\sigma)]+$$
$$+b^2c^2(1-\cos^2\sigma) - 4abcd\cdot\cos^2\delta$$

$$4(ABCD)^2 = ad(1+\cos\alpha)ad(1-\cos\alpha) + ad(1-\cos\alpha)bc(1-\cos\sigma)+$$
$$+ad(1+\cos\alpha)bc(1+\cos\sigma) + bc(1+\cos\sigma)bc(1-\cos\sigma) - 4abcd\cdot\cos^2\delta$$

$$4(ABCD)^2 = ad(1+\cos\alpha)[ad(1-\cos\alpha)+bc(1+\cos\sigma)] + bc(1-\cos\sigma)[ad(1-\cos\alpha)+bc(1+\cos\sigma)] - 4abcd\cdot\cos^2\delta$$

$$4(ABCD)^2 = [ad(1-\cos\alpha)+bc(1+\cos\sigma)][ad(1+\cos\alpha)+bc(1-\cos\sigma)] - 4abcd\cdot\cos^2\delta$$

$$16(ABCD)^2 = 2(ad - ad\cdot\cos\alpha + bc + bc\cdot\cos\sigma)\cdot 2\cdot(ad + ad\cdot\cos\alpha + bc - bc\cdot\cos\sigma) - 16abcd\cdot\cos^2\delta$$

$$16(ABCD)^2 = -(2ad\cdot\cos\alpha - 2bc\cdot\cos\sigma - 2ad - 2bc)(2ad\cdot\cos\alpha - 2bc\cdot\cos\sigma + 2ad + 2bc) - 16abcd\cdot\cos^2\delta$$

Substituindo $(2ad\cdot\cos\alpha - 2bc\cdot\cos\sigma)$ por $(a^2+d^2-b^2-c^2)$ de 3) fica:

$$16(ABCD)^2 = -(a^2-2ad+d^2-b^2-2bc-c^2)(a^2+2ad+d^2-b^2+2bc-c^2) - 16abcd\cdot\cos^2\delta$$

$$16(ABCD)^2 = -[(a-d)^2-(b+c)^2][(a+d)-(b-c)^2] - 16abcd\cdot\cos^2\delta$$

$$16(ABCD)^2 = (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d) - 16abcd\cdot\cos^2\delta$$

$$(ABCD)^2 = \frac{(-a+b+c+d)}{2}\cdot\frac{(a-b+c+d)}{2}\cdot\frac{(a+b-c+d)}{2}\cdot\frac{(a+b+c-d)}{2} - abcd\cos^2\delta$$

$$(ABCD) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cdot\cos^2\delta}.$$

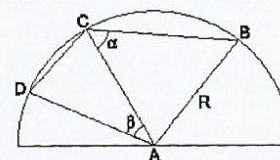
Exercícios

1) (Unicamp-2000) As diagonais D e d de um quadrilátero convexo, não necessariamente regular, formam um ângulo agudo α.

a) Mostre que a área desse quadrilátero é $\frac{D\cdot d}{2}\text{sen}\,\alpha$.

b) Calcule a área de um quadrilátero convexo para o qual D = 8 cm, d = 6 cm e α = 30°.

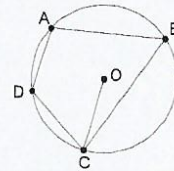
2) (Unicamp-2004) O quadrilátero convexo *ABCD*, cujos lados medem, consecutivamente, 1, 3, 4 e 6 cm, está inscrito em uma circunferência de centro *O* e raio *R*. Calcule o raio *R* da circunferência.

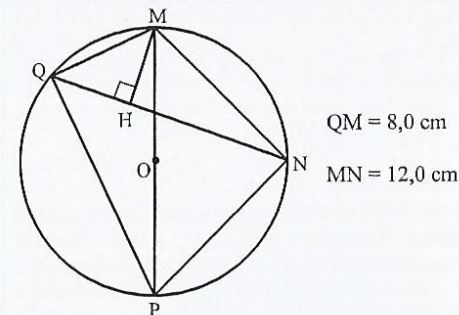
3) (Fuvest-2002) Na figura a seguir, o quadrilátero ABCD está inscrito numa semicircunferência de centro A e raio AB = AC = AD = R. A diagonal AC forma com os lados BC e AD ângulos α e β, respectivamente.

Logo, a área do quadrilátero ABCD é:

a) $R^2(\text{sen } 2\alpha + \text{sen } \beta)/2$ b) $R^2(\text{sen } \alpha + \text{sen } 2\beta)/2$

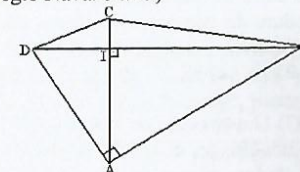
c) $R^2(\cos 2\alpha + \text{sen } 2\beta)/2$ d) $R^2(\text{sen } \alpha + \cos \beta)/2$

e) $R^2(\text{sen } 2\alpha + \cos \beta)/2$

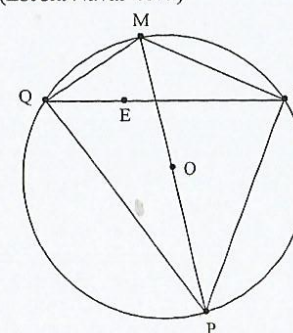
4) (Unifor-99) Na figura abaixo tem-se um quadrilátero ABCD inscrito numa circunferência de centro O.

Sabe-se que $\overline{AB}$ mede 5 cm, $\overline{BC}$ mede 8 cm e que o ângulo $\hat{ADC}$ mede 120°. A medida do raio da circunferência, em centímetros, é igual a:

5) (UFF-96) O quadrilátero MNPQ está inscrito no círculo de centro O e raio 10,0 cm conforme a figura abaixo.

Sabendo-se que a diagonal MP passa por O, o valor de MH, em cm, é:

a) 4,0 b) 4,5 c) 4,8 d) 5,0 e) 5,3

6) (Colégio Naval-98/99)

No quadrilátero ABCD da figura acima, o ângulo $B\hat{A}D$ mede 90° e as diagonais AC e BD são perpendiculares. Qual é a área desse quadrilátero, sabendo que $\overline{BI} = 9$, $\overline{DI} = 4$ e $\overline{CI} = 2$?

a) 26 b) 39 c) 52 d) 65 e) 104

7) (Escola Naval-2005)

O quadrilátero MNPQ está inscrito em uma circunferência de centro O e raio 6cm, conforme a figura acima.

Sabe-se que $\overline{QM}$ = 3cm, $\overline{MN}$ = 8cm e que a diagonal $\overline{MP}$ passa por $\underline{O}$. Se $\underline{E}$ é um ponto do segmento $\overline{QN}$ tal que $\overline{ME}$ é perpendicular a $\overline{QN}$,

então o valor do perímetro do triângulo QME, em cm, é:

a) $5+\sqrt{5}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $7+\sqrt{5}$

d) $\frac{5}{2}+\sqrt{3}$ e) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

8) (ITA-89) Considere um quadrilátero ABCD cujas diagonais AC e BD medem, respectivamente, 5 cm e 6 cm. Se R, S, T e U são os pontos médios dos lados de ABCD, então o perímetro do quadrilátero RSTU vale:
a) 22 cm b) 5,5 cm c) 8,5 cm
d) 11 cm e) 13 cm

9) (ITA-89) Se num quadrilátero convexo de área S, o ângulo entre as diagonais mede $\pi/6$ radianos, então o produto do comprimento destas diagonais é igual a:
a) S b) 2S c) 3S d) 4S e) 5S

10) (IME-67) Um trapézio de vértices ABCD está inscrito em um círculo, de raio R, sendo AB = R e CD = 2R lados não paralelos. Traçam-se as bissetrizes dos ângulos internos do trapézio, de modo que a bissetriz de A intercepta a de D no ponto Q, a de B intercepta a de C no ponto N e a de C intercepta a de D no ponto M. Sabendo que os pontos M, N e Q são interiores ao trapézio ABCD e que o ponto P é a interseção das bissetrizes de A e B, determine a relação entre as áreas dos polígonos MNPQ e ABCD.

11) (IME-68) No quadrilátero qualquer ABCD, P é o meio de AD e M é meio de BC. Unindo-se P a C e M a A, obtém-se o quadrilátero APCM. Sendo a área de ABCD = 18 m², calcular a área de APCM.

12) (IME-76/77) Seja ABCD um quadrilátero convexo. Traçam-se as bissetrizes internas dos ângulos A, B, C e D, que denominam respectivamente T_A, T_B, T_C e T_D e que determinam os pontos $M = T_A \cap T_B$; $N = T_B \cap T_C$; $P = T_C \cap T_D$; $Q = T_A \cap T_D$. Prove que: 1) O quadrilátero MNPQ é inscritível; 2) As retas AB, CD e NQ são concorrentes em um ponto U, bem como as retas AD, BC, e NQ em um outro ponto V.

13) (IME-69) Um quadrilátero inscritível e circunscritível tem um lado igual a 5 metros, área $6\sqrt{5}$ metros quadrados e diagonais inversamente proporcionais a 9 e 3. Calcule os outros lados do quadrilátero.

14) (IME-70) Calcule as diagonais α = AC e β = BD do quadrilátero ABCD inscrito numa circunferência de raio R. Dados:
a = AB = 2m; b = BC = 5m;
c = CD = 6m; d = DA = 3m.

15) (IME-83/84) Dá-se um quadrilátero convexo inscritível em um círculo, cujos lados são cordas deste círculo e de comprimentos a, b, c e d e que se sucedem na ordem a, b, c, d.
1) Calcule, em função de a, b, c, d os comprimentos das diagonais x e y.
2) Permutando a ordem de sucessão das cordas, deduza, com auxílio de figuras, se as diagonais dos novos quadriláteros obtidos têm comprimentos diferentes de x e de y.

16) (IME-88/89) Sejam ABC e ACD dois triângulos retângulos isósceles com o lado AC comum, e os vértices B e D, situados em semiplanos distintos em relação ao lado AC; nestes triângulos AB = AC = a e AD = CD. a) Calcule a diagonal BD, do quadrilátero ABCD; b) Seja E o ponto de interseção de AC com BD. Calcule BE e ED; c) Seja F a interseção da circunferência de diâmetro BC com a diagonal BD. Calcule DF e EF.

17) (EEAR-2003) Em um triângulo ABC, a bissetriz do ângulo A encontra $\overline{BC}$ em D, e a circunferência circunscrita, em E. Sendo AE = 9cm e DE = 4cm, então a medida $\overline{EB}$, em cm, é
a) 6. b) 5. c) $2\sqrt{5}$. d) $3\sqrt{2}$.

18) Considere que ABCD é um quadrilátero ao mesmo tempo inscritível e circunscritível, de modo que AB = 3, BC = 2 e CD = 3. Calcule o valor do raio da circunferência inscrita no quadrilátero ABCD.

19) Seja ABCD um quadrilátero inscrito em uma circunferência, tal que AB = AD = 10 e BD = 5. Calcule o valor de $\frac{CA}{CB+CD}$.

20) Num quadrilátero inscritível os lados medem consecutivamente 24 m, 7 m, 20 m e 15 m. Calcular as diagonais.

21) M, N, P e Q são os pontos médios dos lados do quadrilátero convexo ABCD. Provar que a área de MNPQ é igual à metade da área de ABCD.

22) Seja *P* um ponto sobre o menor arco *AC* da circunferência circunscrita a um triângulo equilátero *ABC*. Prove que *PB* = *PA* + *PC*.

23) A ceviana AQ do triângulo equilátero ABC é prolongada encontrando o circuncírculo em P. Mostre que $\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}=\frac{1}{PQ}$.

24) Prove que, se *ABCDEFG* é um heptágono regular convexo, então: $\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$.

25) Considere um quadrilátero inscritível ABCD cujos lados AB, BC, CD e DA medem, respectivamente, 1, 2, 2 e 3.
a) Calcule o valor da área do quadrilátero ABCD.
b) Calcule o valor da menor diagonal deste quadrilátero.
c) Determine o valor da mediana de Euler do quadrilátero.
d) Determine o valor do raio do círculo circunscrito ao quadrilátero.

26) Os comprimentos dos lados de um quadrilátero inscritível são 6, 4, 5 e 3, respectivamente. Determine o raio da circunferência circunscrita.

27) Prove, utilizando o Teorema de Ptolomeu, que em um trapézio isósceles de bases a e b e lados iguais de comprimento c o valor da diagonal é igual a $\sqrt{a.b+c^2}$.

28) E é um ponto no lado AD de um retângulo ABCD tal que DE = 6, enquanto que DA = 8 e DC = 6. Se CE é prolongado (a partir de E) até encontrar o circuncírculo do retângulo em F, determine o valor das cordas DF e FB, utilizando o Teorema de Ptolomeu.

29) No lado AB de um quadrado ABCD, um triângulo retângulo ΔABF (com hipotenusa AB) é traçado externamente ao quadrado. Se AF = 6 e BF = 8, determine EF, onde E é o ponto de encontro das diagonais do quadrado, aplicando o Teorema de Ptolomeu.

30) Um ponto P, sobre o lado AB do triângulo retângulo ΔABC, é marcado de modo que BP = PA = 2. O ponto Q está na hipotenusa AC tal que PQ é perpendicular a AC. Se CB = 3, determine a medida de BQ, usando o teorema de Ptolomeu.

31) As diagonais AC e BD do quadrilátero ABCD intersectam-se em E. Sabendo-se que AE = 2, BE = 5, CE = 10, DE = 4 e BC = 15/2:
a) demonstre que ABCD é inscritível;
b) determine o valor de AB.

32) Se um triângulo isósceles ΔABC (AB = AC) está inscrito em um círculo e um ponto P é marcado sobre o menor arco BC, prove, usando o Teorema de Ptolomeu, que $\frac{PA}{PB+PC}=\frac{AC}{BC}$.

33) Se um quadrado ABCD está inscrito em um círculo e um ponto P é marcado sobre o menor arco BC, prove, usando o Teorema de Ptolomeu, que $\frac{PA+PC}{PB+PD}=\frac{PD}{PA}$.

34) Um hexágono regular ABCDEF está inscrito em um círculo. Se um ponto P é marcado no menor arco BC, prove, usando o Teorema de Ptolomeu, que PE + PF = PA + PB + PC + PD.

35) Em um quadrilátero convexo ABCD as diagonais concorrem em E. Se as áreas das regiões BEC, CED, DEA e AEB são a, b, c e d respectivamente, prove que a.c = b.d.

36) Sejam a, b, c e d os lados de um quadrilátero convexo com área A. Prove que:
a) $A \le (ab+cd)/2$; b) $A \le (ac+bd)/2$;
c) $A \le (a+c)(b+d)/4$.

37) Seja ABCD um quadrilátero inscritível onde AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = p e BD = q. Considere que R é o raio da circunferência circunscrita. Demonstre que:

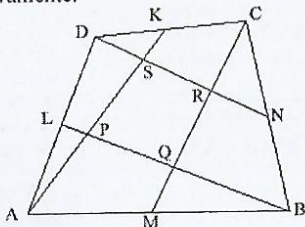
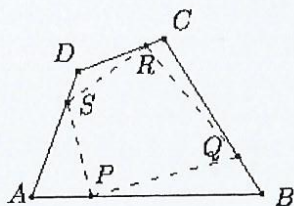
a) $\text{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{a.d+b.c}}$;

b) $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{a.d+b.c}}$;

c) $q=\sqrt{\frac{(a.b+c.d)(a.c+b.d)}{a.d+b.c}}$;

d) $p=\sqrt{\frac{(a.d+b.c)(a.c+b.d)}{a.b+c.d}}$;

e) $R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(a.b+c.d)(a.c+b.d)(a.d+b.c)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$.

38) Na figura, ABCD é um quadrilátero convexo, K, L, M e N são os pontos médios dos lados e PQRS é um quadrilátero formado pelas interseções de AK, BL, CM e DN. Determine a área do quadrilátero PQRS se a área do quadrilátero ABCD é 3000 e as áreas dos quadriláteros AMQP e CKRS são 513 e 388, respectivamente.

39) Determine k se P, Q, R e S são pontos nos lados do quadrilátero ABCD tais que $\frac{AP}{PB}=\frac{BQ}{QC}=\frac{CR}{RD}=\frac{DS}{SA}=k$, e a área do quadrilátero PQRS é 52% da área do quadrilátero ABCD.

40) Demonstre o Teorema de Bretschneider: "Seja ABCD um quadrilátero convexo onde AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = m e BD = n. Então: $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2.a.b.c.d.\cos(A + C)$."

41) Calcular as diagonais de um quadrilátero inscritível cujos lados são: AB = 5 cm, BC = 8 cm, CD = 12 cm e DA = 20 cm.

42) As diagonais de um quadrilátero inscritível medem 20 cm e 25 cm; dois lados opostos medem 15 cm e 24 cm. Calcular os outros dois lados do quadrilátero.

43) Uma circunferência que passa pelo vértice A de um paralelogramo ABCD intercepta a diagonal AC = 16 cm no ponto P e os lados AB = 12 cm e AD = 8 cm nos pontos M e N, tais que AM = 10 cm e AN = 5 cm. Calcular a corda AP.

44) Os lados de um quadrilátero inscritível são: AB = 2,1 cm, BC = 4,5 cm, CD = 6 cm e DA = 7,2 cm. Calcular as diagonais do quadrilátero e o raio do círculo circunscrito a ABCD.

45) As cordas correspondentes a dois arcos de uma circunferência de raio 5 cm medem 4 cm e 6 cm. Calcular a corda do arco soma desses dois arcos.

46) ABCD é um quadrilátero inscritível cujas diagonais AC e BD cortam-se em I. Demonstrar a relação: $\frac{IA}{IC}=\frac{AB.AD}{CD.BC}$

47) Provar que o produto das bases de um trapézio isósceles circunscrito a um círculo é igual ao quadrado do diâmetro do círculo.

48) Demonstrar que em todo quadrilátero inscritível o produto das distâncias de um ponto qualquer da circunferência circunscrita a dois lados opostos é igual ao produto das distâncias do mesmo ponto às diagonais.

49) ABCD é um quadrilátero inscritível em uma circunferência no qual a diagonal BD passa pelo ponto médio da diagonal AC. Demonstrar que AB x AD = BC x CD.

50) Num quadrilátero ABCD, inscrito em uma circunferência, o lado DA é um diâmetro. Demonstrar que subsiste entre as medidas AB = a, BC = b, CD = c e DA = d dos lados desse quadrilátero a relação $(d^2 - a^2 - b^2 - c^2)d = 2abc$.

51) ABCD é um quadrilátero inscritível. As distâncias dos vértices B e D à diagonal AC são x e y, e as distâncias dos vértices A e C à diagonal BD são u e v. Demonstrar que xy = uv.

52) Seja ABCD um quadrilátero inscritível, para o qual AB ⊥ CD. Sejam a, b, c e d os comprimentos dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Prove que $(ab + cd)^2 + (ad + bc)^2 = (b^2 - d^2)^2$.

53) Sejam a, b, c e d os comprimentos dos quatro lados consecutivos de um quadrilátero inscritível. Determine o perímetro do paralelogramo formado pela união dos pontos médios dos lados consecutivos do quadrilátero sabendo-se que $ab + cd = 2$, $bc + ad = 3$ e $ac + bd = 6$.

54) Um quadrilátero está inscrito em uma circunferência. Um lado é o diâmetro da circunferência e os outros lados medem 3, 4 e 5. Qual é o comprimento do diâmetro da circunferência?

55) Um quadrilátero ABCD está circunscrito sobre uma circunferência γ e γ ∩ AB, BC, CD, DA = E, F, G, H, respectivamente. Seja AC ∩ BD = I e AH = AE = a, BE = BF = b, CF = CG = c e DG = DH = d. Prove que $\frac{IA}{IC}=\frac{a}{c}$ e $\frac{IB}{ID}=\frac{b}{d}$.

56) Seja ACEG um quadrilátero circunscrito a uma circunferência, cujos pontos de tangência são B, D, F e H, com B em AC, D em CE, F em EG e H em GA. Se AB = 3, CD = 4, EF = 5 e GH = 6, determine o valor da área de ACEG.

57) Três lados de um quadrilátero convexo ABCD possuem comprimentos AB = a, BC = b e CD = c. Se a área do quadrilátero é a maior possível, prove que o comprimento x do quarto lado satisfaz a equação $x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0$.

58) Um quadrilátero com lados 1, 1, 1 e d está inscrito em uma circunferência. Determine o valor do raio R da circunferência em função de d.

59) Seja ABCD um quadrilátero circunscritível em uma circunferência, onde AB = a, BC = b, CD = c e DA = d. Prove que a área de ABCD é igual a $a.b.c.d.\left(\text{sen}\left(\frac{\angle B+\angle D}{2}\right)\right)^2$.

60) O ângulo entre os lados AB e CD de um quadrilátero convexo ABCD é igual a α. Considerando que AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, prove que:
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(a.b.\cos B + b.c.\cos C + c.a.\cos\alpha)$

61) Um círculo de raio r_1 é tangente as lados DA, AB e BC de um quadrilátero convexo ABCD; um círculo de raio r_2 é tangente aos lados AB, BC e CD; os raios r_3 e r_4 são definidos analogamente. Prove que: $\frac{AB}{r_1}+\frac{CD}{r_3}=\frac{BC}{r_2}+\frac{AD}{r_4}$.

62) (Bulgária-96) O quadrilátero ABCD está inscrito em uma circunferência com raio 1, uma circunferência pode ser inscrita em ABCD e sabe-se que AB = AD. Prove que:
a) a área do quadrilátero ABCD não excede 2;
b) o inraio de ABCD não excede $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

63) (Seletiva Brasileira Cone Sul-2001) Um quadrilátero ABCD é especial se for inscritível e tiver diagonais perpendiculares. Seja ABCD um quadrilátero inscritível, T o ponto de interseção das diagonais, O o centro da circunferência circunscrita e P o ponto médio de BC. Prove que:
a) a reta perpendicular ao lado AD por T contém o ponto P.
b) 2.OP = AD.

64) (OBM-2003) São dados: uma circunferência K e um ponto A interior, fixo, distinto do centro. Determine os pontos B, C e D sobre a circunferência de forma que a área do quadrilátero $ABCD$ seja a maior possível.

65) (Rússia-64) Uma circunferência está inscrita em um quadrilátero ABCD. AB é paralelo a CD, e BC = AD. As diagonais AC e BD cortam-se em E. As circunferências inscritas em ABE, BCE, CDE, DAE possuem raios r_1, r_2, r_3, r_4 respectivamente. Prove que $1/r_1 + 1/r_3 = 1/r_2 + 1/r_4$.

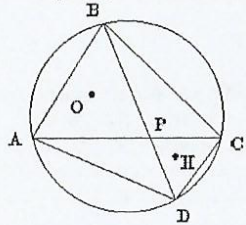
66) (Argentina-95) Em uma circunferência de centro O e raio 1 marcam-se os pontos A, B, C e D seguindo o sentido horário. Se $\angle AOB = 120°$, $\angle BOC = 60°$ e $\angle COD = 150°$, calcular a área do quadrilátero $ABCD$.

67) (Argentina-97) Sejam A, B, C, D pontos de uma circunferência tais que AB é perpendicular a CD e seja P o ponto de interseção de AB e CD. Se $AP = 8$, $DP = 6$, $CP = 15$, calcular o diâmetro da circunferência.

68) (Argentina-97) Os quatro lados de um trapézio isósceles são tangentes a uma circunferência e os pontos de tangência são vértices de um quadrilátero cuja área es 4/9 da área do trapézio. Se a é a base menor do trapézio e b é a base maior do trapézio, determinar a/b.

69) (Argentina-2000) Seja $ABCD$ um quadrilátero com $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, $\angle BAD = 60°$, $AB = 7$ e $AD = 8$. Calcular as medidas de BC e CD.

70) (Yucatan-95) Seja ABCD um quadrilátero inscritível. As retas AC e BD intersectam-se no ponto P e AB intersecta DC no ponto E. Demonstre que a bissetriz do ângulo APD é paralela à bissetriz do ângulo AED.

71) (Yucatan-99) Seja ABCD um quadrilátero inscrito em uma circunferência. As retas BD e AC cortam-se no ponto P. Se O é o circuncentro do triângulo APB e H é o ortocentro do triângulo CPD, demonstre que O, P e H estão alinhados.

72) (Wisconsin-99) Em um quadrilátero convexo ABCD as diagonais AC e BD são perpendiculares. Dado que AB = 8, BC = 7 e DA = 4, determine CD.

73) (Novo México-95) O lado AB de um quadrilátero inscritível ABCD é o diâmetro do circuncírculo e BC = 7, CD = DA = 3. Qual o comprimento do diâmetro AB?

74) (Canadá-75) Seja ABCD um quadrilátero inscritível em uma circunferência. Sejam P, Q, R e S os pontos médios dos arcos AB, BC, CD, DA, compreendidos entre dois vértices consecutivos do quadrilátero. Prove que PR é perpendicular à QS.

75) (Noruega-93) Seja ABCD um quadrilátero convexo. Seja A' o ponto médio de AB, B' o ponto médio de BC, C' o ponto médio de CD e D' o ponto médio de AD. Trace as retas A'C' e B'D' e seja P sua interseção. Sejam a, b, c e d as áreas dos quatro quadriláteros AA'PD', A'BB'P, B'CC'P e C'DD'P. Prove que $a + c = b + d$.

76) (Bulgária-2001) Dado um quadrilátero ABCD tal que OA(OC + OD) = OB.OD, onde O é a interseção das diagonais. O centro da circunferência circunscrita a ΔABC intercepta a reta BD no ponto Q. Prove que CQ é a bissetriz de ∠DCA.

77) (Bulgária-2001) As diagonais AC e BD de um quadrilátero inscritível ABCD interceptam-se no ponto E. Prove que se ∠BAD = 60° e AE = 3.CE então a soma de dois dos lados do quadrilátero é igual a soma dos outros dois lados.

78) (Irlanda-97) ABCD é um quadrilátero que está circunscrito a uma circunferência &. Se ∠A = ∠B = 120°, ∠D = 90° e BC possui comprimento 1, prove que $AD = \sqrt{2}$ sen 15°.

79) (Irlanda-2000) Seja ABCD um quadrilátero inscritível e R o raio da circunferência circunscrita. Sejam a, b, c e d os comprimentos dos lados de ABCD e S sua área. Prove que $R^2 = \dfrac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{16S^2}$.

80) (Báltica-92) O quadrilátero ABCD está inscrito em uma circunferência de raio 1 de modo que a diagonal AC é o diâmetro da circunferência, enquanto que a outra diagonal BD possui mesmo comprimento que AB. As diagonais interceptam-se em P. Sabe-se que o comprimento de PC é 2/5. Determine o comprimento de CD.

81) (Torneio das Cidades-81) ABCD é um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência de centro O e suas diagonais são perpendiculares. Prove que a linha poligonal aberta AOC divide o quadrilátero em duas partes de áreas iguais.

82) (Torneio das Cidades-86) Temos um trapézio ABCD e o ponto M de interseção das diagonais. Os lados paralelos são AD e BC e sabe-se que AB é perpendicular a AD e o trapézio possui uma circunferência inscrita. Se o raio da circunferência inscrita é R, determine a área do triângulo DCM.

83) (Suécia-90) Um quadrilátero ABCD é inscrito em uma circunferência. As bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ encontram-se em E. Trace uma reta paralela a CD passando por E, que intercepta AD em L e BC em M. Mostre que $\overline{LA} + \overline{MB} = \overline{LM}$.

84) (Interprovincial-2001) Uma circunferência está inscrita em um quadrilátero ABCD. Os lados BC e DA possuem igual comprimento e os lados AB e CD são paralelos, com comprimentos 9 e 16, respectivamente. Qual é o raio da circunferência?

85) (Aime-2000) Uma circunferência de raio r está inscrita em um quadrilátero ABCD. Ela tangencia AB em P e CD em Q. Se AP = 19, PB = 26, CQ = 37, QD = 23, determine o valor de r.

86) (Suécia-86) ABCD é um quadrilátero de área S. As diagonais encontram-se em X. Sabendo-se que área de ΔABC = S_1 e área de CDX = S_2, mostre que $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \le \sqrt{S}$, com igualdade se e somente se AB é paralelo a CD.

87) (OBM-2002) Em um quadrilátero convexo $ABCD$, os lados opostos AD e BC são congruentes e os pontos médios das diagonais AC e BD são distintos. Prove que a reta determinada pelos pontos médios das diagonais forma ângulos iguais com AD e BC.

88) (OBM-98) Uma reta que passa pelos pontos médios de dois lados opostos de um quadrilátero convexo forma ângulos iguais com ambas as diagonais. Mostre que as duas diagonais têm o mesmo comprimento.

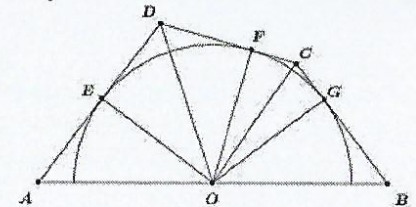
89) (Seletiva Brasileira Cone Sul-94) Seja ABCD um quadrilátero inscritível, M o ortocentro de ABC e N o ortocentro de ABD. Prove que MNDC é um paralelogramo.

90) (Seletiva Brasileira Cone Sul-99) Seja ABCD um quadrilátero convexo, M o ponto médio de BC e N o ponto médio de AD. Prove que [ABMN] = [NMCD] ⇔ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.
Obs: [ ] denota área.

91) (Cone Sul-95) A semicircunferência de centro O e diâmetro AC divide-se em dois arcos AB e BC na relação 1: 3. M é o ponto médio do raio OC. Seja T o ponto do arco BC tal que a área do quadrilátero OBTM é máxima. Calcular esta área em função do raio.

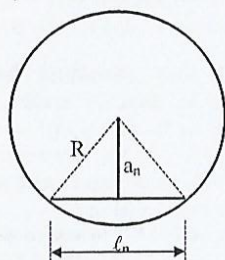
92) (Canadá-78) Os lados AD e BC de um quadrilátero convexo ABCD são prolongados até intersectar em E. Sejam H e G os pontos médios de BD e AC, respectivamente. Determine a razão entre as áreas do triângulo EHG e do quadrilátero ABCD.

93) (Seletiva Brasileira Cone Sul-2004) No quadrilátero convexo ABCD, $B\hat{A}C = C\hat{B}D$ e $A\hat{C}D = B\hat{D}A$. Mostre que $AC^2 = BC^2 + AD^2$.

94) (W. J. Blundon-98) O quadrilátero ABCD abaixo possui as seguintes propriedades:
(1) O ponto médio O do lado AB é o centro de uma semi-circunferência;
(1) os lados AD, DC e CB são tangentes à esta semi-circunferência.
Prove que $AB^2 = 4.ADxBC$.

Polígonos

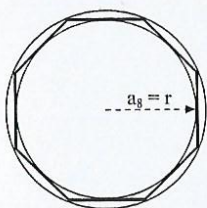
9.1) NOMES PRÓPRIOS DOS POLÍGONOS MAIS IMPORTANTES

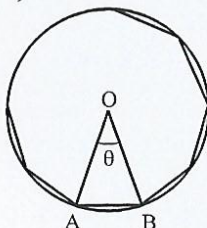
nº de lados	nome	nº de lados	nome	nº de lados	nome
3	triângulo	11	undecágono	19	eneadecágono
4	quadrilátero	12	dodecágono	20	icoságono ou vintenágono
5	pentágono	13	tridecágono	25	pentavintenágono
6	hexágono	14	tetradecágono	30	trintenágono
7	heptágono	15	pentadecágono		
8	octógono	16	hexadecágono		
9	eneágono	17	heptadecágono		
10	decágono	18	octadecágono		

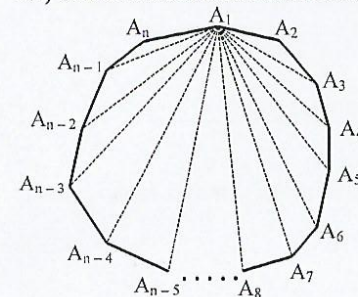
9.2) LADO E APÓTEMA

Considere que são marcados n pontos igualmente espaçados ao longo de uma circunferência. Designamos por ℓ_n a corda desta circunferência que liga dois pontos consecutivos, ou seja, ℓ_n é o lado do polígono convexo regular de n lados, inscrito na circunferência. Por exemplo, ℓ_8 é o lado do octógono convexo regular. Chamamos de apótema de um polígono regular à distância do centro do círculo circunscrito a um dos lados. Para todo polígono convexo temos:

$$R^2 = (a_n)^2 + \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 \Rightarrow a_n = \sqrt{R^2 - \frac{(\ell_n)^2}{4}}$$

9.2.1) Inscrição e Circunscrição

Todo polígono regular é inscritível e circunscritível, e as circunferências inscrita e circunscrita no polígono são concêntricas. O apótema de um polígono regular é o raio da circunferência inscrita.

Por exemplo, no caso do octógono regular temos a seguinte figura.

9.3) ÂNGULO CENTRAL DE UM POLÍGONO REGULAR

Ângulo central de polígono regular é o ângulo ∠AOB, onde O é o centro do circuncírculo e AB é um lado do polígono. Um polígono regular de n lados possui n ângulos centrais, todos valendo $\theta_n = \frac{360^\circ}{n}$.

9.4) SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO CONVEXO

Seja $A_1A_2A_3...A_n$ um polígono regular de n lados. Escolha um vértice qualquer e trace, a partir deste vértice, todas as diagonais possíveis, fazendo com que o polígono fique dividido em n – 2 triângulos. Note que a soma dos ângulos internos do polígono é igual à soma dos ângulos internos de todos os n – 2 triângulos.

Assim, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a $S_i = (n-2).180^\circ$.

No caso de um polígono regular, os n ângulos interno são todos iguais e valem $\alpha_i = \frac{(n-2).180^\circ}{n}$, $1 \le i \le n$, $n \ge 3$.

9.4.1) Soma dos Ângulos Externos de um Polígono Convexo

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ os ângulos inteiros de um polígono convexo e $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ os ângulos externos de um polígono convexo. Sabemos que $\beta_i = 180^\circ - \alpha_i$, $1 \le i \le n$. Portanto:

$S_e = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n = 180^\circ - \alpha_1 + 180^\circ - \alpha_2 + ... + 180^\circ - \alpha_n = 180^\circ.n - (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n) \Rightarrow$

$S_e = 180^\circ.n - S_i = 180^\circ.n - (n-2)180^\circ = 180^\circ.n - 180^\circ.n + 360^\circ \Rightarrow S_e = 360^\circ$.

Em um polígono regular, todos os n ângulos externos são iguais e valem $\beta_i = \frac{360^\circ}{n}$, $1 \le i \le n$, $n \ge 3$.

9.5) NÚMERO DE DIAGONAIS DE UM POLÍGONO DE N LADOS

Seja $A_1A_2A_3...A_n$ um polígono de n lados. A partir de cada um dos n vértices podemos traçar n – 3 diagonais. Entretanto, como cada diagonal possui duas extremidades, n(n – 3) é igual a duas vezes o número de diagonais. Portanto, o número de diagonais de um polígono de n lados é $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Exemplos:

1) (Fuvest-93) Os pontos B, P e C pertencem a uma circunferência & e BC é lado de um polígono regular inscrito em &. Sabendo-se que ∠BPC mede 18° podemos concluir que o número de lados do polígono é igual a:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 10 e) 12

Solução:

Como ∠BPC é um ângulo inscrito, o ângulo central correspondente à corda BC vale 2.∠BPC = 36°.

Pela equação do ângulo central: $\frac{360^\circ}{n} = 36^\circ \Rightarrow n = 10$.

2) (Epcar-2001) Um polígono regular possui, a partir de cada um dos seus vértices, tantas diagonais quantas são as diagonais de um hexágono. Cada ângulo interno desse polígono mede, em graus,

a) 140 b) 150 c) 155 d) 160

Solução:

O número de diagonais de um hexágono é igual a $d_6 = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{6.3}{2} = 9$.

Como a partir de cada vértice podemos traçar n – 3 diagonais, então $n - 3 = 9 \Rightarrow n = 12$.

Portanto, o ângulo interno vale $\alpha = \frac{(n-2).180^\circ}{n} = \frac{10.180^\circ}{12} = 150$.

3) (Colégio Naval-83) O total de diagonais de dois polígonos regulares é 41. Um desses polígonos tem dois lados a mais que o outro. O ângulo interno do polígono que tem o ângulo central menor, mede:
a) 120° b) 135° c) 140° d) 144° e) 150°

Solução:

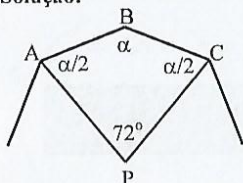
Sejam n − 2 e n os lados dos polígonos. Deste modo: $41 = \frac{(n-5)(n-2)}{2} + \frac{(n-3)n}{2} \Rightarrow$

$82 = n^2 - 7n + 10 + n^2 - 3n \Rightarrow n^2 - 5n - 36 = 0 \Rightarrow (n-9)(n+4) = 0 \Rightarrow n = 9.$

Como o polígono que possui ângulo central menor possui mais lados então:

$\alpha = \frac{(n-2)180^o}{n} = \frac{7.180^o}{9} = 140^o$

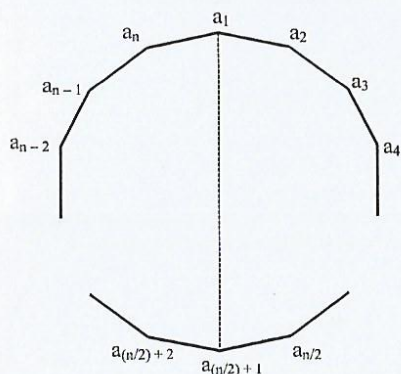
4) (Colégio Naval-81) Um polígono ABCD... é regular. As bissetrizes internas dos ângulos dos vértices A e C formam um ângulo de 72°. O número de lados desse polígono é:
a) 7 b) 10 c) 12 d) 15 e) 20.

Solução:

Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°, em ABCP temos que: $\alpha/2 + \alpha + \alpha/2 + 72^o = 360^o \Rightarrow$
$2\alpha = 288^o \Rightarrow \alpha = 144^o$

Assim: $144^o = \frac{(n-2)180^o}{n} \Rightarrow n = 10$

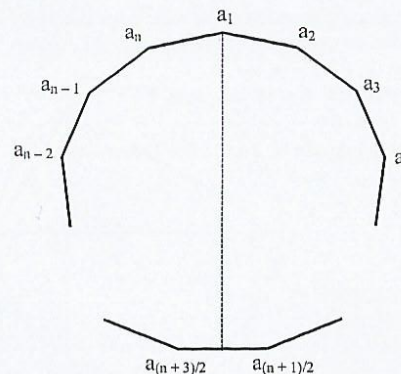
5) (Colégio Naval-90) Um polígono regular admite para medida de suas diagonais apenas os números n_1, n_2, n_3, ..., n_{27}, tais que $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_{27}$.
Logo este polígono
a) tem 30 lados b) pode ter 54 lados c) pode ter 57 lados
d) pode ter 58 lados e) tem um número de lados maior que 60

Solução:

Separemos esta solução em dois casos:
I) Número par de lados: cada vértice possui um vértice diametralmente oposto.

Sejam a_1, a_2, ..., a_n os vértices do polígono. Note que a diagonal $\overline{a_1a_{(n/2)+1}}$ é uma linha de simetria em relação às diagonais traçadas a partir do vértice a_1. Assim, temos que:
$n_1 = \overline{a_1a_3}$, $n_2 = \overline{a_1a_4}$, ..., $n_{26} = \overline{a_1a_{n/2}}$, $n_{27} = \overline{a_1a_{(n/2)+1}}$.

Deste modo: $\frac{n}{2} + 1 = 29 \Rightarrow n = 56$

Como nenhuma alternativa inclui n = 56, devemos ter um número ímpar de vértices.

II) Número ímpar de lados: cada vértice possui um lado diametralmente oposto.

Neste caso, podemos traçar uma linha de simetria que liga a_1 até o ponto médio de um lado oposto. Neste caso:
$n_1 = \overline{a_1a_3}$, $n_2 = \overline{a_1a_4}$, ..., $n_{27} = \overline{a_1a_{(n+1)/2}}$.

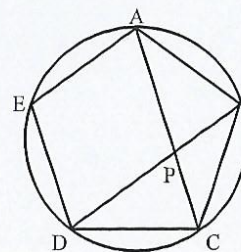
Portanto: $\frac{n+1}{2} = 29 \Rightarrow n = 57$

6) (ITA-2003) Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 3780°. O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a:
a) 63 b) 69 c) 90 d) 97 e) 106

Solução:

Sejam x − r, x e x + r as quantidades de lados dos polígonos. Deste modo:
$180^o(x - r - 2) + 180^o(x - 2) + 180^o(x + r - 2) = 3780^o \Rightarrow$
$x - r - 2 + x - 2 + x + r - 2 = 21 \Rightarrow 3x = 27 \Rightarrow x = 9$
Deste modo: $(9 - r)(9)(9 + r) = 585 \Rightarrow 81 - r^2 = 65 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4$
Concluímos, então, que as quantidades de lados são iguais a 5, 9 e 13.
Como o número de diagonais de um polígono de n lados é d(n) = n(n − 3)/2:
$S = \frac{5.2}{2} + \frac{9.6}{2} + \frac{13.10}{2} \Rightarrow S = 97$

7) Seja ABCDE um pentágono regular, de modo que os lados deste pentágono sejam AB, BC, CD, DE e EA. Determine o ângulo agudo formado pela interseção entre AC e BD.

Solução:

Pela simetria da figura, temos que ΔPBC e ΔABC são triângulos isósceles. Sabemos que $\angle ABC = \frac{3.180^o}{5} = 108^o$.
Note que ∠BAC, por ser um ângulo inscrito, é metade do ângulo central, ou seja, $\angle BAC = \frac{360^o}{5.2} = 36^o$.
Portanto, temos que:
$\angle ABP = \angle ABC - \angle CBD = \angle ABC - \angle BAC = 108^o - 36^o = 72^o$
Deste modo:
$\angle APB = 180^o - (\angle ABP + \angle BAP) = 180^o - (72^o + 36^o) = 72^o$

8) (OBM-98) Todos os ângulos internos de um polígono convexo são menores que (não podendo ser iguais a) 160°. O número de lados desse polígono é, no máximo, igual a:
a) 12 b) 14 c) 15 d) 17 e) 18

Solução:
Sabemos que a soma de ângulo interno α_i e um externo β_i (relativos ao mesmo vértice), é igual a 180°. Se todos os ângulos internos são menores que 160°, então todos os externos são maiores que 20°. Como a soma de todos os ângulos externos é igual a 360°, temos que:
$360^\circ = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + ... + \beta_n > 20^\circ + 20^\circ + 20^\circ + ... + 20^\circ = 20^\circ.n \Rightarrow n < 18 \Rightarrow n_{max} = 17.$

9) (Olimpíada da Estônia-2001) Os ângulos de um n-ágono convexo são α, 2α, ..., $n\alpha$. Determine todos os valores possíveis de n e os valores correspondentes de α.
Solução:
Soma dos ângulos internos de um n-ágono convexo:

$$\alpha + 2\alpha + ... + n\alpha = (n-2).180^\circ \Rightarrow \frac{n(n+1)\alpha}{2} = (n-2)180^\circ \Rightarrow n\alpha = \frac{(n-2)360^\circ}{(n+1)}$$

Como o polígono é convexo: $n\alpha < 180^\circ \Rightarrow \frac{(n-2)360^\circ}{(n+1)} < 180^\circ \Rightarrow 2n - 4 < n + 1 \Rightarrow n < 5$

Assim, temos dois casos a considerar:
i) $n = 3 \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow$ ângulos internos iguais a 30°, 60° e 90°
ii) $n = 4 \Rightarrow \alpha = 36^\circ \Rightarrow$ ângulos internos iguais a 36°, 72°, 108° e 144°

10) É dado um polígono regular de n lados. Assinale aleatoriamente, no seu interior, um ponto M. Sendo $x_1, x_2, ..., x_n$ as distâncias de M a cada um dos lados, verifique que: $x_1 + x_2 + ... + x_n < \frac{n^2 a}{2\pi}$
onde a é a medida do lado do polígono.
Solução:
Sejam O o centro e $A_1, A_2, ..., A_n$ os vértices do polígono. Podemos supor, sem perda de generalidade, que x_i é a distância de M ao lado A_iA_{i+1} (aqui, $A_{n+1} = A_1$). Então

$$A(A_1A_2...A_n) = \sum_{i=1}^{n} A(A_iMA_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{ax_i}{2} = \frac{a}{2}(x_1 + x_2 + ... + x_n) \quad (*)$$

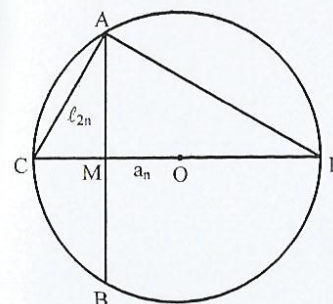
Por outro lado, sendo r o raio do círculo Γ inscrito no polígono, temos também

$$A(A_1A_2...A_n) = \sum_{i=1}^{n} A(A_iOA_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{ar}{2} = n \times \frac{ar}{2} \quad (**)$$

Comparando (*) e (**), concluímos que $x_1 + x_2 + ... + x_n = nr$. Agora, note que o perímetro de Γ é menor que o do polígono, o que nos dá $2\pi r < na$. Então

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = nr < \frac{n^2 a}{2\pi}$$

9.6) DUPLICAÇÃO DO GÊNERO DE UM POLÍGONO CONVEXO

Calculemos o valor de ℓ_{2n} em função de ℓ_n, onde ℓ_x é o lado do polígono regular convexo de x lados inscrito em uma circunferência de raio R.

Seja AB = ℓ_n e o diâmetro CD perpendicular a AB. Como o ponto C é o ponto médio do arco AB, então AC = ℓ_{2n}.
Como ΔACD é retângulo: $AC^2 = CM.CD \Rightarrow$

$$(\ell_{2n})^2 = 2R.(R - a_n) \Rightarrow (\ell_{2n})^2 = 2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{(\ell_n)^2}{4}}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\ell_{2n} = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{(\ell_n)^2}{4}}\right)}}$$

9.7) ÁREA DE UM POLÍGONO REGULAR

9.7.1) Em função do perímetro e do apótema:

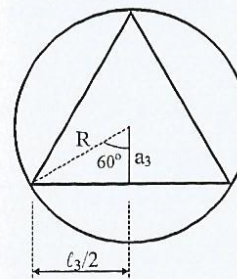
Como um polígono regular de n lados pode ser divido em n triângulos isósceles congruentes de base ℓ_n e apótema a_n, temos que: $\boxed{S_n = n\frac{\ell_n.a_n}{2}}$

Entretanto, como $n.\ell_n$ é o perímetro $2p_n$ do polígono regular de n lados, então: $\boxed{S_n = p_n.a_n}$

9.7.2) Em função do ângulo central e do raio da circunferência circunscrita:

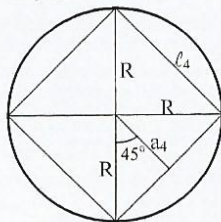
Separando o polígono regular em n triângulos isósceles congruentes com ângulo oposto à base ℓ_n igual a $\frac{360^\circ}{n}$ e lados iguais valendo R, temos que: $\boxed{S = \frac{n.R^2}{2}sen\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}$.

9.8) ESTUDO DOS POLÍGONOS REGULARES CONVEXOS INSCRITOS EM UMA CIRCUNFERÊNCIA DE RAIO R

9.8.1) Triângulo Equilátero

Na figura ao lado, nota-se que a_3 e o raio R fazem um ângulo de 60°.

Assim: $\frac{\ell_3}{2} = R.sen60^\circ \Rightarrow$ $\boxed{\ell_3 = R\sqrt{3}}$

Do mesmo modo: $a_3 = R.\cos 60^\circ \Rightarrow$ $\boxed{a_3 = \frac{R}{2}}$

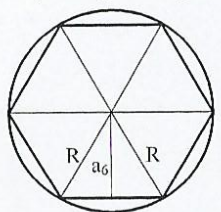
Para a área temos: $S_3 = 3\frac{\ell_3.a_3}{2} \Rightarrow$ $\boxed{S_3 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}}$

9.8.2) Quadrado

Como a diagonal do quadrado coincide com o diâmetro da circunferência, então seu valor é 2R.

Pelo Teorema de Pitágoras: $(\ell_4)^2 = R^2 + R^2 \Rightarrow$ $\boxed{\ell_4 = R\sqrt{2}}$

Para o apótema temos: $a_4 = R.\cos 45^o \Rightarrow$ $\boxed{a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}}$

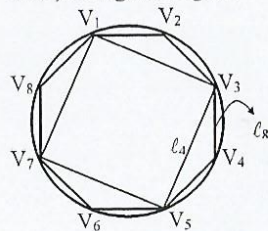
Portanto: $S_4 = 4\dfrac{\ell_4.a_4}{2} \Rightarrow$ $\boxed{S_4 = 2R^2}$

9.8.3) Hexágono Regular

Traçando as três diagonais maiores (todas de comprimento 2R), dividimos um hexágono regular em 6 triângulos equiláteros iguais:

Desta forma: $\boxed{\ell_6 = R \quad a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}}$

Conseqüentemente: $S_6 = 6\dfrac{\ell_6.a_6}{2} \Rightarrow$ $\boxed{S_6 = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{2}}$

As seis diagonais menores medem $\sqrt{3}R$.

9.8.4) Octógono Regular

Quando unimos quatro vértices não-consecutivos de um octógono regular obtemos um quadrado. Assim, pela equação da duplicação, podemos obter ℓ_8 em função de $\ell_4 = R\sqrt{2}$:

$$\ell_8 = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{(R\sqrt{2})^2}{4}}\right)} \Rightarrow \boxed{\ell_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Para o apótema: $a_8 = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2(2-\sqrt{2})}{4}} \Rightarrow$ $\boxed{a_8 = \dfrac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

Para a área: $S_8 = 8\dfrac{\ell_8.a_8}{2} \Rightarrow$ $\boxed{S_8 = 2\sqrt{2}R^2}$

Pode-se observar que, apesar de possuir 20 diagonais, um octógono regular possui somente três valores distintos para os comprimentos destas diagonais. Sejam $d_1 < d_2 < d_3$ estes comprimentos.

Temos diretamente que:

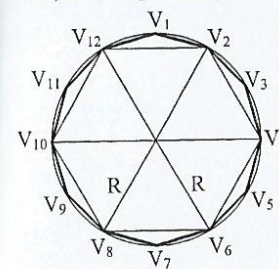
$d_1 = \overline{V_1V_3} = \overline{V_2V_4} = \overline{V_3V_5} = \overline{V_4V_6} = \overline{V_5V_7} = \overline{V_6V_8} = \overline{V_7V_1} = \overline{V_8V_2} = \ell_4 = R\sqrt{2}$

$d_3 = \overline{V_1V_5} = \overline{V_2V_6} = \overline{V_3V_7} = \overline{V_4V_8} = 2R$

Para o cálculo de $d_2 = \overline{V_1V_4} = \overline{V_2V_5} = \overline{V_3V_6} = \overline{V_4V_7} = \overline{V_5V_8} = \overline{V_6V_1} = \overline{V_7V_2} = \overline{V_8V_3}$ apliquemos o Teorema de Pitágoras $\Delta V_2V_3V_7$: $\overline{V_7V_2}^2 + \overline{V_2V_3}^2 = \overline{V_3V_7}^2 \Rightarrow d_2^2 + \ell_8^2 = d_3^2 \Rightarrow$

$d_2^2 + R^2(2-\sqrt{2}) = 4R^2 \Rightarrow d_2 = R\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Obs: O valor de ℓ_8 nos fornece um método geométrico para cálculo de sen (45°/2). Como o ângulo central de um octógono regular é igual a 45°, o ângulo inscrito correspondente a um lado do octógono vale 45°/2 e, pela, Lei dos Senos, $\text{sen}\dfrac{45^o}{2} = \dfrac{\ell_8}{2R} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

9.8.5) Dodecágono Regular

Partindo do hexágono ($\ell_6 = R$), podemos calcular ℓ_{12}:

$$\ell_{12} = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}\right)} \Rightarrow \boxed{\ell_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Para o apótema: $a_{12} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2(2-\sqrt{3})}{4}} \Rightarrow$ $\boxed{a_{12} = \dfrac{R\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$

$S_{12} = 12\dfrac{\ell_{12}.a_{12}}{2} \Rightarrow$ $\boxed{S_{12} = 3R^2}$

Por mais que um dodecágono regular possua 54 diagonais, seus comprimentos assumem somente cinco valores. Sejam $d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5$ estes comprimentos.

Segue diretamente que:

$d_1 = \overline{V_1V_3} = \overline{V_2V_4} = \overline{V_3V_5} = \overline{V_4V_6} = \overline{V_5V_7} = \overline{V_6V_8} = \overline{V_7V_9} = \overline{V_8V_{10}} = \overline{V_9V_{11}} = \overline{V_{10}V_{12}} =$

$= \overline{V_{11}V_1} = \overline{V_{12}V_2} = \ell_6 = R$

$d_2 = \overline{V_1V_4} = \overline{V_2V_5} = \overline{V_3V_6} = \overline{V_4V_7} = \overline{V_5V_8} = \overline{V_6V_9} = \overline{V_7V_{10}} = \overline{V_8V_{11}} = \overline{V_9V_{12}} = \overline{V_{10}V_1} =$

$= \overline{V_{11}V_2} = \overline{V_{12}V_3} = \ell_4 = R\sqrt{2}$

$d_4 = \overline{V_1V_6} = \overline{V_2V_7} = \overline{V_3V_8} = \overline{V_4V_9} = \overline{V_5V_{10}} = \overline{V_6V_{11}} = \overline{V_7V_{12}} = \overline{V_8V_1} = \overline{V_9V_2} = \overline{V_{10}V_3} =$

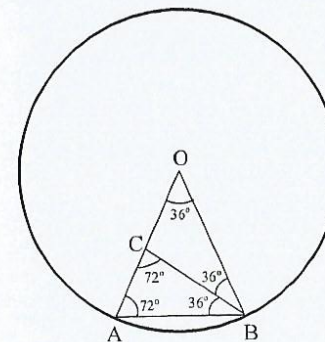
$= \overline{V_{11}V_4} = \overline{V_{12}V_5} = \ell_3 = R\sqrt{3}$

$d_5 = \overline{V_1V_7} = \overline{V_2V_8} = \overline{V_3V_9} = \overline{V_4V_{10}} = \overline{V_5V_{11}} = \overline{V_6V_{12}} = 2R$

Para o cálculo de d_3, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras em $\Delta V_{10}V_3V_4$:

$\overline{V_{10}V_3}^2 + \overline{V_3V_4}^2 = \overline{V_4V_{10}}^2 \Rightarrow d_3^2 + R^2(2-\sqrt{3}) = 4R^2 \Rightarrow d_3 = R\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Obs: O valor de ℓ_{12} nos fornece um método geométrico para cálculo de sen 15°. Como o ângulo central de um dodecágono regular é igual a 30°, o ângulo inscrito correspondente a um lado do dodecágono vale 15° e, pela, Lei dos Senos, $\text{sen}15^o = \dfrac{\ell_{12}}{2R} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

9.8.6) Decágono Regular

Considere que $AB = \ell_{10}$ e $OA = OB = R$. Assim, $\angle AOB = 36^o$ e $\angle OAB = \angle OBA = 72^o$. Trace a bissetriz BC. Desta forma temos que $\angle ABC = \angle OBC = 36^o$ e $\angle ACB = 72^o$.

Como ΔBAC é isósceles então $BC = AC = \ell_{10}$.

Como ΔOBA é isósceles então $OC = BC = \ell_{10}$.

Uma vez que $OA = R$ então $AC = R - \ell_{10}$.

Desde que $\Delta OAB \sim \Delta BAC$:

$\dfrac{OA}{AB} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{R}{\ell_{10}} = \dfrac{\ell_{10}}{R - \ell_{10}} \Rightarrow R^2 - R.\ell_{10} = \ell_{10}^2 \Rightarrow$

$\ell_{10}^2 + R.\ell_{10} - R^2 = 0 \Rightarrow \ell_{10} = \dfrac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} \Rightarrow$

$\ell_{10} = \dfrac{R(\pm\sqrt{5}-1)}{2}$. Como $\ell_{10} > 0 \Rightarrow$

$a_{10} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{16}} \Rightarrow$

Deste modo: $S_{10} = 10\dfrac{\ell_{10}.a_{10}}{2} \Rightarrow$

$$\ell_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$$
$$a_{10} = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$
$$S_{10} = \frac{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}R^2}{4}$$

Obs: O valor de ℓ_{10} nos fornece um método geométrico para cálculo de sen 18°. Como o ângulo central de um decágono regular é igual a 36°, o ângulo inscrito correspondente a um lado do decágono vale 18° e, pela, Lei dos Senos, $\text{sen}18^\circ = \dfrac{\ell_{10}}{2R} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

9.8.7) Pentágono Regular

Pela equação da duplicação do gênero de um polígono convexo:

$$(\ell_{10})^2 = 2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{(\ell_5)^2}{4}}\right) \Rightarrow 2R\sqrt{R^2 - \frac{\ell_5^2}{4}} = 2R^2 - \ell_{10}^2 \Rightarrow$$

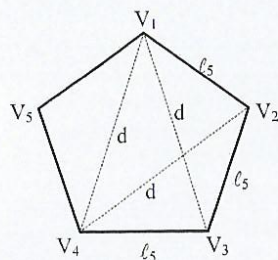
$$(2R^2)^2 - R^2\ell_5^2 = (2R^2 - \ell_{10}^2)^2 \Rightarrow R^2\ell_5^2 = (2R^2)^2 - (2R^2 - \ell_{10}^2)^2 \Rightarrow$$

$$R^2\ell_5^2 = \ell_{10}^2(4R^2 - \ell_{10}^2) \Rightarrow R.\ell_5 = \sqrt{\ell_{10}^2(4R^2 - \ell_{10}^2)} = \sqrt{\frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{4}\left(4R^2 - \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{4}\right)} \Rightarrow$$

$$\ell_5 = R\sqrt{\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{4}\right)} = \frac{R\sqrt{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}{2} \Rightarrow$$

Calculando o apótema: $a_5 = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2(10-2\sqrt{5})}{16}} \Rightarrow$

Portanto: $S_5 = 5\dfrac{\ell_5.a_5}{2} \Rightarrow$

$$\ell_5 = \frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$
$$a_5 = \frac{R(1+\sqrt{5})}{4}$$
$$S_5 = \frac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}R^2}{8}$$

Podemos notar, também, que todas as cinco diagonais de um pentágono possuem igual comprimento.

Assim: $\overline{V_1V_3} = \overline{V_2V_4} = \overline{V_3V_5} = \overline{V_4V_1} = \overline{V_5V_2} = d$

Para calcular tal comprimento podemos aplicar o Teorema de Ptolomeu em $V_1V_2V_3V_4$ (que é um trapézio isósceles):

$$d.d = d.\ell_5 + \ell_5.\ell_5 \Rightarrow d^2 - (\ell_5)d - \ell_5^2 = 0 \Rightarrow$$

$$d = \frac{\ell_5(1+\sqrt{5})}{2} = \frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})}{4} \Rightarrow d = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$$

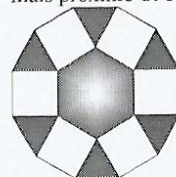
Obs: O valor de ℓ_5 nos fornece um método geométrico para cálculo de sen 36°. Como o ângulo central de um pentágono regular é igual a 72°, o ângulo inscrito correspondente a um lado do pentágono vale 36° e, pela, Lei dos Senos, $\text{sen}36^\circ = \dfrac{\ell_5}{2R} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Exemplos:

1) (Covest-93) O lado do pentágono regular inscrito numa circunferência de 6cm de raio mede p centímetros. Indique o inteiro mais próximo de p. (Adote sen 36° = 0585).

Solução:

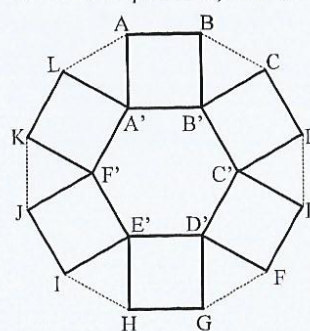
Como o lado do pentágono regular inscrito em uma circunferência de raio mede $\ell_5 = \dfrac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$, então $p = \dfrac{6\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \approx 7{,}0534$, ou seja, o inteiro mais próximo de p é 7.

2) (Covest-2000) O dodecágono regular da figura abaixo tem lado **3**. Qual a soma dos dígitos do inteiro mais próximo de sua área?

1ª Solução:

i) $\ell_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} \Rightarrow R = \dfrac{3}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$; ii) $a_{12} = \dfrac{R\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \dfrac{3(2+\sqrt{3})}{2}$;

iii) $S_{12} = \dfrac{12.\ell_{12}.a_{12}}{2} = \dfrac{(12)(3)\dfrac{3(2+\sqrt{3})}{2}}{2} \Rightarrow S_{12} = 27(2+\sqrt{3}) \Rightarrow S_{12} \cong 100{,}76 \Rightarrow$ o inteiro mais próximo da área é 101, cuja soma dos dígitos é igual a 2.

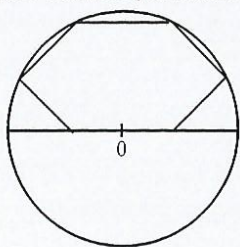
2ª Solução:

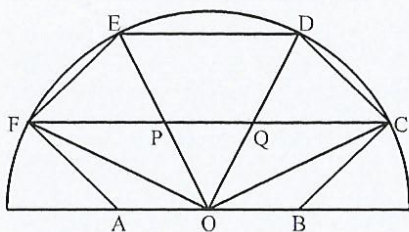
A figura dada pelo enunciado da questão fornece uma dica para a solução. Repare que o dodecágono está dividido em um hexágono, seis triângulos (que na verdade são equiláteros) e seis retângulos (que na verdade são quadrados). Vamos mostrar como fazer esta construção.

Sobre os lados de um hexágono regular A'B'C'D'E'F', externamente a este, construa seis quadrados. Note que os vértices livres dos quadrados formam o dodecágono ABCDEFGHIJKL. Vamos provar que este dodecágono é regular. Inicialmente perceba que os seis triângulos que surgem entre os quadrados são isósceles, pois dois de seus lados são iguais aos lados dos quadrados, que por sua vez são iguais ao lado do hexágono.

Como o ângulo interno de um hexágono é 120°, então o ângulo interno de cada triângulo cujo vértice está sobre o hexágono vale 360° – 120° – 90° – 90° = 60°, ou seja, os triângulos são todos equiláteros, fazendo com que os segmentos pontilhados tenham igual comprimento aos dos lados do quadrado, implicando que o dodecágono ABCDEFGHIJKL seja regular.

Se o lado do dodecágono vale 3, sua área S vale: $S = S_{\text{hexágono}} + 6S_{\text{quadrado}} + 6S_{\text{triângulo}} \Rightarrow$

$$S = 6\frac{(3^2)\sqrt{3}}{4} + 6(3)^2 + 6\frac{(3^2)\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2} + 54 + \frac{27\sqrt{3}}{2} = 27(2+\sqrt{3}) \cong 100{,}76 \Rightarrow$$ o inteiro mais próximo da área é 101, cuja soma dos dígitos é igual a 2.

3) (Colégio Naval-87) O lado do hexágono equilátero inscrito numa semicircunferência do círculo de raio r e centro 0, onde uma de suas bases está sobre o diâmetro, é:

a) $\frac{r}{2}$ b) $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ d) r e) $\frac{2r}{2}$

Solução:

Seja ℓ o lado do hexágono ABCDEF.

Repare que, pela simetria da figura, a diagonal FC divide a figura ao meio, ou seja, OQ = OD/2 = r/2.

Podemos afirmar também que PQ = ED/2 = ℓ/2

Seja $\alpha = \angle EOD$. Note que $\angle EOD$ é um ângulo central que compreende a corda ED = ℓ. Como $\angle FCD$ é um ângulo inscrito que compreende duas cordas, FE e ED, ambas de comprimento ℓ, então temos que $\angle FCD = \alpha$.

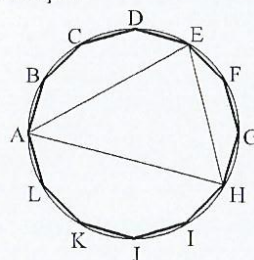
Por outro lado, como $\angle PQO = \angle DQC$, então podemos afirmar que $\Delta PQO \sim \Delta QDC$.

Assim: $\frac{PQ}{DQ} = \frac{OQ}{CD} \Rightarrow \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{r}{2}} = \frac{\frac{r}{2}}{\ell} \Rightarrow \ell^2 = \frac{r^2}{2} \Rightarrow \ell = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

4) (Colégio Naval-96) Sejam ABCDEFGHIJKL os vértices consecutivos de um dodecágono regular inscrito num círculo de raio $\sqrt{6}$. O perímetro do triângulo de vértice AEH vale:

a) $3[3+\sqrt{2}+\sqrt{3}]$ b) $3[1+\sqrt{2}+\sqrt{3}]$ c) $3[1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}]$

d) $3[2+\sqrt{2}+3\sqrt{3}]$ e) $3[1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}]$

Solução:

Como cada ângulo inscrito correspondente a um lado do dodecágono vale 15°, então:

$\angle EAH = 3(15^o) = 45^o$; $\angle AHE = 4(15^o) = 60^o$; $\angle AEH = 5(15^o) = 75^o$.

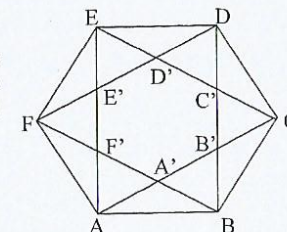
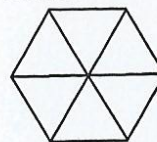
Pela Lei dos Senos:

$2p = \overline{AE} + \overline{EH} + \overline{HA} = 2\sqrt{6}.\text{sen}60^o + 2\sqrt{6}.\text{sen}45^o + 2\sqrt{6}.\text{sen}75^o \Rightarrow$

$2p = 2\sqrt{6}\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{6}\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{6}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$

$2p = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3 \Rightarrow 2p = 3[1+\sqrt{2}+\sqrt{3}]$

5) (Colégio Naval-2002)

As diagonais AC, BD, CE, DF, EA e FB de um hexágono regular ABCDEF intersectam-se formando outro hexágono A'B'C'D'E'F', conforme a figura acima. Qual a razão entre as áreas do maior e a do menor hexágono?

Solução:

Sabe-se que um hexágono regular pode ser dividido em seis triângulos equiláteros iguais, como indica a figura ao lado. Suponhamos que S é a área dos seis triângulos equiláteros em que A'B'C'D'E'F' pode ser dividido. Assim, podemos afirmar também que $S_{\Delta AF'A'} = S_{\Delta BA'B'} = S_{\Delta CB'C'} = S_{\Delta DC'D'} = S_{\Delta ED'E'} = S_{\Delta FE'F'} = S$

Note agora que AF'B'B é um retângulo. Como as diagonais de um retângulo o dividem em quatro triângulos de mesma área, então podemos afirmar que:

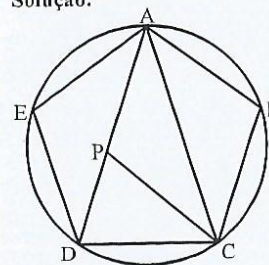
$S_{\Delta AF'A'} = S_{\Delta BA'B'} = S_{\Delta CB'C'} = S_{\Delta DC'D'} = S_{\Delta ED'E'} = S_{\Delta FE'F'} = S$.

Portanto: $\frac{S_{ABCDEF}}{S_{A'B'C'D'E'F'}} = \frac{6S+6S+6S}{6S} = 3$.

6) (ITA-95) O comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado medindo 1 unidade é igual à raiz positiva de:

a) $x^2+x-2=0$ b) $x^2-x-2=0$ c) $x^2-2x+1=0$

d) $x^2+x-1=0$ e) $x^2-x-1=0$

Solução:

Seja CP a bissetriz de $\angle ACD$. Como $\angle DAC$ é um ângulo inscrito correspondente à corda CD (que é dos lados do pentágono regular), então $\angle DAC = 36^o$. Uma vez que ΔADC é isósceles, segue que $\angle ACD = \angle ADC = 72^o$. Desde que CP é bissetriz que $\angle ACD$, temos que $\angle ACP = \angle DCP = 36^o \Rightarrow \angle DPC = 72^o$.

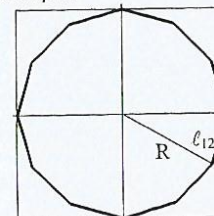
Como $\angle DPC = \angle PDC$ então ΔDCP é isósceles $\Rightarrow$ PC = CD = 1.

Como $\angle ACP = \angle CAP$ então ΔACP é isósceles $\Rightarrow$ PC = AP = 1.

Pela igualdade de ângulos, temos que $\Delta ADC \sim \Delta DCP$. Assim:

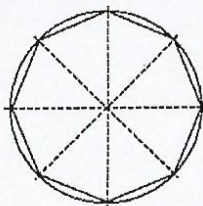
$\frac{DC}{DP} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$.

7) (International Mathematical Talent Search) Um dodecágono regular está inscrito em um quadrado de área 24, onde quatro vértices do dodecágono são os pontos médios dos lados do quadrado. Determine a área do dodecágono.

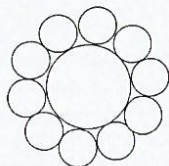
Solução:

Seja R o raio da circunferência circunscrita ao dodecágono. Assim, o lado do quadrado é igual a 2R, implicando que: $4R^2 = 24 \Rightarrow R = \sqrt{6}$.

Como um dodecágono é formado por 12 triângulos isósceles com ângulo central de 30°, então $S = 12\frac{R.R}{2}\text{sen}30^o = 12\frac{6}{2}\frac{1}{2} = 18$

8) (Unifor-2001) Na figura abaixo tem-se um octógono regular inscrito em uma circunferência de raio 2 cm. O perímetro desse octógono, em centímetros, é igual a

a) $16\sqrt{2}$
b) $32\sqrt{2}$
c) $32\sqrt{1-\sqrt{2}}$
d) $16\sqrt{2-\sqrt{2}}$
e) $16\sqrt{4-\sqrt{2}}$

Solução:

Como o valor do lado do octógono regular inscrito em uma circunferência de raio R é $\ell_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, então o perímetro do octógono é igual a $8.\ell_8 = 16\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

9) (Olimpíada de Maio-2001) Em volta de um círculo situam-se dez moedas de 1 cm de raio como indicado na figura abaixo. Cada moeda é tangente ao círculo e às duas moedas vizinhas.
Demonstre que a soma das áreas das dez moedas é o dobro da área do círculo.

Solução:
Seja R o raio da circunferência maior. Os centros das dez moedas formam um decágono regular de lado 2, sendo igual a R + 1 o valor do raio da circunferência circunscrita a este decágono. Assim:

$$2 = \frac{(R+1)(\sqrt{5}-1)}{2} \Rightarrow R+1 = \frac{4}{\sqrt{5}-1} \Rightarrow R = \sqrt{5} \text{ cm}$$

Portanto, a área A da circunferência maior é igual a 5π cm^2 e a soma S das áreas das 10 moedas é igual a 10π cm^2. Deste modo, S = 2A.

10) (IME-80) Sejam ℓ_4, ℓ_6 e ℓ_{10} os lados do quadrado, do hexágono e do decágono regulares, inscritos todos no mesmo círculo (C). Com esses três lados, constroem-se um triângulo ABC, não inscrito em (C), tal que BC = ℓ_4, AC = ℓ_6 e AB = ℓ_{10}. Pede-se calcular o ângulo A do triângulo ABC.

Solução:
Considere que R é o raio de círculo C. Pela Lei dos Cossenos em ΔABC:
$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2.\overline{AB}.\overline{AC}.\cos\hat{A} \Rightarrow (\ell_4)^2 = (\ell_{10})^2 + (\ell_6)^2 - 2(\ell_{10})(\ell_6)\cos\hat{A} \Rightarrow$

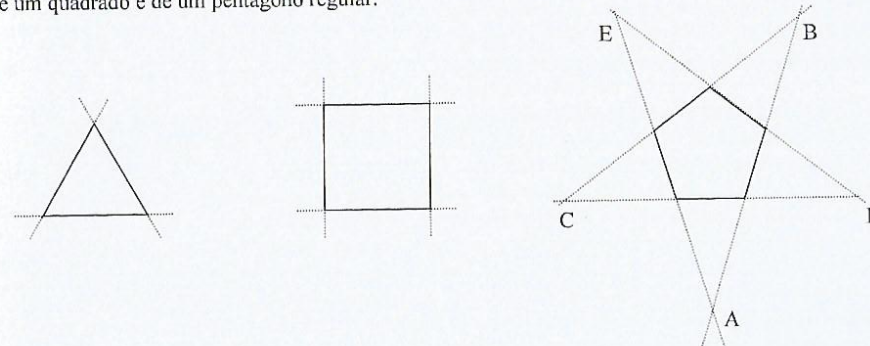
$$(R\sqrt{2})^2 = \left(\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}\right)^2 + R^2 - 2\left(\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}\right).R.\cos\hat{A} \Rightarrow$$

$$2R^2 = \frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{4} + R^2 - R^2(\sqrt{5}-1)\cos\hat{A} \Rightarrow 8 = 6 - 2\sqrt{5} + 4 - 4(\sqrt{5}-1)\cos\hat{A} \Rightarrow$$

$$4(\sqrt{5}-1)\cos\hat{A} = 2 - 2\sqrt{5} \Rightarrow \cos\hat{A} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$$

9.9) POLÍGONOS REGULARES ESTRELADOS

9.9.1) Introdução

Inicialmente, verifique-se o que ocorre quando se prolongam os lados de um triângulo eqüilátero, de um quadrado e de um pentágono regular.

Nota-se que nos dois primeiros casos os prolongamentos dos lados não se intersectam. Mas no pentágono, os prolongamentos dos lados do pentágono regular constituem um outro polígono, ABCDE, não convexo, formado por cinco segmentos (AB, BC, CD, DE e EA) congruentes, conforme é fácil verificar, dispostos de modo a formar uma *estrela*. Também é imediato mostrar que os ângulos internos desse polígono são congruentes. Daí, tal pentágono poder também ser chamado **regular**, visto ser eqüilátero e eqüiângulo. A propósito, essa estrela recebe o nome de **pentagrama** e era o símbolo da escola pitagórica, sendo também utilizada por várias seitas místicas, do passado e do presente.

Entretanto, há um problema: é óbvio que tal pentágono não é do mesmo tipo que o pentágono original. Com efeito, o primeiro, para começar, é *convexo*, ao passo que o segundo é *côncavo*. Outra distinção notável entre os dois é que o pentagrama representa uma linha poligonal *não simples*, uma vez que existem pontos como interseção de dois lados não consecutivos. De um modo mais geral, percorrendo a estrela a partir de A, por exemplo, sempre num mesmo sentido, passa-se por alguns pontos (os vértices do pentágono original) mais de uma vez. Quando uma linha possui tal propriedade, diz-se que ela é *entrelaçada* ou *entrecruzada*, ou ainda, que ela *não é simples*.

Tal tipo de polígono é denominado **polígono regular estrelado**, e o processo de criação acima (prolongar os lados de um polígono regular convexo) costuma ser chamado *estrelação*.

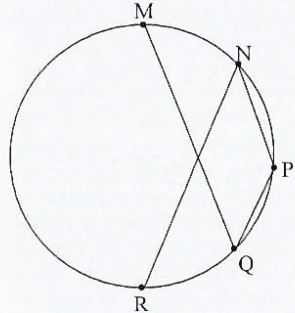
Assim como alguns tipos de polígonos regulares não admitem estrelação (triângulo, quadrado e hexágono), alguns polígonos regulares admitem mais de uma estrelação. Observam-se, por exemplo, duas estrelações distintas no heptágono regular.

Visto que todo polígono regular convexo é circunscritível, é imediato concluir que todo polígono regular estrelado também é *circunscritível*, já que o incírculo do polígono convexo que lhe deu origem tangencia todos seus lados. Também é possível demonstrar que todo polígono regular estrelado também é *inscritível*. Em verdade, basta notar que todas as pontas da estrela (vértices do polígono estrelado) eqüidistam do centro do polígono original. Assim, o centro do polígono regular estrelado coincide com o do polígono regular convexo que o originou.

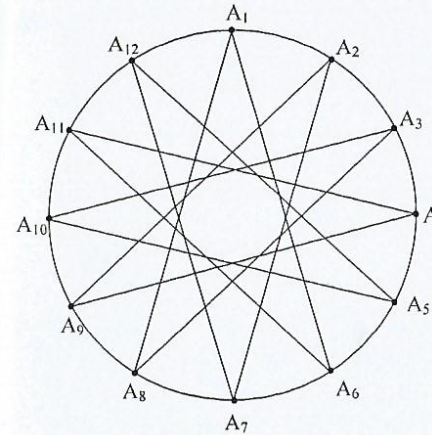
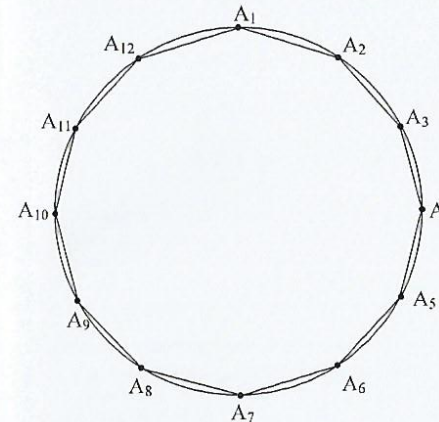
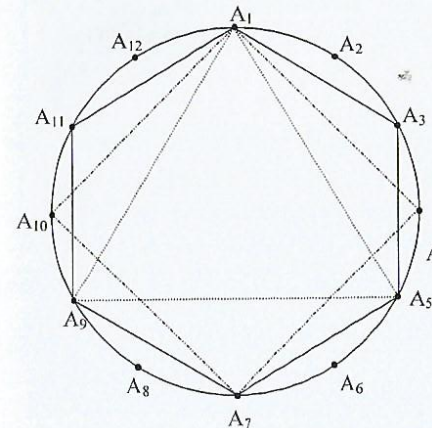
A partir da inscritibilidade, os polígonos regulares estrelados podem ser estudados de um modo mais conveniente que a estrelação. Os elementos do polígono estrelado serão relacionados ao seu circuncírculo, o que facilitará o entendimento de várias propriedades. Este será o método empregado aqui.

9.9.2) Principais Definições e Primeiros Resultados

Considere-se uma circunferência C qualquer. Sejam $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ pontos de C que a dividem em n arcos congruentes, $\overset{\frown}{A_1A_2}, \overset{\frown}{A_2A_3}, ..., \overset{\frown}{A_nA_1}$. Apenas para facilitar, tais arcos serão chamados temporariamente de arcos *básicos*.

Quando se ligam os pontos de divisão por meio de cordas consecutivas de C, mantendo sempre o padrão de ligação (a quantidade de arcos básicos entre as extremidades de uma corda qualquer num mesmo sentido é constante), é possível obter um **polígono regular** inscrito em C, em que os vértices são os pontos de divisão. Com efeito, basta notar que, como cada corda deve subentender um igual número de arcos congruentes, todas as cordas serão também congruentes. Daí, o polígono é *eqüilátero*. Além disso, todos os pares de cordas consecutivas formarão ângulos inscritos em C congruentes entre si. Logo, o polígono também é *eqüiângulo* e, conseqüentemente, regular.

Se os arcos básicos $\overset{\frown}{MN}$, $\overset{\frown}{NP}$, $\overset{\frown}{PQ}$ e $\overset{\frown}{QR}$ são congruentes, então as cordas $\overline{MQ}$ e $\overline{NR}$ também o são, uma vez que subentendem igual quantidade (três) de arcos básicos.
Além disso, os ângulos inscritos de vértices em N e em Q também são congruentes, pois determinam igual quantidade de arcos básicos (dois).

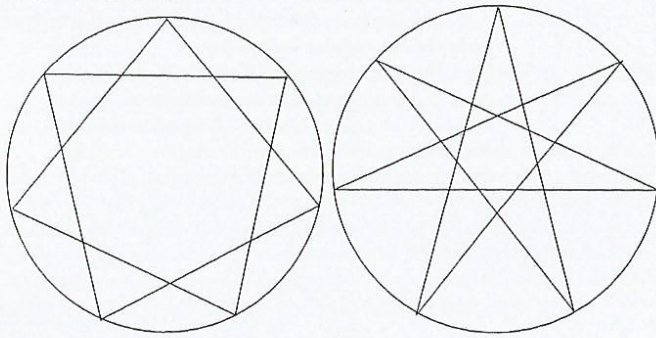
Não é necessário ligar os pontos consecutivamente (ou seja, não se é obrigado a ligar A_1 a A_2, por exemplo). Deve ser obtida uma *poligonal fechada* (união dos segmentos consecutivos) e *contínua* (ou seja, deve ser possível desenhar toda a poligonal, num mesmo sentido, "sem precisar sair do papel"). Tal polígono pode ser **convexo** (quando os pontos são ligados em seqüência – de um em um – por exemplo) ou **estrelado** (quando não for convexo. De um modo geral, quando os pontos são ligados ou de dois em dois, ou de três em três, ou de quatro em quatro,..., sempre num mesmo sentido, conforme a conveniência, que será vista a seguir). Os lados do polígono são as cordas consecutivas da circunferência, e os ângulos (internos) do polígono são os ângulos inscritos em C, determinados por dois lados consecutivos.

Para fixar idéias, observem-se os exemplos seguintes.

Os 12 pontos de divisão foram ligados de 5 em 5, no sentido horário (ou, obviamente, de 12 – 5 = 7 em 7 no anti-horário), formando-se um **dodecágono regular estrelado.**
Há 12 vértices (os pontos de divisão, $A_1, A_2, ..., A_{12}$), 12 lados (as cordas consecutivas A_1A_6, A_6A_{11}, $A_{11}A_4$, ..., A_8A_1) e 12 ângulos internos (os ângulos inscritos em C, $\hat{A}_1, \hat{A}_2, ..., \hat{A}_{12}$, determinados pelos lados do polígono).

Agora, os pontos foram ligados seqüencialmente (de 1 em 1), fechando-se um **dodecágono regular convexo** (não estrelado, portanto).

Observe-se que, caso os pontos sejam ligados de 2 em 2, de 3 em 3 ou de 4 em 4, *não se forma* dodecágono regular algum. São formados, respectivamente, **hexágono, quadrado e triângulo regulares** (todos **convexos**).
Notam-se os seguintes fatos interessantes:

$$\frac{12\,(\text{pontos})}{(\text{ligados de})\,2\,(\text{em } 2)} = 6 \Rightarrow \text{hexágono regular}$$

$$\frac{12\,(\text{pontos})}{(\text{ligados de})\,3\,(\text{em } 3)} = 4 \Rightarrow \text{quadrado}$$

$$\frac{12\,(\text{pontos})}{(\text{ligados de})\,4\,(\text{em } 4)} = 3 \Rightarrow \text{triângulo eqüilátero}$$

Denomina-se **espécie** de um polígono regular o número de voltas completas que se deve dar na circunferência até que se volte (pela primeira vez) ao ponto de partida. Assim, no exemplo do dodecágono regular estrelado acima, tem-se um polígono de 5ª espécie, pois são necessárias exatamente 5 voltas completas para partir do vértice A_1 e voltar ao mesmo vértice, formando o polígono. Já nos exemplos dados acima, há duas espécies de heptágonos estrelados: um de 2ª (o primeiro) e outro de 3ª espécie (o segundo).

Heptágonos regulares estrelados: de 2ª espécie (à esquerda) e de 3ª espécie.

Note-se que qualquer polígono regular **convexo** é de **1ª espécie**, como é evidente.

Gênero de um polígono regular é o seu número de lados.

Quando se divide uma circunferência em n arcos congruentes ($n > 2$), sempre se constrói um polígono regular convexo de n lados ligando-se os vértices de um em um. Entretanto, não é a única maneira de fazer isso. Ligando-se os pontos de **p em p**, $p > 1$, pode-se obter um polígono convexo ou estrelado, como se viu nos exemplos acima.

Uma pergunta fundamental que deve ser feita é a seguinte: *Dividindo-se uma circunferência em n (> 2) partes congruentes, quantos tipos de polígonos regulares com n lados têm vértices nos pontos de divisão?* Procurar-se-á respondê-la a seguir.

Inicialmente, é importante entender que basta fazer $p < \frac{n}{2}$. Com efeito, ligar os pontos de p em p gera o mesmo polígono que conectá-los de **n − p em n − p**. Para se convencer disso, é só notar que uma construção é idêntica à outra, só que no sentido contrário. Portanto, por simplicidade, pode-se fazer $p \le n - p$, do que se conclui $p \le \frac{n}{2}$. Porém, se $p = \frac{n}{2}$ (naturalmente, com n par), não se obtém sequer um polígono, mas sim um diâmetro da circunferência. Imagine-se, por exemplo, 10 pontos sobre a circunferência. Ligando-se os pontos de 5 em 5, parte-se de A_1, chega-se a A_6, e volta-se a A_1. Desse modo, é suficiente considerar os casos em que $p < \frac{n}{2}$.

Em seguida, é conveniente utilizar a notação P_n^p, $P_{n,p}$ ou $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ para representar um polígono regular obtido a partir de n pontos de uma circunferência, ligados de p em p. Dessa forma, o dodecágono regular estrelado é P_{12}^5, os heptágonos estrelados de 2ª e de 3ª espécies são representados por $P_{7,2}$ e $P_{7,3}$, respectivamente, e o pentagrama é $\left\{\frac{5}{2}\right\}$(o qual, como já se sabe, também é $\left\{\frac{5}{5-2}\right\} = \left\{\frac{5}{3}\right\}$). Os polígonos convexos regulares de n lados podem ser representados, simplesmente, por P_n ou $\{n\}$. Assim, o decágono regular convexo é o polígono P_{12} ou $\{12\}$, ao invés de P_{12}^1, $P_{12,1}$ ou $\left\{\frac{12}{1}\right\}$. Como provado no parágrafo anterior, tem-se o resultado $\left\{\frac{n}{p}\right\} = \left\{\frac{n}{n-p}\right\}$.

Perceba-se que P_n^p não é, necessariamente, um polígono regular de n lados. Consoante os exemplos anteriores, viu-se que dividindo um círculo em 12 partes e ligando os pontos de divisão de 2 em 2, obtém-se o hexágono regular. Noutros termos, $P_{12}^2 = P_6^1 = P_6$. É fácil verificar também que, por exemplo, $P_{10}^4 = P_5^2$, ou seja, que o pentagrama pode ser obtido a partir de 10 pontos de divisão, ligados de 4 em 4.

Tudo leva a crer, então, que é possível "simplificar" fatores comuns a n e a p. Mais precisamente, se n = k.n' e p = k.p', então $P_n^p = P_{n'}^{p'}$. Daí, se k for o máximo divisor comum entre n e p (noutros termos, se n' e p' forem primos ente si), poder-se-ia garantir que P_n^p é um polígono de n' lados (gênero n') de espécie p'.

De fato, tal suposição é verdadeira.

9.9.3) Teorema: Para todos naturais $n \ge 3$ e $1 \le p < \frac{n}{2}$, o polígono regular P_n^p tem gênero $\frac{n}{d}$ e é de espécie $\frac{p}{d}$, em que d = mdc (n, p).

Demonstração:

Suponha-se que, partindo de A_1, sejam necessárias **e** voltas na circunferência para fechar o polígono regular (isso quer dizer que a espécie do polígono é **e**). O espaço angular percorrido pode ser calculado de dois jeitos diferentes. Por um lado, é trivialmente igual a 360°, e, por outro, como cada lado subentende um arco de $\frac{360°}{n}.p$ (pois há p arcos básicos por lado e cada um deles mede $\frac{360°}{n}$), supondo a existência de **g** lados (**g** é o gênero), computa-se um espaço angular igual a $\left(\frac{360°}{n}.p\right).g$. Dessa forma:

$\left(\frac{360°}{n}.p\right).g = 360°.e \Leftrightarrow e = p.\frac{g}{n}$ (I).

Sendo d = mdc (n,p), pode-se escrever n = d.n' e p = d.p', com mdc (n',p') = 1. Substituindo esses fatos em (I): $e = p'.\frac{g}{n'}$ (II). Já que p' e n' não têm mais fatores comuns, conclui-se que g deve ser um múltiplo de n'. Há, porém, infinitos múltiplos positivos de n'. Como e é, por definição, o menor número de voltas necessárias para fechar o polígono, basta impor que $\frac{g}{n'}$ assuma o menor valor possível. Evidentemente, tal valor deve ser 1. Daí, $\frac{g}{n'} = 1 \Leftrightarrow g = n' = \frac{n}{d}$, e, conseqüentemente, em (II), $e = p'.\frac{g}{n'} = p'.1 = p' = \frac{p}{d}$, como se queria demonstrar.

Como conseqüência deste teorema, pode-se garantir, para exemplificar, que P_8^3 é um octógono regular estrelado (de 3ª espécie), $P_{10}^6 \left(= P_{10}^4 = P_5^2\right)$ é um pentágono regular estrelado, de 2ª espécie (pentagrama) e que não existe hexágono regular estrelado (pois P_6^1 é convexo e $P_6^2 = P_3$ é triângulo eqüilátero).

Agora, pode-se responder a pergunta proposta anteriormente.

9.9.4) Teorema: O número de tipos diferentes de polígonos regulares com n lados que podem ser obtidos a partir da divisão de uma circunferência por n pontos eqüidistribuídos sobre ela é igual à quantidade de números inteiros primos com n e menores que $\frac{n}{2}$. Tal quantia é dada por $\frac{\Phi(n)}{2}$ em que Φ representa a **função de Euler**.

Demonstração:

A princípio, basta utilizar os resultados anteriores. Para que P_n^p tenha n lados, isto é, para que n pontos igualmente espaçados numa circunferência sejam os vértices de um polígono com n lados, é necessário e suficiente que p seja primo com n, caso em que a espécie do polígono será p (os vértices serão escolhidos alternando-se os pontos de divisão de p em p).

Da teoria dos números, sabe-se que a quantidade de números inteiros positivos primos com n, mas menores que n, é dada por $\Phi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$, em que $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são os fatores primos (distintos) de n. Como visto anteriormente, porém, não adianta fazer p assumir todos esses valores, já que $P_n^{n-p} = P_n^p$. Conforme já foi discutido, deve-se impor $1 \le p < \frac{n}{2}$.

Para encerrar, deve-se provar que dos $\Phi(n)$, $n > 2$, números inteiros positivos primos com n, exatamente a metade é menor que $\frac{n}{2}$. Com efeito, suponha-se que d é um inteiro positivo, menor que $\frac{n}{2}$, e primo relativo com n, ou seja, mdc (d, n) = 1. O número n – d também é primo relativo com n, uma vez que mdc (n – d, n) = mdc [n – (n – d), n] = mdc (d, n) = 1. Como $n - d > \frac{n}{2}$, então para cada inteiro positivo d que é primo relativo com n, existe outro inteiro positivo (= n – d) que também é primo relativo com n. Note também que se n é um inteiro par maior que 2 então mdc (n, n/2) ≠ 1. Portanto, exatamente metade dos inteiros positivos primos relativos com n são menores que $\frac{n}{2}$.

Dessa forma, é possível responder acertadamente a perguntas do tipo:

a) Quantas espécies distintas de pentadecágonos regulares existem?
b) Há quantos tipos diferentes de icoságonos *estrelados*?

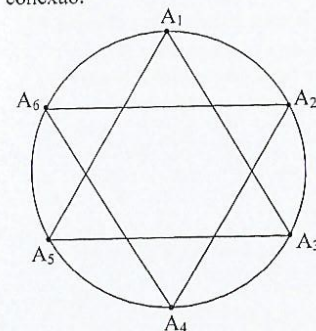
É só utilizar o resultado anterior. Como 15 = 3.5, vem que $\Phi(15)=15\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=15.\frac{2}{3}.\frac{4}{5}=8$. Conseqüentemente, pelo teorema precedente, há exatamente $\frac{\Phi(15)}{2}=4$ espécies de pentadecágonos regulares, a saber: P_{15}^1, P_{15}^2, P_{15}^4 e P_{15}^7.

Analogamente, já que $20 = 2^2.5$, conclui-se que $\Phi(20)=20\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=20.\frac{1}{2}.\frac{4}{5}=8$. Daí, os tipos de icoságonos regulares são em exato número de $\frac{\Phi(20)}{2}=4$: P_{20}^1, P_{20}^3, P_{20}^7 e P_{20}^9. Uma vez que destes apenas o primeiro é convexo, pode-se garantir que existem exatas **três** espécies de icoságonos regulares estrelados.

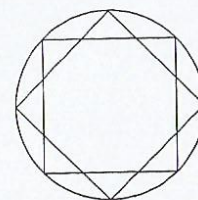
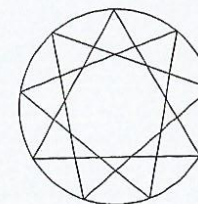
9.9.5) Figuras Estreladas

Do jeito que foram definidos, os polígonos regulares são também denominados **contínuos.** Apenas para complementar, cabe citar que existe uma generalização para polígonos estrelados regulares que formaliza a existência das denominadas **figuras estreladas** (ou **polígonos estrelados impróprios**, ou, ainda, **descontínuos** – é impossível desenhá-las "sem sair do papel").

Conforme visto anteriormente, quando no polígono P_n^p p e q *não são primos entre si*, não se forma um polígono regular de n lados. Por exemplo, P_6^2, de acordo com o processo descrito acima, não é um hexágono regular, mas sim um triângulo eqüilátero. Tampouco P_8^2 é um octógono regular.

Imagine-se, porém, que num primeiro momento nem todos os n pontos de P_n^p sejam conectados, isto é, que partindo de A_1 pelo procedimento anterior chegue-se a A_1 sem utilizar todos os pontos de divisão (isso obviamente ocorre se, e somente se, mdc (n,p) ≠ 1). A idéia é recomeçar o procedimento, *a partir do primeiro ponto não conectado*, e assim sucessivamente, até usar todos os pontos nalguma conexão.

Após fechar a primeira etapa de construção do polígono P_6^2 (o triângulo $A_1A_3A_5$), iniciada em A_1, recomeça-se o processo em A_2, obtendo-se uma figura estrelada denominada **hexagrama** ou **estrela de Davi**, utilizada como símbolo importante, por exemplo, na cultura judaica.

Sendo d = mdc (n,p) (≠ 1), é fácil concluir que a figura estrelada obtida, P_n^p, pode ser vista como uma coleção de d polígonos regulares do tipo $P_{\frac{n}{d}}^{\frac{p}{d}}$. Assim, no exemplo precedente, a figura estrelada P_6^2 é a reunião de 2 (= mdc (6,2)) triângulos eqüiláteros ($P_{\frac{6}{2}}^{\frac{2}{2}} = P_3$).

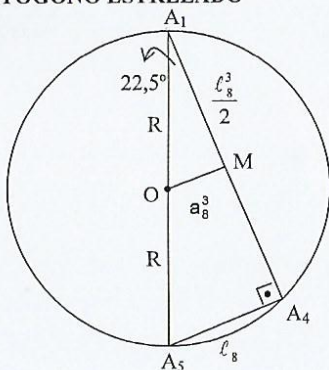
Note-se também que cada um dos d polígonos $P_{\frac{n}{d}}^{\frac{p}{d}}$ é rotacionado $\frac{2\pi}{n}$ radianos (ou seja, $\frac{360°}{n}$) em relação ao "anterior". Na estrela de Davi, por exemplo, o segundo triângulo pode ser obtido a partir de uma rotação de 60° do primeiro.

A **estrela de Lakshmi** (P_8^2) é a união (descontínua) de dois quadrados congruentes, um rotacionado de 45° em relação ao outro. Essa estrela é utilizada pelos hindus para simbolizar *Ashtalakshmi*, as oito modalidades de saúde.

P_9^3 : o **nonagrama**.

9.9.6) Algumas Relações Métricas

A maior parte dos raciocínios empregados para calcular lados e apótemas de polígonos procura relacionar tais elementos com o circunraio. Os ângulos na circunferência circunscrita são particularmente importantes.

Citar-se-ão apenas alguns exemplos, de modo a ilustrar o procedimento a ser empregado na maioria das situações. Para polígonos regulares estrelados, a definição de **apótema** continua a ser a mesma de convexos: é o segmento que liga o centro ao ponto médio de um lado qualquer.

No que segue, ℓ_n^p e a_n^p representam as respectivas medidas do lado e do apótema do polígono P_n^p. O é o seu centro e M o ponto médio do segmento que o contém. Apesar de a trigonometria facilitar bastante os cálculos, nunca é demais ressaltar que ela é conseqüência de fatos geométricos. Noutros termos, é possível obter os mesmos resultados sem fórmulas trigonométricas. O trabalho, porém, é maior.

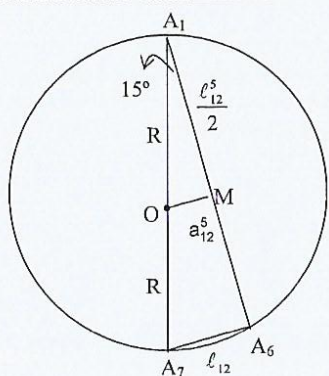
OCTÓGONO ESTRELADO

Basta notar que o ângulo $\hat{A}_1$, inscrito, é a metade do arco determinado por A_4 e A_5 ($\frac{360°}{8} = 45°$). Assim:

$$\ell_8^3 = 2R.\cos\left(\frac{45°}{2}\right) = 2R.\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\ell_8^3 = R\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Além disso: $a_8^3 = \frac{\ell_8}{2}$ (base média no $\Delta A_1A_4A_5$). Daí:

$$\boxed{a_8^3 = R.\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

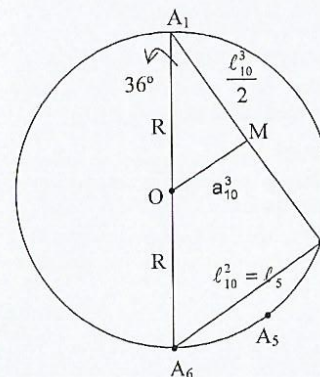
DODECÁGONO ESTRELADO

Analogamente ao caso anterior, o ângulo $\hat{A}_1$, novamente inscrito, é a metade do arco determinado por A_6 e A_7 ($\frac{360°}{12} = 30°$). Logo:

$$\ell_{12}^5 = 2R.\cos 15° = 2R.\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\ell_{12}^5 = R\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Além do mais: $a_{12}^5 = \frac{\ell_{12}}{2}$. Portanto:

$$\boxed{a_8^3 = R.\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

DECÁGONO ESTRELADO

Conhecendo-se as razões trigonométricas de 36°:

$$\ell_{10}^3 = 2R.\cos 36° = 2R.\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) \Rightarrow \boxed{\ell_{10}^3 = R.\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}$$

E: $a_{10}^3 = \frac{\ell_5}{2}$. Então: $\boxed{a_8^3 = R.\frac{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}{4}}$.

É possível, também, utilizar $\left(\ell_{10}^2\right)^2 = 4R^2 - (\ell_5)^2$ ($\Delta A_1A_4A_6$). Lembrando que $(\ell_5)^2 = R^2 - (\ell_{10})^2$, conclui-se que:

$$\left(\ell_{10}^2\right)^2 = 3R^2 - (\ell_{10})^2 = 3R^2 - \left(R.\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}.\left(6+2\sqrt{5}\right)$$

$$\left(\ell_{10}^2\right)^2 = \frac{R^2}{4}.\left(\sqrt{5}+1\right)^2$$

Finalmente: $\ell_{10}^3 = R.\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

PENTÁGONO ESTRELADO

Na figura anterior, $\overline{A_1A_5}$ é o lado do pentagrama, como é fácil verificar. Já que $A_5A_6 = \ell_{10}$, o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $A_1A_5A_6$ fornece:

$$\left(\ell_5^2\right)^2 = (2R)^2 - (\ell_{10})^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}\left(6-2\sqrt{5}\right) = \frac{R^2}{4}.\left(10+2\sqrt{5}\right).$$ Segue daí que:

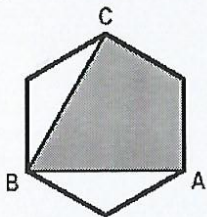
$$\boxed{\ell_5^2 = R.\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}$$

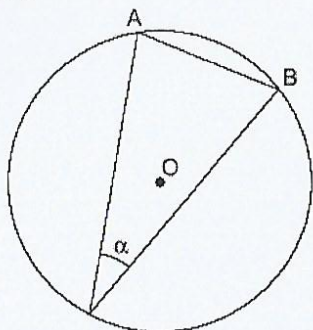
De modo análogo aos casos anteriores, fica fácil verificar que $a_5^2 = \frac{\ell_{10}}{2}$, de que se obtém:

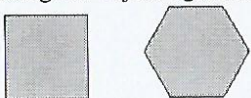
$$\boxed{a_5^2 = R.\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)}$$

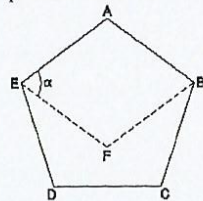
Exercícios

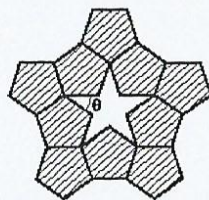
1) (Mackenzie-99) Na figura, se a área do quadrilátero assinalado é $16\sqrt{3}$, então a distância do vértice **A** do hexágono regular à diagonal **BC** é:

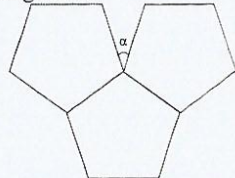
a) 4,5
b) 5,0
c) 5,5
d) 6,0
e) 6,5

2) (Mackenzie-99) Unindo-se os pontos médios dos lados de um hexágono regular H_1, obtém-se um hexágono regular H_2. A razão entre as áreas de H_1 e H_2 é:
a) 3/2 b) 5/4 c) 4/3 d) 2 e) 6/5

3) (Mackenzie-2003) Na figura, $\alpha = 30^o$, O é o centro da circunferência e AB é o lado do polígono regular inscrito na circunferência. Se o comprimento da circunferência é 4π, a área desse polígono é:

a) $4\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{3}$ c) $8\sqrt{3}$ d) $12\sqrt{3}$ e) $16\sqrt{3}$

4) (UFRN-2003) Duas regiões, uma com a forma de um quadrado e a outra com a forma de um hexágono regular, têm os lados construídos utilizando-se dois pedaços de arame de comprimentos iguais. Veja as figuras abaixo:

Determine a razão entre a área da região hexagonal e a área da região quadrada.

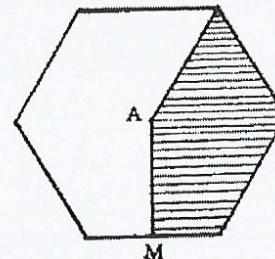
5) (Mackenzie-2002) Na figura, ABCDE é um pentágono regular, EF é paralelo a AB e BF é paralelo a AE. A medida do ângulo a é:

a) 72°
b) 54°
c) 60°
d) 76°
e) 36°

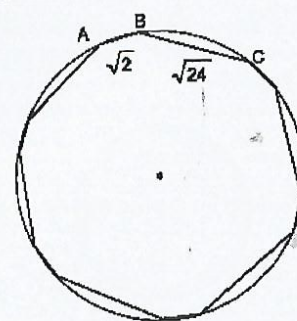
6) (Unifesp-2003) Pentágonos regulares congruentes podem ser conectados, lado a lado, formando uma estrela de cinco pontas, conforme destacado na figura. Nestas condições, o ângulo θ mede

a) 108°.
b) 72°.
c) 54°.
d) 36°.
e) 18°.

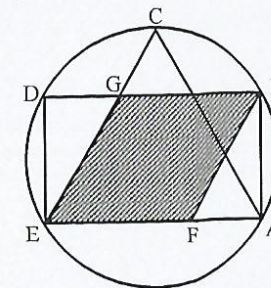
7) (Unifor-99) Na figura abaixo têm-se três pentágonos regulares.

A medida α do ângulo assinalado é

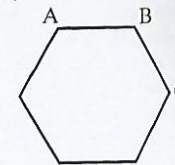
8) (UFC-2000) O teorema de Ptolomeu afirma que "em todo quadrilátero convexo inscritível a soma dos produtos das medidas dos lados opostos é igual ao produto das medidas das diagonais". Use esse teorema para mostrar que: se d e ℓ representam, respectivamente, as medidas da diagonal e do lado de um pentágono regular, então $\frac{d}{\ell} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

9) (UFG-2001) O número de diagonais de um polígono regular de n lados é dado pela função $d(n) = (n^2 - 3n)/2$, definida para todo número natural $n \geq 4$. De acordo com essa afirmação, julgue os itens abaixo.
1) Não existe polígono regular com 99 diagonais.
2) O conjunto imagem da função $d(n)$ é o conjunto de todos os números naturais.
3) O conjunto dos números naturais $4 = n$, tais que $d(n + 1) > 2\ d(n)$, possui infinitos elementos.
4) O conjunto de valores $d(n)$, para $n = 4, 5, 6, ...$, nesta ordem, forma uma progressão aritmética.

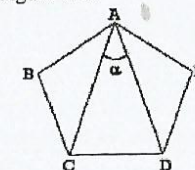
10) (UFPB-86) A figura ao lado é um hexágono regular, cujo lado mede 4 m. O ponto A é o centro do polígono e M, o ponto médio do lado. A área da região hachurada, em metros quadrados, é:

a) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$ b) $\frac{8\sqrt{3}}{5}$ c) $10\sqrt{3}$ d) $5\sqrt{3}$ e) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

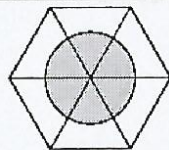
11) (UFSCar-2002) Na figura, o dodecágono inscrito na circunferência tem seis lados medindo $\sqrt{2}$ e seis lados medindo $\sqrt{24}$.

a) Calcule o ângulo $\hat{B}$.
b) Calcule o raio da circunferência.

12) (UFSCar-2003) A figura mostra um círculo de centro O e raio R = 18 cm. O segmento AB é o lado de um hexágono regular inscrito e ACE, um triângulo equilátero inscrito.

Nessas condições, a área do paralelogramo EFBG é:
a) $216\sqrt{3}$ cm² b) $180\sqrt{3}$ cm² c) $116\sqrt{3}$ cm²
d) $120\sqrt{3}$ cm² e) $108\sqrt{3}$ cm²

13) (Fuvest-89) Os pontos A, B e C são vértices consecutivos de um hexágono regular de área igual a 6. Qual a área do triângulo ABC?

a) 1
b) 2
c) 3
d) $\sqrt{2}$
e) $\sqrt{3}$

14) (Fuvest-97) **A, B, C** e **D** são vértices consecutivas de um hexágono regular. A medida, em graus, de um dos ângulos formados pelas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ é:
a) 90 b) 100 c) 110 d) 120 e) 150

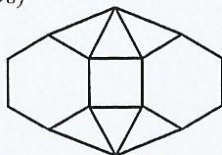
15) (Fuvest-2000) Na figura abaixo, **A B C D E** é um pentágono regular. A medida, em graus do ângulo α é:

a) 32°
b) 34°
c) 36°
d) 38°
e) 40°

16) (Unesp-2004) Um salão de festas na forma de um hexágono regular, com 10 m de lado, tem ao centro uma pista de dança na forma de um círculo, com 5 m de raio.

A área, em metros quadrados, da região do salão de festas que não é ocupada pela pista de dança é:

a) $25(30\sqrt{3}-\pi)$ b) $25(12\sqrt{3}-\pi)$

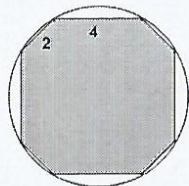
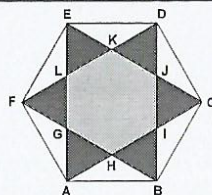
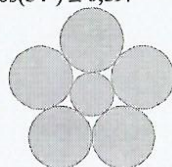
c) $25(6\sqrt{3}-\pi)$ d) $10(30\sqrt{3}-\pi)$

e) $10(15\sqrt{3}-\pi)$

17) (Uerj-98)

O decágono da figura acima foi dividido em 9 partes: 1 quadrado no centro, 2 hexágonos regulares e 2 triângulos equiláteros, todos com os lados congruentes ao do quadrado, e mais 4 outros triângulos. Sendo T a área de cada triângulo equilátero e Q a área do quadrado, pode-se concluir que a área do decágono é equivalente a:

a) 14T + 3Q b) 14T + 2Q

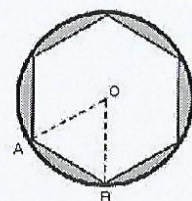
c) 18T + 3Q d) 18T + 2Q

18) (Covest-99) Um octógono inscrito numa circunferência possui lados medindo alternadamente **2** e **4**. Qual o inteiro mais próximo de sua área?

19) (Covest-2000) O hexágono regular **ABCDEF** da figura tem área **60**. Qual a área do hexágono interior **GHIJKL**?

20) (Covest-2002) Na ilustração a seguir, as cinco circunferências maiores tem raio **59** e, cada duas delas, ou não se interceptam ou se tangenciam externamente, enquanto a circunferência menor é tangente às cinco circunferências maiores. Qual o raio da circunferência menor? Dados: use a aproximação **cos(54°) ≅ 0,59**.

21) (UFU-2000) Considere um polígono regular de n lados, circunscrito em um círculo de raio 1 cm. O valor de n, para que o lado desse polígono tenha medida 2 cm, é igual a:

a) 8 b) 6 c) 5 d) 4

22) (UFU-2001) Sabendo-se que um polígono regular de n lados está inscrito num círculo de raio 1 e que o polígono possui 9 diagonais, encontre a medida do comprimento de seu lado.

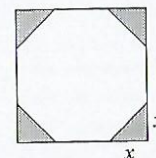
23) (UFV-2002) A figura abaixo representa um hexágono regular inscrito em uma circunferência com raio de 20 cm.

Calcule:

a) A medida do ângulo $A\hat{O}B$.

b) O perímetro do hexágono.

c) O valor da expressão $x + y^2$, onde x é o número de diagonais do hexágono, e y é o apótema do hexágono (altura do triângulo AOB).

d) A área da região situada entre o hexágono e a circunferência.

24) (UFV-2004) De um piso quadrado de 34 cm de lado recortam-se pequenos triângulos retângulos isósceles de cateto x, de modo a obter um piso em forma de octógono regular, conforme ilustra a figura abaixo. Considere $\sqrt{2} = 1{,}4$.

a) Determine o valor de x.

b) Calcule a área de um dos triângulos recortados.

c) Calcule a área do octógono.

25) (EEAR-2002) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo regular é de 720°, Sabendo-se que o seu lado mede 4 cm e que ele está inscrito numa circunferência, então a área desse polígono, em cm^2, é

a) $6\sqrt{3}$ b) $18\sqrt{3}$ c) $12\sqrt{3}$ d) $24\sqrt{3}$

26) (EEAR-2002) Num quadrilátero convexo, a soma de dois ângulos internos consecutivos é 190°. O maior dos ângulos formados pelas bissetrizes internas dos outros dois ângulos desse quadrilátero mede

a) 105° b) 100° c) 95° d) 85°

27) (ESSA-2001) O polígono cujo número de diagonais excede de 42 o número de lados é o:

a) hexágono b) octógono c) eneágono

d) decágono e) dodecágono

28) (Epcar-2001) O apótema de um hexágono regular é igual à altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 4 cm. A área do hexágono mede, em cm^2

a) $4\sqrt{3}$ b) $16\sqrt{3}$ c) $18\sqrt{3}$ d) $24\sqrt{3}$

29) (Colégio Naval-80) **X** é o lado do quadrado de **4820 mm²** de área; y é o lado hexágono regular de $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ **cm** de apótema e **z** é o lado do triângulo eqüilátero inscrito no círculo de **5 cm** de raio. Escrevendo em ordem crescente esse três números teremos:

a) Z, X,Y c) Y, Z, X e) X, Y, Z

b) Z, Y, X d) Y, X, Z

30) (Colégio Naval-80) Um hexágono tem $24\sqrt{3}$ **cm²** de área. Se ligarmos alternadamente, os pontos médios dos lados desse hexágono, vamos encontrar um triângulo eqüilátero de área.

a) $12\sqrt{3}$ cm² c) $9\sqrt{3}$ cm² e) $18\sqrt{3}$ cm²

b) $8\sqrt{3}$ cm² d) $6\sqrt{3}$ cm²

31) (Colégio Naval-81) Um quadrilátero ABCD está inscrito em um círculo. O lado AB é o lado do triângulo eqüilátero inscrito nesse círculo. O lado CD é o lado do hexágono regular inscrito nesse círculo. O ângulo formado pelas diagonais do quadrilátero é de:

a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) 108°

32) (Colégio Naval-81) A diagonal de um pentágono regular convexo de lado igual a **2 cm**, mede, em **cm**:

a) $\sqrt{5}+2$ c) $\sqrt{5}$ e) $\sqrt{5}+1$

b) $\sqrt{5}-2$ d) $\sqrt{5}-1$

33) (Colégio Naval-84) Um polígono regular possui 70 diagonais que não passam pelo seu centro. O valor da medida do ângulo interno do referido polígono está, em graus, compreendido entre:

a) 70° e 80° b) 100° e 120° c) 120°

d) 140° e 150° e) 150° e 160°

34) (Colégio Naval-85) Considere um ponto P interno a um hexágono regular de lado igual a 6 cm. A soma das distâncias de P a cada uma das retas suportes dos lados desse hexágono.

a) depende da localização de P

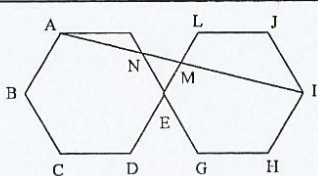
b) é igual a 36 cm

c) é igual a 18 cm

d) é igual a $12\sqrt{3}$ cm

e) é igual a $18\sqrt{3}$ cm.

35) (Colégio Naval-86) Os hexágonos regulares da figura são congruentes e os segmentos CD e HG são colineares. A razão entre a área de um deles e a área do triângulo EMN é igual a:

a) 6
b) 9
c) 12
d) 16
e) 18

36) (Colégio Naval-88) Um polígono regular tem vinte diagonais. A medida em graus, de um de seus ângulos internos é:
a) 201° b) 167° c) 162° d) 150° e) 135°

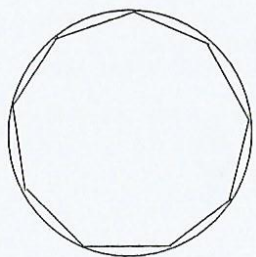
37) (Colégio Naval-88) Uma expressão que dá o lado do eneágono regular, em função das diagonais a, b e c, com $a < b < c$, é:

a) $\frac{c^2+b^2}{a}$

b) $\frac{cb}{a}$

c) $\frac{c^2-b^2}{a}$

d) $\left(\frac{c+b}{a}\right)^2$

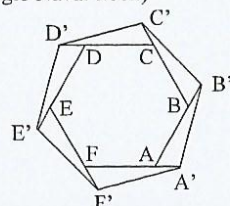
e) $\left(\frac{c-b}{a}\right)^2$

38) (Colégio Naval-89) Um polígono regular convexo de 18 vértices $A_1A_2A_3 \ldots\ldots A_{18}$ está inscrito em uma circunferência de raio R. traçam-se as diagonais $\overline{A_1A_7}$ e $\overline{A_2A_5}$. A área da parte do circulo compreendida entre essas diagonais é:

a) $\frac{R^2}{12}(4\pi-3\sqrt{3})$ b) $\frac{\pi R^2}{3}$ c) $R^2(\pi-\sqrt{3})$
d) $\frac{R^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3})$ e) $\frac{\pi R^2}{6}$

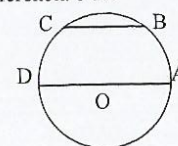
39) (Colégio Naval-95) Um polígono regular convexo tem o seu número de diagonais expresso por $n^2-10n+8$, onde **n** é o seu número de lados. O seu ângulo interno **x** é tal que:
a) $x < 120°$ b) $120° < x < 130°$
c) $130° < x < 140°$ d) $140° < x < 150°$
e) $x > 150°$

40) (Colégio Naval-98) Um hexágono regular *ABCDEF* tem lado 3 cm. Considere os pontos: M, pertencente a AB, tal que MB igual a 1 cm; N, pertencente a CD, tal que ND igual a 1 cm; e P, pertencente a EF, tal que PF igual a 1 cm. O perímetro, em centímetros, do triângulo MNP é igual a:
a) $3\sqrt{15}$ b) $3\sqrt{17}$ c) $3\sqrt{19}$ d) $3\sqrt{21}$ e) $3\sqrt{23}$

41) (Colégio Naval-99) Em uma circunferência de raio R está escrito um pentadecágono regular P. Coloque (V) verdadeiro ou (F) falso nas afirmativas abaixo.
( ) P tem diagonal que mede $2R$.
( ) P tem diagonal que mede $R\sqrt{2}$.
( ) P tem diagonal que mede $R\sqrt{3}$.
( ) P tem diagonal que mede $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.
Assinale a alternativa correta.
a) (V) (V) (F) (F) b) (F) (V) (V) (F)
c) (F) (F) (V) (V) d) (V) (V) (V) (F)
e) (V) (V) (V) (V)

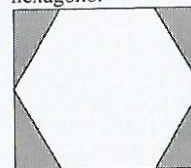
42) (Colégio Naval-2002)

Observe a figura acima, onde os seis lados do hexágono regular, ABCDEF foram prolongados de segmentos AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF', de modo que a medida do segmento AA' corresponde a P% da medida do lado AB, (P > 0). Se o percentual de aumento que a área do hexágono A'B'C'D'E'F' apresenta em relação a área do hexágono original é 75%, então o valor de P é:
a) 25 b) 30 c) 45 d) 50 e) 75

43) (AFA-98) O pentágono ABCDE está inscrito em uma circunferência de centro O. Se o ângulo AÔB mede 40°, então, a soma dos ângulos BĈD e AÊD, em graus, é
a) 144 b) 180 c) 200 d) 214

44) (EsPCEx-97) Na figura abaixo, o segmento BC, paralelo ao segmento AD, representa o lado do hexágono regular inscrito na circunferência de centro O. O comprimento do arco ABC é de $\frac{20}{3}\pi$ cm. Nestas condições, a medida, em cm, do raio da circunferência é de:

A) $5\pi/3$ B) $10\pi/3$ C) 20 D) 15 E) 10

45) (Escola Naval-98) Um hexágono regular está inscrito num círculo de raio 5. Um dos lados do hexágono também é lado de um quadrado construído exteriormente ao hexágono. A distância entre o centro do círculo e a interseção das diagonais do quadrado é:

a) $\frac{5}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ b) $5(\sqrt{3}+1)$ c) $\frac{15}{2}$
e) $5(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ e) $\frac{5(\sqrt{3}+1)}{2}$

46) (Escola Naval-2002) Do retângulo abaixo foram retirados os quatro triângulos retângulos hachurados formando assim um hexágono regular de lado igual a 4cm. Que percentagem da área do retângulo ABCD, é representada pela área do hexágono.

a) 50% b) 60% c) 75% d) 80%

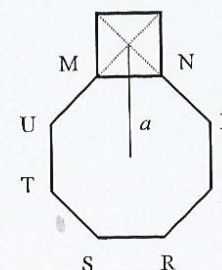
47) (ITA-96) Um hexágono regular e um quadrado estão inscritos no mesmo círculo de raio R e o hexágono possui a aresta paralela a uma aresta do quadrado. A distância entre estas duas arestas paralelas será:

a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}R$ b) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}R$ c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}R$
d) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}R$ e) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}R$

48) (ITA-98) Considere as afirmações sobre polígonos convexos:
(I) Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.
(II) Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.
(III) Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.
Então:
a) Todas as afirmações são verdadeiras.
b) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.
c) Apenas (I) é verdadeira.
d) Apenas (III) é verdadeira.
e) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

49) (ITA-2001) De dois polígonos convexos, um tem a mais que outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:
a) 53 b) 65 c) 66 d) 70 e) 77

50) (ITA-2004) Considere um polígono convexo de nove lados, em que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética de razão igual a 5°. Então, seu maior ângulo mede, em graus.
a) 120 b) 130 c) 140 d) 150 e) 160

51) (IME-67) A figura mostra o octógono regular MNPQRSTU, e um quadrado construído tendo por base o lado MN. Sabendo-se que a distância entre o centro do círculo inscrito no octógono e o ponto de interseção das diagonais do quadrado é a, determine a área do quadrado em função de a.

52) Considere que o pentágono regular ABCDE está inscrito em uma circunferência de raio R. Prove que $(\overline{AB}.\overline{AC})^2 = 5R^2$.

53) Une-se os extremos A e B do lado de um pentágono ABCDE inscrito em uma circunferência de raio R ao ponto P, ponto médio do menor arco BC. Prove que:
a) $PA - PB = R$;

b) $PA.PB = R^2$;
c) $PA^2 + PB^2 = 3R^2$.

54) Ao longo dos lados de um pentágono regular de lado a traçam-se seis triângulos retângulos congruentes. Calcular o valor da hipotenusa ℓ desses triângulos retângulos.

55) R e A designam o raio e o apótema e um polígono regular, R' e A' o raio e o apótema de um polígono regular de mesma área mas com o dobro do número de lados. Demonstrar que:

a) $R' = \sqrt{R.A}$; b) $A' = \sqrt{\dfrac{A(R+A)}{2}}$.

56) Os cantos de um quadrado de lado x são cortados de modo a formar um octógono regular. O comprimento de cada lado do octógono é:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ b) $2x(2+\sqrt{2})$ c) $\dfrac{x}{\sqrt{2}-1}$
d) $x(\sqrt{2}-1)$ e) $x(\sqrt{2}+1)$

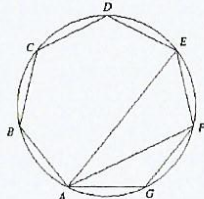
57) Seja um quadrado ABCD de lado a. Prolongam-se os lados nos dois sentidos com comprimentos iguais. Determine tais comprimentos prolongados de modo que seus extremos formem um octógono regular.

58) Sobre os lados de um hexágono regular, externamente ao hexágono, constroi-se quadrados. Demonstrar que os vértices livres dos quadrados formam um dodecágono regular.

59) Seja ABCDEF um hexágono regular. Demonstrar que: i) As diagonais AC e AE cortam três partes iguais a diagonal BF; BF ⊥ BC.

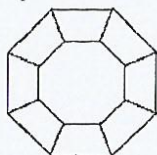
60) Sobre os lados de um triângulo equilátero de lado a, externamente ao triângulo, constroi-se retângulos iguais dos quais une-se os vértices livres. Calcular as alturas dos retângulos para que o hexágono obtido seja regular.

61) Numa circunferência de raio R marcam-se as cordas no mesmo sentido: AB = lado do hexágono regular inscrito nesta circunferência; BC = lado do quadrado inscrito nesta circunferência e CD = lado do triângulo equilátero inscrito nesta circunferência.
a) Indique a natureza do quadrilátero.
b) Prove que a área do quadrilátero ABCD é igual a $\dfrac{R^2(1+\sqrt{3})^2}{4}$.

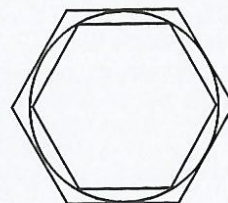
62) Em um heptágono regular ABCDEFG, seja $|AE| = a$, $|AF| = b$, $|EF| = c$.

Mostre que $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

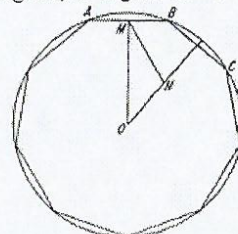
63) Um pentágono regular possui área igual a 10.000 unidades de área. O valor de cada lado do pentágono é:

a) $40\sqrt{5.tg54^o}$ b) $20\sqrt{5.tg72^o}$ c) $40\sqrt{5.tg72^o}$
d) $20\sqrt{5.tg36^o}$ e) $40\sqrt{5.tg36^o}$

64) (Crux Mathematicorum 23n2) O octógono da figura é obtido pela construção de oito trapézios isósceles congruentes externamente aos lados do octógono original. Se os três menores lados de cada trapézio possuem comprimento igual a 1, qual é o comprimento do maior lado de cada trapézio?

a) $1+\sqrt{2}$
b) $(1+\sqrt{2})/2$
c) $\sqrt{2}$
d) 2
e) $1+\sqrt{2-\sqrt{2}}$

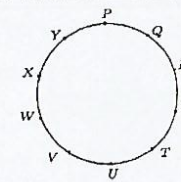
65) (Rio Grande do Norte-93) Prolongando-se os lados AB e CD de um polígono regular ABCDE... obtém-se um ângulo de 132°. Quantos lados têm o polígono?

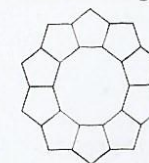
66) (Rio Grande do Norte-96) Dois hexágonos regulares estão: um inscrito e o outro circunscrito na mesma circunferência, veja Figura abaixo. Se a área do hexágono menor for 3 cm², qual será, em centímetros quadrados, a área do maior?

a) 3π b) 4 c) $3+\pi$ d) $3\pi^2$ e) 18

67) (Rio Grande do Norte-96) Sejam AB, BC dois lados adjacentes de um polígono regular de 9 lados inscrito num círculo de centro O, veja Figura abaixo. Sejam M o ponto médio de AB e N o ponto médio do raio perpendicular a BC. A medida, em graus, do ângulo $O\hat{M}N$ é:

a) 45 b) 30 c) 145 d) 60 e) 90

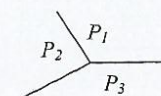
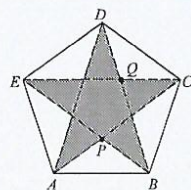
68) (Rio Grande do Norte-96) Inscreve-se um polígono convexo de 12 lados num círculo de modo que ele possui, em alguma ordem, seis lados de comprimento $\sqrt{2}$ e seis de comprimento $\sqrt{24}$. Qual é o raio do círculo?
a) $\sqrt{48}$ b) $\sqrt{38}$ c) $\sqrt{12}$ d) 20 e) 1

69) (Rio Grande do Norte-98) Marcamos sobre um círculo, no sentido dos ponteiros do relógio, vinte pontos, A_1, A_2, A_3, ... , A_{19}, A_{20}, nessa ordem e igualmente separados. Qual é a medida (em graus) do ângulo $A_1\hat{A}_3A_7$?

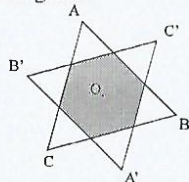
70) (Rio Grande do Norte-2000) Dez pontos P, Q, R, ..., Y estão igualmente espaçados em torno de uma circunferência de raio unitário, conforme figura abaixo.

Determine a diferença entre as medidas dos segmentos PS e PQ.

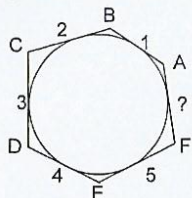
71) (São Paulo-2000) Dizemos que um polígono regular está "cercado" quando é possível construir um outro polígono regular sobre cada um de seus lados, de modo que estes polígonos construídos sejam todos congruentes entre si e os adjacentes tenham um lado comum. Exemplo: um decágono regular pode ser cercado por pentágonos regulares congruentes, como mostra a figura.

Determine todos os polígonos regulares que podem ser cercados e os respectivos polígonos que formam a cerca. Justifique sua resposta!

72) (Rio Grande do Sul-2001) Após se prolongar os lados de um hexágono regular (h), obtém-se uma estrela de seis pontas. Em seguida, une-se as pontas da estrela por segmentos de reta, formando um hexágono regular (H). Qual a razão das áreas de H e h?

73) (Goiás-2001) Três polígonos regulares no plano, P_1 , P_2 e P_3 de m, n e p lados, respectivamente, tem um vértice em comum e neste vértice os lados se justapõe sem deixar vão (Figura abaixo). Mostre que $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2}$.

74) (OBM-99) Seja *ABCDE* um pentágono regular tal que a estrela *ACEBD* tem área 1. Sejam *P* interseção entre *AC* e *BE* e *Q* a interseção entre *BD* e *CE*. Determine a área de *APQD*.

75) (OBM-2000) *DEFG* é um quadrado no exterior do pentágono regular *ABCDE*. Quanto mede o ângulo $E\hat{A}F$?

a) 9° b) 12° c) 15° d) 18° e) 21°

76) (OBM-2000) Na figura temos que os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são equiláteros e a região destacada é um hexágono regular. A razão entre a área da região destacada e a área do triângulo *ABC* é igual a:

a) 1 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

77) (OBM-2001) O hexágono *ABCDEF* é circunscritível. Se *AB* = 1, *BC* = 2, *CD* = 3, *DE* = 4 e *EF* = 5, quanto mede *FA*?

a) 1 b) 3 c) 15/8 d) 6 e) 9

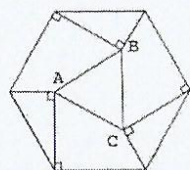
78) (OBM-2004) Constrói-se o quadrado *ABXY* sobre o lado *AB* do heptágono regular *ABCDEFG*, exteriormente ao heptágono. Determine a medida do ângulo $B\hat{X}C$, em radianos.

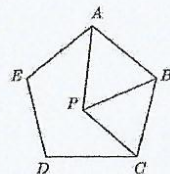
a) $\frac{\pi}{7}$ b) $\frac{3\pi}{7}$ c) $\frac{\pi}{14}$ d) $\frac{3\pi}{14}$ e) $\frac{3\pi}{28}$

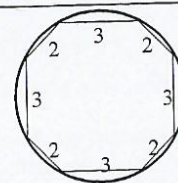
79) (Argentina-98) Dado um hexágono regular *ABCDEF*, sejam m_{ab}, m_{bc}, m_{cd}, m_{de}, m_{ef} e m_{fa} os pontos médios de *AB*, *BC*, ..., *FA* respectivamente. Achar a relação entre as áreas do triângulo formado pelas retas $m_{ab}\,m_{bc}$, $m_{cd}\,m_{de}$ e $m_{ef}\,m_{fa}$ e o hexágono regular *ABCDEF*.

80) (Argentina-99) Tem-se um papel vermelho com forma de hexágono regular de lado 2 e um papel azul com forma de quadrado de diagonal igual a 4. Coloca-se o quadrado em cima do hexágono de modo que dois vértices opostos do quadrado coincidam com dois vértices opostos do hexágono. Achar a área da região do hexágono que não fica coberta pelo quadrado, ou seja, a região vermelha visível.

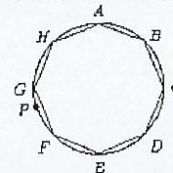
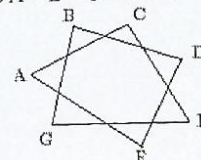
81) (Argentina-2000) Seja *ABCDEF* um hexágono regular e sejam *M*, *N* e *O* os pontos médios de *AB*, *CD* e *EF* respectivamente. Se a área do hexágono é 8 achar a área do triângulo *MNO*.

82) (México) Na figura seguinte, qual é a área do triângulo *ABC*, se a área do hexágono regular é *H*?

a) H/2 b) H/4 c) H/6 d) H/8

83) (México) Na figura, ABCDE representa um pentágono regular (de 1 cm de lado) e ABP é um triângulo equilátero. Quantos graus mede o ângulo ∠BCP?

a) 45° b) 54° c) 60° d) 66° e) 72°

84) (Texas-99) Um octógono está inscrito em um círculo. Se os comprimentos dos lados são 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2 e 3, nesta ordem, determine área do octógono na forma $a + b\sqrt{c}$, onde a, b e c são inteiros.

85) (Stanford Math Tournament-2002) Considere um n-ágono regular. Prove que a razão entre a área e o quadrado do perímetro do n-ágono em termos de n é $\frac{\cot\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{4n}$.

86) (Portugal-98) O octógono regular da figura seguinte está inscrito numa circunferência de raio 1 e P é um ponto arbitrário desta circunferência:

Calcule o valor de $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \ldots + \overline{PH}^2$.

87) (Portugal-2003) Na figura está indicado o símbolo que representa a equipe das Estrelas. Quanto mede A + B + C + D + E + F + G?

a) 120° b) 180° c) 360° d) 420° e) 540°

88) (Portugal-2003) Numa aldeia existem apenas 10 casas, dispostas numa praça circular com 50 metros de raio. Cada casa está à mesma distância de cada uma das duas casas mais próximas. Todos os anos, no Domingo de Páscoa, o padre da aldeia realiza a visita pascal, saindo da casa paroquial (ponto A) e seguindo o percurso descrito pela Figura 1. Este ano o padre decidiu efetuar o percurso representado na Figura 2. Quantos metros a mais irá andar?

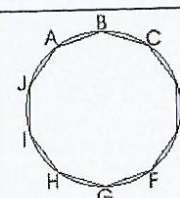



Fig.1

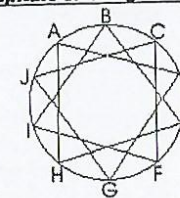
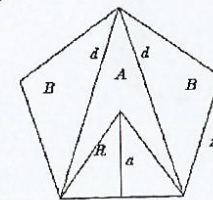



Fig.2

89) (Bélgica-92) Um dos vértices de um pentágono regular é conectado com dois vértices no lado oposto. Esta construção forma um triângulo isósceles de área A e dois triângulos isósceles com ângulo obtuso possuindo área B. Sejam R, z, a e d são os raios do círculo circunscrito, o lado do pentágono, o apótema e o comprimento da diagonal do pentágono. Pode-se afirmar que:

a) Az = Bd b) AR = Bd c) Aa = Bz

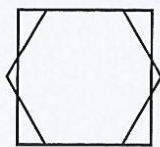
d) Az = B(a + R) e) $Az^2 = Bd^2$

90) (Bélgica-96) Um hexágono regular está inscrito em um círculo de raio R. O comprimento da diagonal que não contém o centro do círculo é igual a:

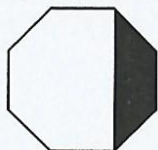
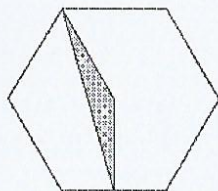
a) $R\sqrt{2}$ b) 3R/2 c) $R\sqrt{3}$ d) 2R e) $R\sqrt{5}$

91) (Bélgica-97) Dois octógonos regulares com lados medindo z e Z possuem o mesmo centro e seus lados são paralelos. A área do maior octógono (com lado Z) é duas vezes a área do menor. A menor distância entre os seus lados vale:

a) z/3 b) z/2 c) Z/3 d) Z/2 e) z

92) (Bélgica-2000) Iniciando com um quadrado de lado 1, um hexágono regular é construído, concêntrico com o quadrado. Determine a área de interseção de ambas figuras.

a)$\frac{2}{\sqrt{3}}-1$ b)$1-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ c)$2-\frac{2}{\sqrt{3}}$ d)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

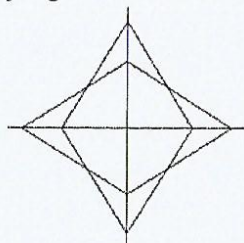
93) (Itália-2001) Em um hexágono equiângulo, as medidas de quatro lados consecutivos são, nesta ordem, 5, 3, 6 e 7. Determine as medidas dos outros dois lados.

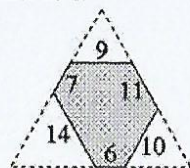
94) (Pará-2003) Determine que fração da área do octógono está pintada de preto.

95) (Bélgica-2003) Em um hexágono regular, como mostrado na figura, conectamos o centro com um vértice e um ponto médio de um lado. Que parte do hexágono está coberto pelo triângulo hachurado?

a) 1/8 b) 1/9 c) 1/12 d)1/16 e) 1/18

96) (Maio-97) Quais são as possíveis áreas de um hexágono com todos os ângulos iguais e cujos lados medem 1, 2, 3, 4, 5 e 6 em alguma ordem?

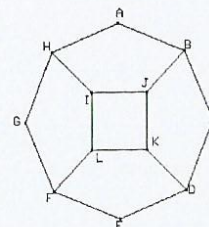
97) (Ceará-2003) Seja P um ponto no interior de um hexágono regular com lados de comprimento um. Os segmentos que unem P a dois vértices têm comprimento 13/12 e 5/12 respectivamente. Determine os comprimentos dos segmentos unindo P aos outros vértices do hexágono.

98) (Hong Kong-91) Seja P_r um polígono regular de r lados e P_s um polígono regular de s lados ($r \geq s \geq 3$), tal que cada ângulo interior de P_r é $\frac{20}{17}$ vezes o de P_s. Qual é o maior valor possível de s?

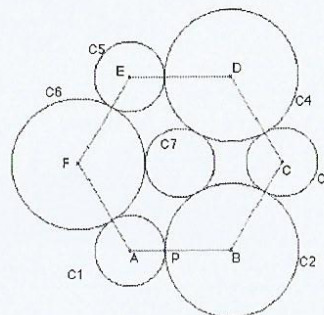
99) (Bélgica-2002) Dois losangos congruentes são colocados um sobre o outro, de modo que a diagonal maior de um está sobre a diagonal menor do outro e vice-versa. A interseção dos dois é uma figura que é um octógono convexo cujos lados são todos iguais. Determine a razão entre a diagonal maior e a diagonal menor de modo que este octógono seja regular.

a) $\sqrt{2}-1$ b) 2 c) $\sqrt{2}+1$ d) $2\sqrt{2}$ e) 3

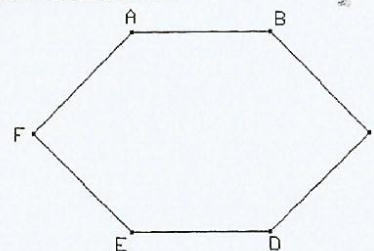
100) (High School Contest-95) O diagrama abaixo mostra que um hexágono eqüiângulo com lados de comprimentos 6, 7, 9, 10, 11 e 14 pode ser inscrito em um triângulo eqüilátero de lado 30. A mesmo hexágono eqüiângulo pode também ser inscrito em um triângulo eqüilátero com lado $n \neq 30$. Qual é o valor de n?

101) (Argentina-95) Tomando como vértices os pontos de interseção das prolongações dos lados de um hexágono regular H_0 obtém-se um novo hexágono regular H_1. Da mesma maneira, a partir de H_1 constroi-se H_2 e assim sucessivamente. Qual é o primeiro hexágono H_n cuja área é maior que 1995 vezes a área do hexágono H_0?

102) (Argentina-97) Seja *ABCDEFGH* um octógono regular. Traçam-se as retas *AB*, *CD* e *GF* formando-se um triângulo. Demonstrar que a relação entre as áreas e os perímetros do triângulo e o octógono regular é a mesma.

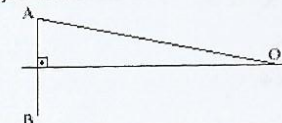
103) (Argentina-97) *ABCDEFGH* é um octógono regular e *HI* = *BJ* = *DK* = LF = lado do quadrado *IJKL*.

Determinar o valor da relação:

$$\frac{\text{área(ABCDEFGH)} - \text{área(BDFH)}}{\text{área(ABCDEFGH)} - \text{área(IJKL)}}$$

104) (Argentina-98) Na figura abaixo *ABCDEF* é um hexágono regular e $C_1 = C_3 = C_5$ e $C_2 = C_4 = C_6$.

Provar que $C_7 = C_5 = C_3 = C_1$.

105) (Argentina-99) Considere o hexágono ABCDEF da figura, de modo que todos seus lados medem 1 cm e tal que $\angle BCD = \angle EFA = 90°$ e os ângulos $\angle ABC = \angle CDE = \angle DEF = \angle FAB$. Achar a medida de AD.

106) (Rússia-68) Dado um octógono equiângulo, com todos os comprimentos dos lados sendo inteiros, prove que os lados opostos são iguais aos pares.

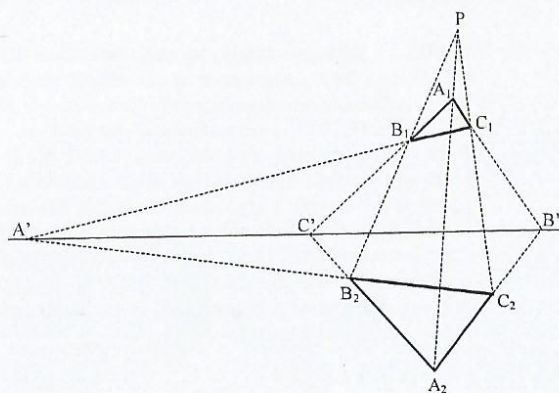
107) (Torneio das Cidades-89) O hexágono ABCDEF está inscrito em um círculo e possui AB = BC, CD = DE e EF = FA. Mostre que a área do triângulo BDF é igual a metade da área do hexágono.

108) (São Paulo-2001) Na segunda fase da FUVEST 2000, pedia-se uma construção para a circunferência circunscrita ao polígono regular de 12 lados (ou seja, a circunferência que contém os 12 vértices do polígono), dados os pontos A e B, em que o segmento AB era um de seus lados. Um estudante sugeriu a seguinte construção "Trace a mediatriz de AB e determine sobre ela o ponto O tal que AO = 2AB. O é o centro da circunferência circunscrita."
Provaremos neste problema que, infelizmente, tal construção está incorreta.

a) Numa construção correta, qual é a medida do seno do ângulo formado pela mediatriz de AB e o segmento que liga A ao centro da circunferência circunscrita?
b) Mostre que, sendo R o raio correto da circunferência circunscrita e AO e medida incorreta obtida na construção do estudante, $0 < \frac{AO - R}{R} < 0{,}05$, ou seja, a construção está incorreta mas o erro relativo é inferior a 5%.

109) (Yucatán-2000) Drini tem um terreno em forma de hexágono regular cujo lado mede 50 m. Em uma esquina está presa a vaca Clarabella com uma corda de 50 m.
a) Calcule a área de terreno em que Clarabella pode pastar.
b) Qual será a área de pasto que pode comer Clarabella se a corda medisse $50\sqrt{3}$ m?

APÊNDICE

Teorema de Desargues: Se $\Delta A_1B_1C_1$ e $\Delta A_2B_2C_2$ estão situados de modo que as retas que passam pelos correspondentes vértices, $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ e $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ são concorrentes, então os pares de lados correspondentes intersectam-se em três pontos colineares.

Demonstração:

Na figura, $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ e $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ encontram-se em P, por hipótese. $\overleftrightarrow{B_2C_2}$ e $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ encontram-se em A'; $\overleftrightarrow{A_2C_2}$ e $\overleftrightarrow{A_1C_1}$ encontram-se em B'; $\overleftrightarrow{B_2A_2}$ e $\overleftrightarrow{B_1A_1}$ encontram-se em C'. Considere $\overline{A'B_1C_1}$ como transversal de ΔPB_2C_2.

Assim, pelo Teorema de Menelaus:

$$\frac{PB_1}{B_1B_2}\cdot\frac{B_2A'}{A'C_2}\cdot\frac{C_2C_1}{C_1P}=1 \quad (1)$$

Considerando $\overline{C'B_1A_1}$ como transversal de ΔPB_2A_2:

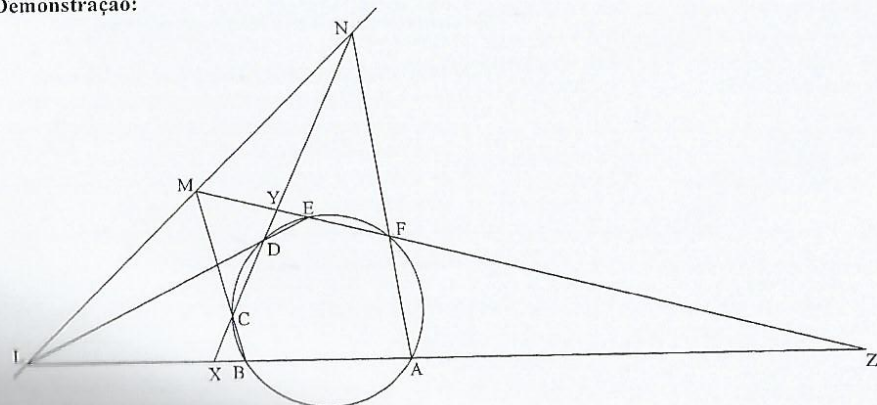
$$\frac{PA_1}{A_1A_2}\cdot\frac{A_2C'}{C'B_2}\cdot\frac{B_2B_1}{B_1P}=1 \quad (2)$$

Agora, tomando $\overline{B'A_1C_1}$ como transversal de ΔPA_2C_2: $\frac{PC_1}{C_1C_2}\cdot\frac{C_2B'}{B'A_2}\cdot\frac{A_2A_1}{A_1P}=1 \quad (3)$

Multiplicando (1), (2) e (3) obtemos: $\frac{B_2A'}{A'C_2}\cdot\frac{A_2C'}{C'B_2}\cdot\frac{C_2B'}{B'A_2}=1$

Assim, pelo Teorema de Menelaus, aplicado a $\Delta A_2B_2C_2$, temos que os pontos A', B' e C' são colineares.

Teorema de Pascal: Se um hexágono, com nenhum par de lados opostos paralelos, está inscrito em uma circunferência, então as interseções dos lados opostos são colineares.

Demonstração:

Os pares de lados opostos $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ intersectam-se em L, $\overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ intersectam-se em M e $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{AF}$ intersectam-se em N. Também $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CN}$ intersectam-se em X, $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{CN}$ intersectam-se em Y e $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ intersectam-se em X.

Considerando $\overleftrightarrow{BC}$ como transversal de ΔXYZ, pelo Teorema de Menelaus: $\frac{ZB}{BX}\cdot\frac{XC}{CY}\cdot\frac{YM}{MZ}=1 \quad (1)$

Tomando $\overleftrightarrow{AF}$ como transversal de ΔXYZ: $\frac{ZA}{AX}\cdot\frac{YF}{FZ}\cdot\frac{XN}{NY}=1 \quad (2)$

Uma vez que $\overleftrightarrow{DE}$ é transversal de ΔXYZ: $\frac{XD}{DY}\cdot\frac{YE}{EZ}\cdot\frac{ZL}{LX}=1 \quad (3)$

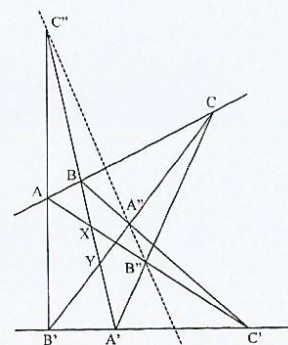
Multiplicando (1), (2) e (3): $\frac{YM}{MZ}\cdot\frac{XN}{NY}\cdot\frac{ZL}{LX}\cdot\frac{(ZB)(ZA)}{(EZ)(FZ)}\cdot\frac{(XD)(XC)}{(AX)(BX)}\cdot\frac{(YE)(YF)}{(DF)(CY)}=1 \quad (4)$

Por outro lado, pelas relações de potência de ponto relativas às secantes à circunferência:
$(ZB)(ZA)=(EZ)(FZ)$, $(XD)(XC)=(AX)(BX)$, $(YE)(YF)=(DY)(CY)$

Assim, substituindo estas relações na equação (4), obtemos: $\frac{YM}{MZ}\cdot\frac{XN}{NY}\cdot\frac{ZL}{LX}=1$

Portanto, pelo Teorema de Menelaus, os pontos M, N e L são colineares.

Teorema de Pappus: Pontos A, B e C estão em uma reta e A', B' e C' estão em outra reta (em alguma ordem). Se $\overleftrightarrow{AB'}$ e $\overleftrightarrow{A'B}$ intersectam-se em C'', $\overleftrightarrow{AC'}$ e $\overleftrightarrow{A'C}$ intersectam-se em B'' e $\overleftrightarrow{BC'}$ e $\overleftrightarrow{B'C}$ intersectam-se em A'', então os pontos A'', B'' e C'' são colineares.

Demonstração:

$\overline{B'C}$ e $\overline{A'B}$ encontram-se no ponto Y, $\overline{AC'}$ e $\overline{A'B}$ encontram-se no ponto X e $\overline{B'C}$ e $\overline{AC'}$ encontram-se no ponto Z.

Considere $\overline{C''AB'}$ como transversal de ΔXYZ.

Pelo Teorema de Menelaus: $\frac{ZB'}{YB'}\cdot\frac{XA}{ZA}\cdot\frac{YC''}{XC''}=1 \quad (1)$

Tomando $\overline{A'B''C}$ como transversal de ΔXYZ:

$$\frac{YA'}{XA'}\cdot\frac{XB''}{ZB''}\cdot\frac{ZC}{YZ}=1 \quad (2)$$

$\overline{BA''C'}$ é transversal de ΔXYZ: $\frac{YB}{XB}\cdot\frac{ZA''}{YA''}\cdot\frac{XC'}{ZC'}=1 \quad (3)$

Como A, B e C são colineares e os pontos A', B' e C' são colineares, podemos escrever as seguintes relações do Teorema de Menelaus (quando consideramos cada reta como transversal de ΔXYZ).

$$\frac{ZB'}{YB'}\cdot\frac{YA'}{XA'}\cdot\frac{XC'}{ZC'}=1 \quad (4)$$

$$\frac{XA}{ZA}\cdot\frac{ZC}{YC}\cdot\frac{YB}{XB}=1 \quad (5)$$

Multiplicando (1), (2) e (3) e substituindo as relações (4) e (5) obtemos: $\frac{YC''}{XC''}\cdot\frac{XB''}{ZB''}\cdot\frac{ZA''}{YA''}=1$

Desta forma, pelo Teorema de Menelaus temos que A'', B'' e C'' são colineares.

Capítulo 3: Introdução aos Círculos

1) b 2) a 3) b 4) d 5) 14
6) 37° 7) c 8) b 9) b 10) a
11) b 12) c 13) b 14) b
15) a) 10 cm; b) $20\pi/3$ 16) b 17) b 18) a
19) d 20) a 21) b 22) a 23) d
24) b 25) a 26) a 27) a 28) $29-16\sqrt{3}$
29) 16,8 33) $\sqrt{130}$ 35) $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-1\right)^2 R$ 36) $\frac{5-2\sqrt{2}}{17}R$
37) a 38) a 39) c 42) 20 cm 48) $3-2\sqrt{2}$
49) 31 50) 8/9 51) 5 52) 1/2
54) $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}-1}{2}$ 55) 1/4 56) i) 120°; ii) 15° 57) 3 58) $\sqrt{2}+1$
59) 3 60) $\sqrt{3}+2$ 61) $\overline{EH}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ e $\overline{FE}=\overline{FH}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ 62) b
63) c 64) c 65) c 66) b 67) a
68) a 69) a 70) c 71) a 72) b
73) d 74) a 76) 24 77) 78) $\sqrt{5}$
79) a) 1/2; b) $5\sqrt{5}$ 80) $\theta/3$ 81) b) $\overline{BC} \le \overline{AB} \le 2.\overline{BC}$
83) $MN = \ell/5$ $AM = 3\ell/5$ 89) d 94) a) $(a + b - c)/2$
95) as duas interseções da perpendicular a OA, passando por A, com a circunferência 96) $3(\sqrt{3}-1)$

Capítulo 4: Área e Relações Métricas de um Triângulo

1) 1/4 2) 24 cm^2 3) 12 4) V V F V V 5) 56
6) F F F V V 7) 15 8) 20 9) 92 10) 29
11) $\frac{(a-\sqrt{\ell^2+a^2-\sqrt{3}.\ell.a})^2\sqrt{3}}{4}$ 12) a 13) c 14) F F V F
15) V F F F 16) d 17) 53 18) c 19) d
20) 39 21) d 22) c 23) 15/29 25) e
26) e 27) a 28) a 29) a) 90°; b) $2\sqrt{6}$ 30) d
31) a 32) a) CN = CM = 2/3; b) $\sqrt{3}/9$ 33) $(l^2.\text{sen } \alpha.\text{sen } \beta)/[2.\text{sen}(\alpha + \beta)]$
34) a) 2,25 m, b) $125\sqrt{3}/16$ m^2 35) e 36) c 37) d
38) c 39) e 40) c 41) d 42) e
43) b 44) b 45) d 46) a 47) b
48) e 49) b 50) b 51) b 52) d
53) b 54) d 55) b 56) d 57) e
58) b 59) c 60) a 61) c 62) b
63) e 64) b 65) $AB^2 - AM^2 = BM.MC$ 67) $\sqrt{a^2+b^2}$
69) $c = (2S)/[K.\text{tg}(C/2)] - K/2$ 70) $\sqrt{7}l/7$ 71) 300 73) a
74) b 75) c 76) $10 \pm \sqrt{3}$ dm
78) $CD = \frac{(n^2-m^2)ab}{m(bm-an)}$ e $CE = \frac{(n^2-m^2)ab}{n(bm-an)}$

79) $x = \sqrt{\frac{b^2+c^2 \pm 2\sqrt{3b^2c^2-b^4-c^4}}{5}}$, com $\frac{2}{1+\sqrt{5}} \le \frac{b}{c} \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
80) $1-\cos^2\hat{A}-\cos^2\hat{B}-\cos^2\hat{C}$ 81) $\frac{k}{b}\left(\sqrt{k^2+ab}+\sqrt{k^2-ab}\right)$ e $\frac{k}{b}\left(\sqrt{k^2+ab}-\sqrt{k^2-ab}\right)$
84) $\sqrt{11}$ 85) $4\sqrt{7}$ 86) AX = 15 87) $(12\sqrt{6}-28)/7$ 88) 5,6 m
89) 20,62 cm 90) 2,5 e 8,5 91) BD = 2,2 ou 5 92) $2\sqrt{(a^2+ab+b^2)/3}$
93) $\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc}$, $\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2ac}$ e $\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$ 95) 4 cm^2
96) 6,93 m^2 e 6,93 m^2 97) 3 m, 4 m, 5 m e 6 m^2
98) $a^2(3+2\sqrt{3})/8$ 99) $p^2h/(2p + h)$ 100) $\sqrt{(a+b+c)abc}$ 102) a) $\sqrt{3}$; b) $\frac{\text{sen}(C-B)}{\text{sen}A}$
103) c 104) c 105) e 106) d 107) c
108) 100 cm^2 109) 125/3 cm^2 110) 3 m^2 111) $2(a^2 + b^2 + ab)$ 112) 4
113) 14 114) 12 115) 495 116) 80
117) $BC = 2\sqrt{S.\text{tg}(x/2))}$, $AB = AC = \sqrt{S/[\text{sen}(2x)\cos(x/2)]}$ 118) $2/(1 + \text{sen } \alpha + \cos \alpha)$
119) $\sqrt[3]{2}$ 120) c 121) $192\sqrt{3}$
122) $c = \frac{2p.\text{sen}(A+B)}{\text{sen}A+\text{sen}B+\text{sen}(A+B)}$; $S = \frac{2p^2.\text{sen}A.\text{sen}B.\text{sen}(A+B)}{[\text{sen}A+\text{sen}B+\text{sen}(A+B)]^2}$
123) $\sqrt{a^2+b^2}/2$ 124) $\sqrt{129}$ 127) $k^2/9$ 128) 16 129) igual
130) 6/49 132) 5 135) 125 136) 7/2 137) $k/(1 + k)^2$
138) 3 139) 144 cm^2 140) b 141) 21 143) $2\sqrt{3}$
144) $8\sqrt{3}-6$ 145) 80 146) 48 147) 16/45 148) c
149) 12 150) 858 151) $AB = \sqrt{12}$, $AC = \sqrt{33}$ e $BC = \sqrt{45}$ 152) 4132
153) $\sqrt{2880}$ 154) 2 155) 7/25 156) $\frac{ad}{4bc}(b^2+c^2-x^2)$
158) retângulo: $r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, acutângulo: $1 \le r < \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ e obtusângulo: $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} < r < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
159) Sim, lados 4, 5 e 6

Capítulo 5: Introdução aos Quadriláteros

1) S = 14400 m^2 AE = 120 m EF = 100m; 2) $S = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ m^2 3) b
4) S = 108 cm^2 5) 76 6) e 7) 3 8) 241
9) 30 10) 28 11) a 12) $AB = \frac{208}{3}$ $BD = \frac{104\sqrt{13}}{3}$
13) x = 10 $y = 10\sqrt{5}$ $z = 5(\sqrt{10}-\sqrt{2})$ 14) c 15) 6 16) 1/2
17) d 18) c 19) e 20) a 21) a
22) c 23) $\frac{5\sqrt{41}}{2}$ 24) a) 2; b) 3/4; 25) $\theta = 45°$ $S_{max} = 9/2$
26) $10\sqrt{2}-2$ 27) b 28) a) 3x/2 cm^2; b) $6(\sqrt{3}-1)$ cm 29) 12 cm

Capítulo 3: Introdução aos Círculos

1) b 2) a 3) b 4) d 5) 14
6) 37° 7) c 8) b 9) b 10) a
11) b 12) c 13) b 14) b
15) a) 10 cm; b) $20\pi/3$ 16) b 17) b 18) a
19) d 20) a 21) b 22) a 23) d
24) b 25) a 26) a 27) a 28) $29-16\sqrt{3}$
29) 16,8 33) $\sqrt{130}$ 35) $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-1\right)^2 R$ 36) $\frac{5-2\sqrt{2}}{17}R$
37) a 38) a 39) c 42) 20 cm 48) $3-2\sqrt{2}$
49) 31 50) 8/9 51) 5 52) 1/2
54) $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}-1}{2}$ 55) 1/4 56) i) 120°; ii) 15° 57) 3 58) $\sqrt{2}+1$
59) 3 60) $\sqrt{3}+2$ 61) $\overline{EH}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ e $\overline{FE}=\overline{FH}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ 62) b
63) c 64) c 65) c 66) b 67) a
68) a 69) a 70) c 71) a 72) b
73) d 74) a 76) 24 77) 78) $\sqrt{5}$
79) a) 1/2; b) $5\sqrt{5}$ 80) $\theta/3$ 81) b) $\overline{BC}\le\overline{AB}\le 2.\overline{BC}$
83) MN = $\ell/5$ AM = $3\ell/5$ 89) d 94) a) (a + b − c)/2
95) as duas interseções da perpendicular a OA, passando por A, com a circunferência 96) $3(\sqrt{3}-1)$

Capítulo 4: Área e Relações Métricas de um Triângulo

1) 1/4 2) 24 cm² 3) 12 4) V V F V V 5) 56
6) F F F V V 7) 15 8) 20 9) 92 10) 29
11) $\frac{(a-\sqrt{\ell^2+a^2-\sqrt{3}.\ell.a})^2\sqrt{3}}{4}$ 12) a 13) c 14) F F V F
15) V F F F 16) d 17) 53 18) c 19) d
20) 39 21) d 22) c 23) 15/29 25) e
26) e 27) a 28) a 29) a) 90°; b) $2\sqrt{6}$ 30) d
31) a 32) a) CN = CM = 2/3; b) $\sqrt{3}/9$ 33) $(l^2.\text{sen }\alpha.\text{sen }\beta)/[2.\text{sen}(\alpha+\beta)]$
34) a) 2,25 m, b) $125\sqrt{3}/16$ m² 35) e 36) c 37) d
38) c 39) e 40) c 41) d 42) e
43) b 44) b 45) d 46) a 47) b
48) e 49) b 50) b 51) b 52) d
53) b 54) d 55) b 56) d 57) e
58) b 59) c 60) a 61) c 62) b
63) e 64) b 65) $AB^2-AM^2=BM.MC$ 67) $\sqrt{a^2+b^2}$
69) c = (2S)/[K.tg (C/2)] − K/2 70) $\sqrt{7}.l/7$ 71) 300 73) a
74) b 75) c 76) $10\pm\sqrt{3}$ dm
78) $CD=\frac{(n^2-m^2)ab}{m(bm-an)}$ e $CE=\frac{(n^2-m^2)ab}{n(bm-an)}$

79) $x=\sqrt{\frac{b^2+c^2\pm 2\sqrt{3b^2c^2-b^4-c^4}}{5}}$, com $\frac{2}{1+\sqrt{5}}\le\frac{b}{c}\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
80) $1-\cos^2\hat{A}-\cos^2\hat{B}-\cos^2\hat{C}$ 81) $\frac{k}{b}\left(\sqrt{k^2+ab}+\sqrt{k^2-ab}\right)$ e $\frac{k}{b}\left(\sqrt{k^2+ab}-\sqrt{k^2-ab}\right)$
84) $\sqrt{11}$ 85) $4\sqrt{7}$ 86) AX = 15 87) $(12\sqrt{6}-28)/7$ 88) 5,6 m
89) 20,62 cm 90) 2,5 e 8,5 91) BD = 2,2 ou 5 92) $2\sqrt{(a^2+ab+b^2)/3}$
93) $\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc}$, $\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2ac}$ e $\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$ 95) 4 cm²
96) 6,93 m² e 6,93 m² 97) 3 m, 4 m, 5 m e 6 m²
98) $a^2(3+2\sqrt{3})/8$ 99) $p^2h/(2p+h)$ 100) $\sqrt{(a+b+c)abc}$ 102) a) $\sqrt{3}$; b) $\frac{\text{sen}(C-B)}{\text{sen}A}$
103) c 104) c 105) e 106) d 107) c
108) 100 cm² 109) 125/3 cm² 110) 3 m² 111) $2(a^2+b^2+ab)$ 112) 4
113) 14 114) 12 115) 495 116) 80
117) $BC=2\sqrt{S.tg(x/2)}$, $AB=AC=\sqrt{S/[\text{sen}(2x)\cos(x/2)]}$ 118) $2/(1+\text{sen }\alpha+\cos\alpha)$
119) $\sqrt[3]{2}$ 120) c 121) $192\sqrt{3}$
122) $c=\frac{2p.\text{sen}(A+B)}{\text{sen}A+\text{sen}B+\text{sen}(A+B)}$; $S=\frac{2p^2.\text{sen}A.\text{sen}B.\text{sen}(A+B)}{[\text{sen}A+\text{sen}B+\text{sen}(A+B)]^2}$
123) $\sqrt{a^2+b^2}/2$ 124) $\sqrt{129}$ 127) $k^2/9$ 128) 16 129) igual
130) 6/49 132) 5 135) 125 136) 7/2 137) $k/(1+k)^2$
138) 3 139) 144 cm² 140) b 141) 21 143) $2\sqrt{3}$
144) $8\sqrt{3}-6$ 145) 80 146) 48 147) 16/45 148) c
149) 12 150) 858 151) $AB=\sqrt{12}$, $AC=\sqrt{33}$ e $BC=\sqrt{45}$ 152) 4132
153) $\sqrt{2880}$ 154) 2 155) 7/25 156) $\frac{ad}{4bc}(b^2+c^2-x^2)$
158) retângulo: $r=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, acutângulo: $1\le r<\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ e obtusângulo: $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}<r<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
159) Sim, lados 4, 5 e 6

Capítulo 5: Introdução aos Quadriláteros

1) S = 14400 m² AE = 120 m EF = 100m; 2) $S=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ m² 3) b
4) S = 108 cm² 5) 76 6) e 7) 3 8) 241
9) 30 10) 28 11) a 12) $AB=\frac{208}{3}$ $BD=\frac{104\sqrt{13}}{3}$
13) x = 10 $y=10\sqrt{5}$ $z=5(\sqrt{10}-\sqrt{2})$ 14) c 15) 6 16) 1/2
17) d 18) c 19) e 20) a 21) a
22) c 23) $\frac{5\sqrt{41}}{2}$ 24) a) 2; b) 3/4; 25) θ = 45° $S_{max}=9/2$
26) $10\sqrt{2}-2$ 27) b 28) a) 3x/2 cm²; b) $6(\sqrt{3}-1)$ cm 29) 12 cm

30) a) 32 cm e 16 cm; b) 64 cm^2 e 16 cm^2 31) b 32) a
33) d 34) d 35) a 36) d 37) e
38) 7 39) b 40) c 41) b 42) b
43) a 44) a 45) b 46) d 47) 21S/80
48) d 49) b 50) d 51) b 52) d
53) b 54) b 55) c 56) a 57) c
58) b 59) b 60) d 61) c 62) a
63) b 64) d 67) 24/5 72) 17/2 73) 2 cm
82) e 83) o valor da área é constante 84) $3\sqrt{2}$ 86) 18
87) $PC = \sqrt{10}$ $PD = \sqrt{17}$ 88) $\sqrt{5}/5$ 89) k = 2 90) 108
91) 17 cm 92) 35 cm^2 93) 58 cm^2 94) b 98) 7
100) 75/4 101) $3\sqrt{13}/5$ 102) $845\sqrt{69}/69$ 105) 120 107) 1320
115) 1/8 117) $2\sqrt{3}$ 121) c 122) b 124) menor
126) d 127) e 128) $\dfrac{(217-\sqrt{221})5}{7}$ 129) 55 cm^2 130) 256
131) $\sqrt{193}$ 133) $3\sqrt{3}/2$ 135) d

Capítulo 6: Área e Relações Métricas no Círculo

1) a) $8 + \pi$, b) $8 - \pi$ 2) a) $2\sqrt{2}+2$; b) $48+32\sqrt{2}-(16+8\sqrt{2})\pi$ 3) b 4) d
5) c 6) c 7) $12 - 2\pi$ 8) $10(\sqrt{5}-1)$ 9) $24\sqrt{3}-8\pi$
10) 49 11) 10/3 12) $\dfrac{25(\pi+4)}{4}$ 13) c 14) b
15) a) $9\sqrt{3}-2\pi$ cm^2 16) a 17) b 18) c 19) e
20) b 21) e 22) b 23) e 24) d
25) a 26) d 27) a 28) e 29) a
30) d 31) e 32) a 33) d 34) d
35) b 36) c 37) d 38) b 39) c
40) c 41) d 42) a 43) a 44) a
45) c 46) c 47) c 48) c 49) a
51) c 52) b 53) a 54) c 55) a
56) d 57) c 58) e 59) b 60) c
61) $R\sqrt{\dfrac{i}{n}}$ 62) a) $8\sqrt{2}$ m; b) $12\sqrt{2}$ m^2 64) $\pi/2$
65) $\dfrac{(5\sqrt{3}-2\pi)R^2}{12}$ 66) $r = R(2\sqrt{3}-3)$ $S = \dfrac{3(7-4\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\pi)R^2}{3}$ 67) $\dfrac{\sqrt{15}R^2}{4}$
68) a) $S_n = \dfrac{\pi R^2(5.3^n+3)}{8.3^{2n}}$; b) $S = \dfrac{5\pi R^2}{8}$ 69) $2\pi R$ e $\pi R^2 - 2S$ 70) b) $\dfrac{5\sqrt{3}R^2}{12} - \dfrac{\pi R^2}{6}$
73) 5,88 m 74) $\dfrac{Rr}{(\sqrt{R}-\sqrt{r})^2}$ 75) $(\overline{QA}.\overline{QB})^{1/2}$ 76) $\dfrac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$
77) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ cm 79) a 80) b 82) $\dfrac{4R^4}{(R^2-r^2)}$ 83) $2\sqrt{46}$
84) $\dfrac{abc^2}{4R(a+b)^2}$ 85) b 86) 45 87) $(14\sqrt{3}+24)/3$ 88) $25 + 6\pi$ cm^2

89) $25(\pi - 2)$ cm^2 90) $(\pi - 2)/2$ 91) 9 92) 30 93) $9\sqrt{3}+6\pi$
94) 100 95) b 96) d 97) c 98) b
99) $(4+\sqrt{7})/2$ 100) 8 101) e 102) $4 + 3\pi$ 103) 5/3
104) $\pi/2$ 105) b 106) $(2-\sqrt{2})(1-x)$ 107) c 108) $2\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
111) $294\pi - 81\sqrt{3}$ 112) 95/3 113) $\sqrt{3}-3+\dfrac{\pi}{2}$ cm^2 114) 926 115) c

Capítulo 7: Triângulos – Pontos Clássicos

5) 24 7) 1/7 30) 18 31) d 33) 4
34) 9/11 35) $\dfrac{1-t+t^2}{1-4t+4t^2}$ 43) b 44) 4 cm
45) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{5}}$; b) 1 46) a) $36\sqrt{3}$ m^2; b) $12\sqrt{3}$ m^2 47) c 48) a
49) $40\sqrt{3}/2$ cm^2 50) a) $\sqrt{2}$, circunferência 52) $\sqrt{10}$ 53) e
54) e 56) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, \dfrac{b\sqrt{3}}{2}, \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$ 58) $x^2 + y^2 = 45$ 63) 10
64) $\sqrt{26}/2$ 68) 4/3 69) 98 71) 7 cm^2 72) 150 cm^2
73) BM = 12 CN = 45/2 74) 27/38 76) 1/3 81) 7/5
82) d 86) $3\sqrt{13}$ 87) $\sqrt{26}/2$ 88) 7/8 90) b
91) c 92) d 93) d 94) c 95) c
96) a 97) b 98) d 99) 5 100) $3\sqrt{3}+3$
101) 35/4 102) a) 13/2; b) CD = 65/17 BD = 156/17 104) d
105) AC = 3 106) b 107) e 108) a 109) d
110) 3, 3, 2 111) $\sqrt{3}/2$ 113) 48 116) c = 8 b = 12 117) d
118) $4\sqrt{6}$ 119) $\sqrt{2}$ 120) c 121) $GI = \dfrac{a(3\sqrt{2}-4)}{12}$
122) d 123) 13, 15 124) 210 cm^2 127) a = 13, b = 12, c = 5
128) S = 4 129) a = 50 cm b = 40 cm c = 30 cm 132) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ 134) $2\sqrt{15}$
136) 13 147) $\dfrac{bc}{b+c}$ 148) a 149) d 150) c
151) 20 152) 45° 155) $\angle CRS = \angle CSR = 45°$ 158) 45°
162) AB = 2 BC = 4 AC = 3 163) (3, 4, 5) 165) ab/(a + b) 168) CE = 5,5
169) $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 105°$ e $\hat{C} = 15°$ 171) 345 172) 3/2 173) xy
174) b 175) b 176) $12 + 7\sqrt{3}$ 177) 45° 178) 30° e 60°
179) 45° 180) $\sqrt{5}/13$ 181) 11 182) a 183) b
184) a) 3 cm; b) $\dfrac{3(2+\sqrt{2})}{4}$ cm^2 185) e 186) a) $\dfrac{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}{2}$ km; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ km^2
187) c 188) a 189) b 190) c 193) $\dfrac{279\sqrt{3}}{4}$

198) $\frac{a^2+4b^2}{6\sqrt{a^2+b^2}}$ **200)** 400 **203)** $135\sqrt{3}/49$ **211)** 100 cm^2 **213)** 15

215) $8\sqrt{55}$ **216)** 15° **219)** 8,125 **221)** a **222)** a

223) d **224)** a **225)** 3 **226)** a **227)** c

228) 1 **229)** 80° **230)** a) 90°; b) $2\sqrt{6}$ **231)** 11/30 **232)** d

233) b **234)** $15\sqrt{3}/14$ m **235)** $\sqrt{105}/4$

236) $a=\frac{2r_a^2 tg(\hat{A}/2)}{h_a+2r_a}$, $bc=\frac{h_a.r_a^2}{(h_a+2r_a)\cos^2(\hat{A}/2)}$, $b+c=\frac{2r_a(h_a+r_a)tg(\hat{A}/2)}{h_a+2r_a}$ **243)** 20°

245) 15:10:6 **247)** $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ **250)** d

252) b) 55° e 125° **253)** 20 **256)** 3/2 **258)** 1/13 **263)** 85/5

264) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ **265)** 6 **266)** 5 **268)** tg B.tg C = k **269)** 45°

270) c) EF = 1 **272)** b **277)** $12\sqrt{34}$

279) a) $c^2-b^2=2$ $c/b=\sqrt{3}$; b) b = 1 $c=\sqrt{3}$; c) 30°, 60° e 90° **280)** 996/1995

283) AB.cotg (∠CPA) **284)** c **285)** 110

Capítulo 8: Área e Relações Métricas nos Quadriláteros

1) 12 cm^2 **2)** $\frac{3\sqrt{66}}{8}$ **3)** a **4)** $7\sqrt{3}/3$ **5)** c

6) c **7)** a **8)** d **9)** d **10)** 1/9

11) 9 m^2 **13)** 2, 3 e 6 **14)** $\alpha=\frac{9\sqrt{21}}{7}$ $\beta=\sqrt{21}$

15) 1) $\sqrt{\frac{(a.b+c.d)(a.c+b.d)}{a.d+b.c}}$ e $\sqrt{\frac{(a.d+b.c)(a.c+b.d)}{a.b+c.d}}$; 2) Não

16) a) $\frac{\sqrt{10}.a}{2}$; b) $BE=\frac{\sqrt{10}.a}{3}$ $ED=\frac{\sqrt{10}.a}{6}$; c) $DF=\frac{\sqrt{10}.a}{10}$ $EF=\frac{\sqrt{10}.a}{15}$ **17)** a

18) $\sqrt{2}$ **19)** 2 **20)** 25 e 23,4

25) a) $2\sqrt{3}$; b) $\sqrt{7}$; c) $\sqrt{91}/14$; d) $\sqrt{21}/3$ **26)** $\sqrt{172,9}/4$

28) $\overline{DF}=\overline{FB}=5\sqrt{2}$ **29)** $7\sqrt{2}$ **30)** $\frac{\sqrt{13}(\sqrt{2}+10)}{13}$ **31)** $3\sqrt{19}/2$ **38)** 599

39) k = 2/3 ou 3/2 **41)** 12,41 cm e 17,73 cm **42)** 7 cm e 20 cm

43) 10 cm **44)** 6 cm; 7,5 cm; 3,75 cm **45)** 8,69 cm **53)** 5

54) 8,14 **56)** $18\sqrt{19}$ **58)** 1/(3 – d) **66)** $(\sqrt{3}+1)/2$ **67)** D = 85/4

68) 1/2 **69)** $BC=3\sqrt{3}$ $CD=2\sqrt{3}$ **72)** 1 **73)** 9/2

82) r^2 **84)** 6 **85)** $\sqrt{647}$ **91)** $\frac{r^2\sqrt{5+2\sqrt{2}}}{4}$ **92)** 1/4

Capítulo 9: Polígonos

1) d **2)** c **3)** b **4)** $2\sqrt{3}/3$ **5)** a

6) d **7)** 36° **9)** V F F F **10)** c

11) a) 150°; b) $\sqrt{38}$ **12)** a **13)** a **14)** d **15)** c

16) c **17)** a **18)** 43 **19)** 20 **20)** 41

21) d **22)** 1 **23)** a) 60°; b) 120 cm; c) 309; d) $200(2\pi-3\sqrt{3})$

24) a) 10 cm; b) 50 cm^2; c) 956 cm^2 **25)** c **26)** d **27)** e

28) b **29)** e **30)** c **31)** d **32)** d

33) e **34)** e **35)** e **36)** e **37)** c

38) e **39)** e **40)** d **41)** c **42)** d

43) c **44)** e **45)** e **46)** c **47)** a

48) b **49)** b **50)** e **51)** $(6-4\sqrt{2})^2$ **54)** $a(1+\sqrt{5})$

56) d **57)** $a\sqrt{2}/2$ **63)** e **64)** e **65)** 15

66) b **67)** b **68)** b **69)** 126° **70)** 1

71) 3 – cerca 12, 4 – cerca 8, 6 – cerca 6, 10 – cerca 5; **72)** 3 **74)** 0,5

75) a **76)** b **77)** b **78)** e **79)** 9/8

80) $10(2-\sqrt{3})$ **81)** 3 **82)** d **83)** d **84)** $13+12\sqrt{2}$

86) 16 **87)** e **88)** 50 m **89)** a **90)** c

91) b **92)** c **93)** 1 e 8 **94)** 1/4 **95)** c

96) $\frac{65\sqrt{3}}{4}$ e $\frac{67\sqrt{3}}{4}$ **97)** $\frac{12\sqrt{3}-13}{12}$, $\frac{12\sqrt{3}-5}{12}$, $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ **98)** 13

99) c **100)** n = 27 **101)** H_8 **103)** $\frac{13+2\sqrt{2}}{23}$ **105)** $\sqrt{3}$

108) a) 1/4 **109)** a) $\frac{2500\pi}{3}$ m^2; b) $3750\sqrt{3}$ m^2